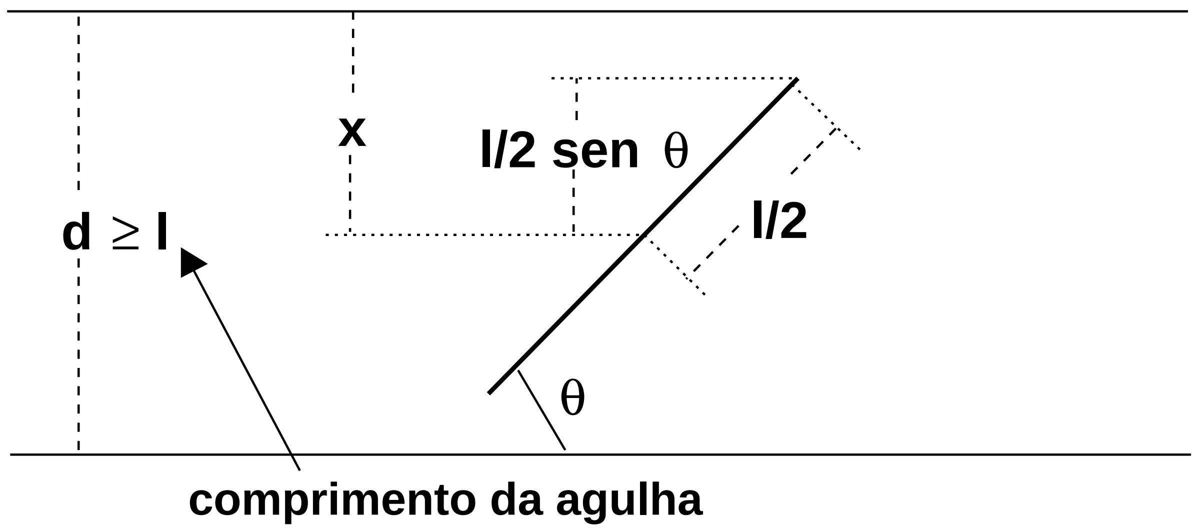
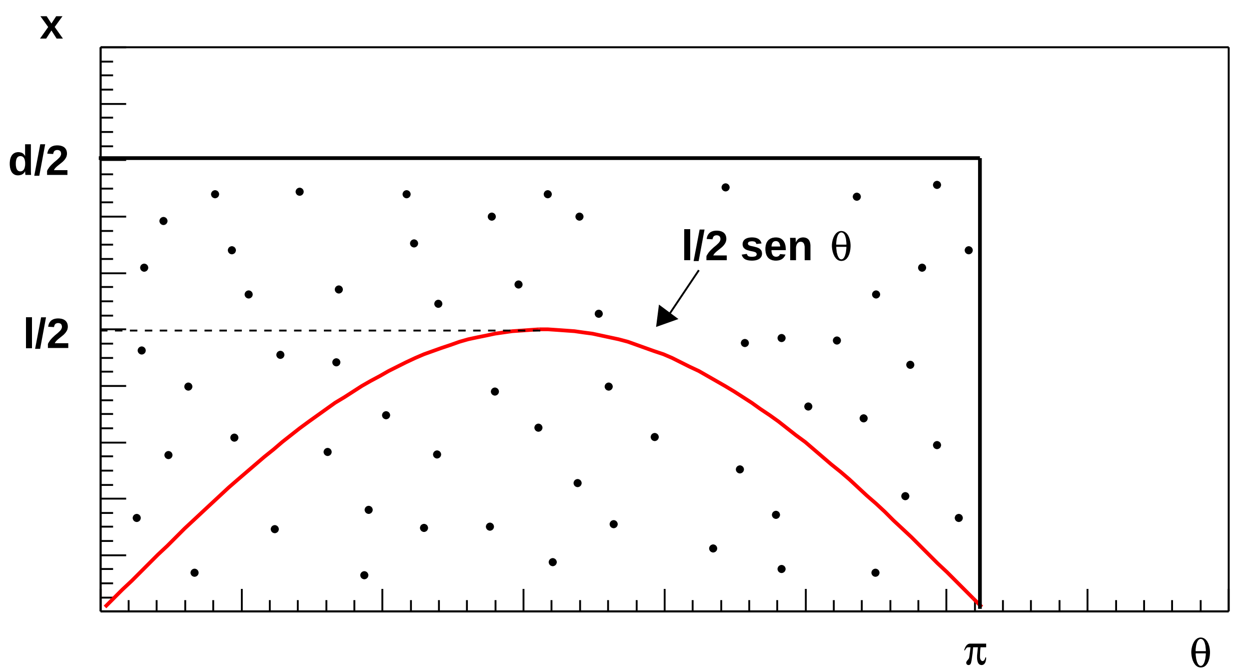
Tratamento Estatístico de Dados em Física

Métodos Probabilísticos de Simulação

- Experimento de Buffon
- Monte Carlo
- Métodos Diretos
- Método da Rejeição
- Método de Metropolis

Experimento de Buffon





- configuração: $\theta \longrightarrow (0, \pi)$ e $x \longrightarrow (0, d/2)$
- condição para interceptação: $x < (\ell/2)\text{sen}\theta$

$N \rightarrow$ número de tentativas

$m \rightarrow$ número de interceptações

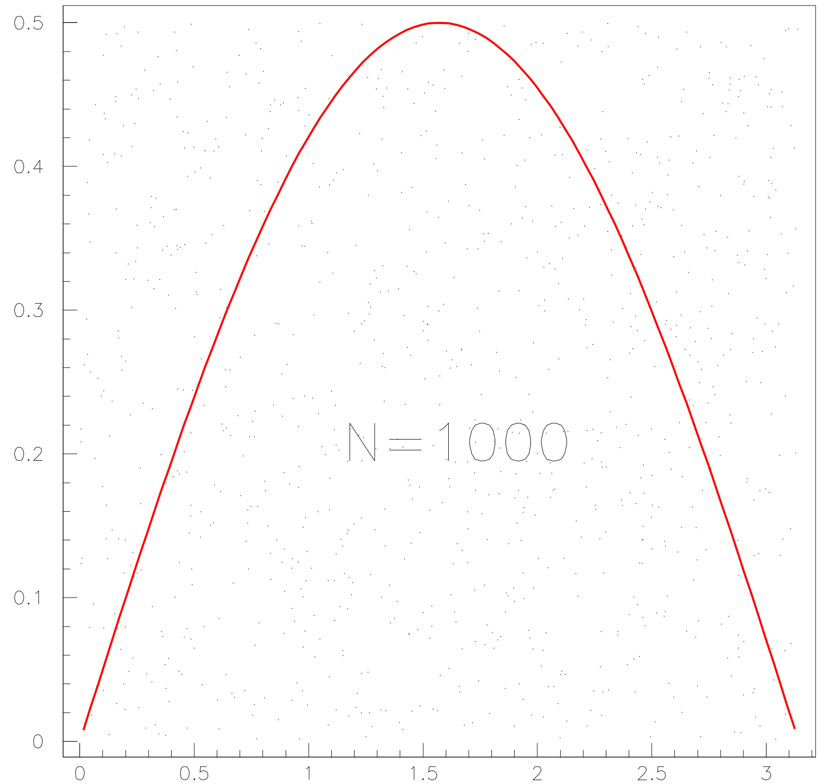
- probabilidade: $p = m/N$ (exp.)
- probabilidade: $p = I/A$ (teor.)

$$I = \int_0^\pi \frac{\ell}{2}\text{sen}\theta \; d\theta = \ell \quad \text{e} \quad A = \pi d/2$$

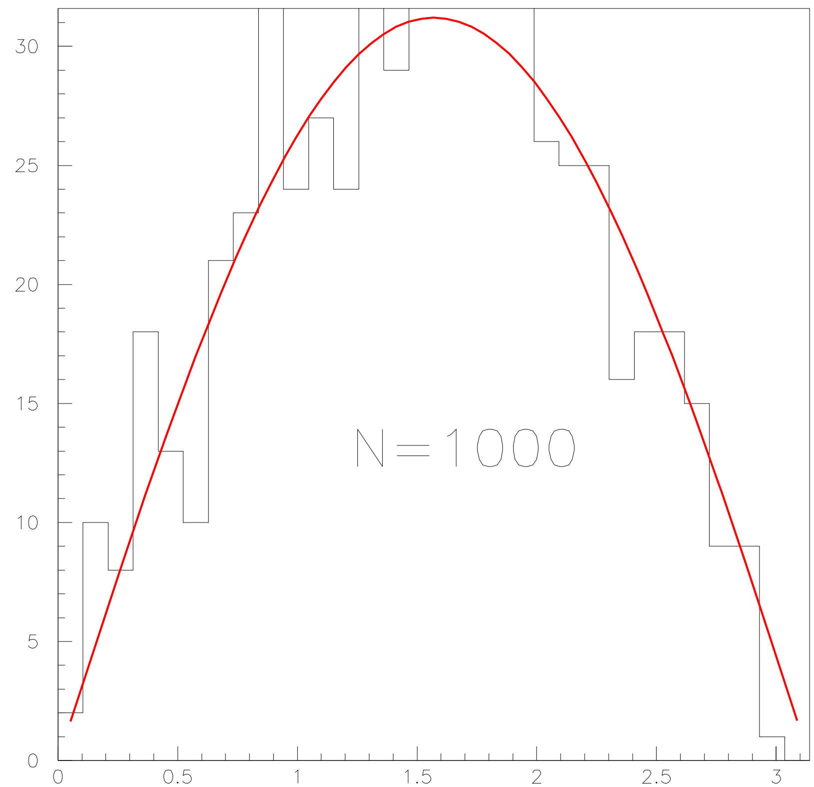
- estimativa para pi: $\pi = \left(\frac{2N}{m}\right)\left(\frac{\ell}{d}\right)$
- estimativa para integral: $I = A\frac{m}{N} = \frac{\pi d}{2}\left(\frac{m}{N}\right)$
- para N_{exp} repetições do experimento de N lançamentos

  o número de interceptações obedecerá a uma distribuição binomial

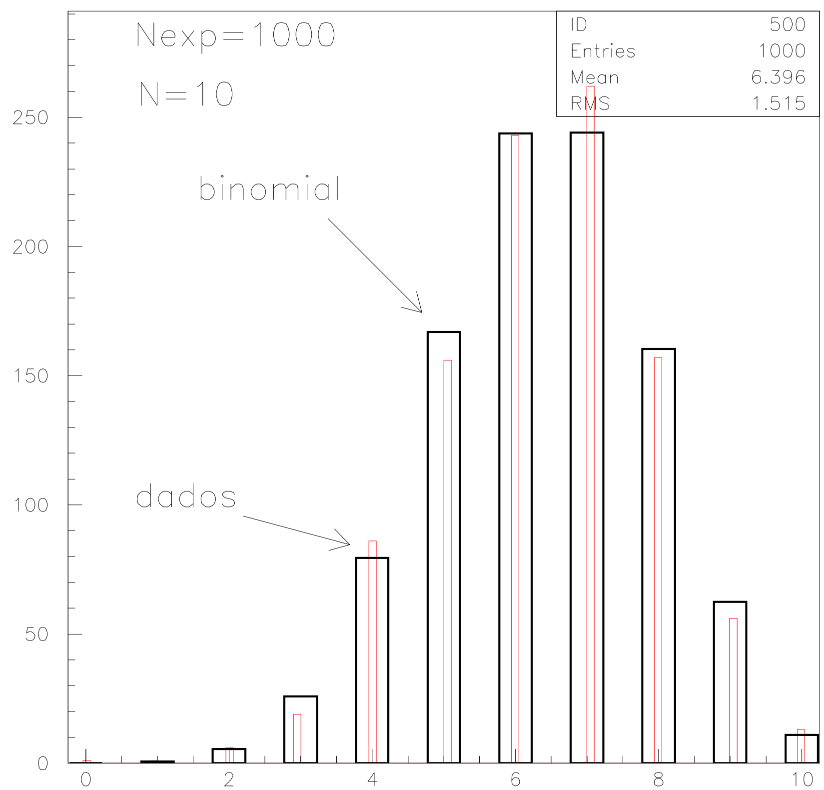
  $N_{\text{exp}} \times B(m|N,p) = N_{\text{exp}} \times \frac{N!}{(N-m)!m!} p^m (1-p)^{(N-m)}$



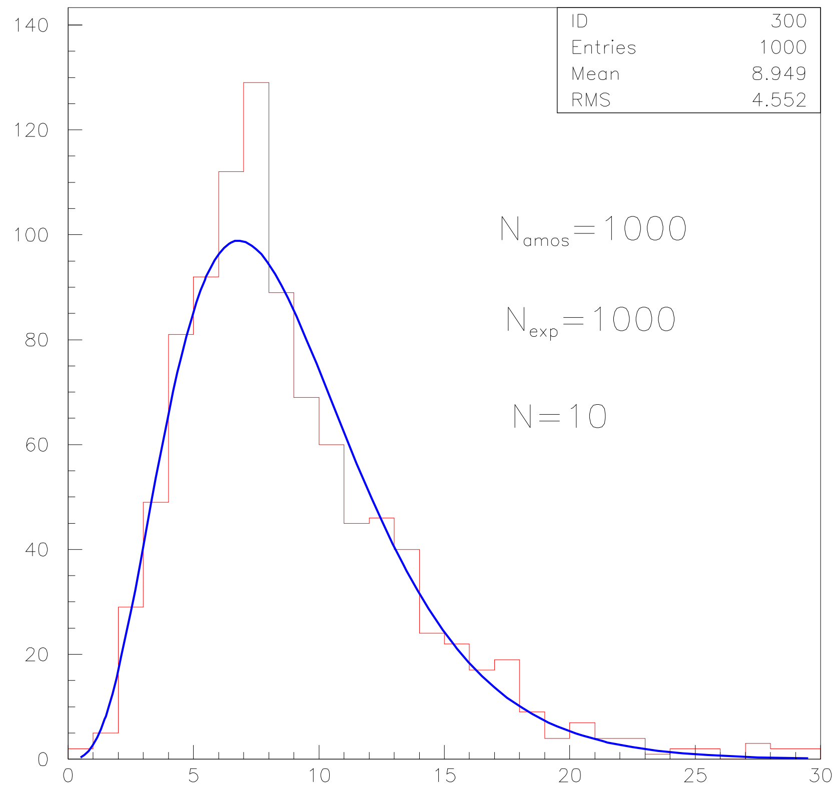
- $d = l \quad \longrightarrow \quad p_{\max}$



- distribuição de valores de θ aceitos: proporcional à curva (senoidal)



$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{N} \frac{(m_i - m_{\rm esp})^2}{m_{\rm esp}}$$



distribuição dos valores de χ^2

Estimativas e Erros

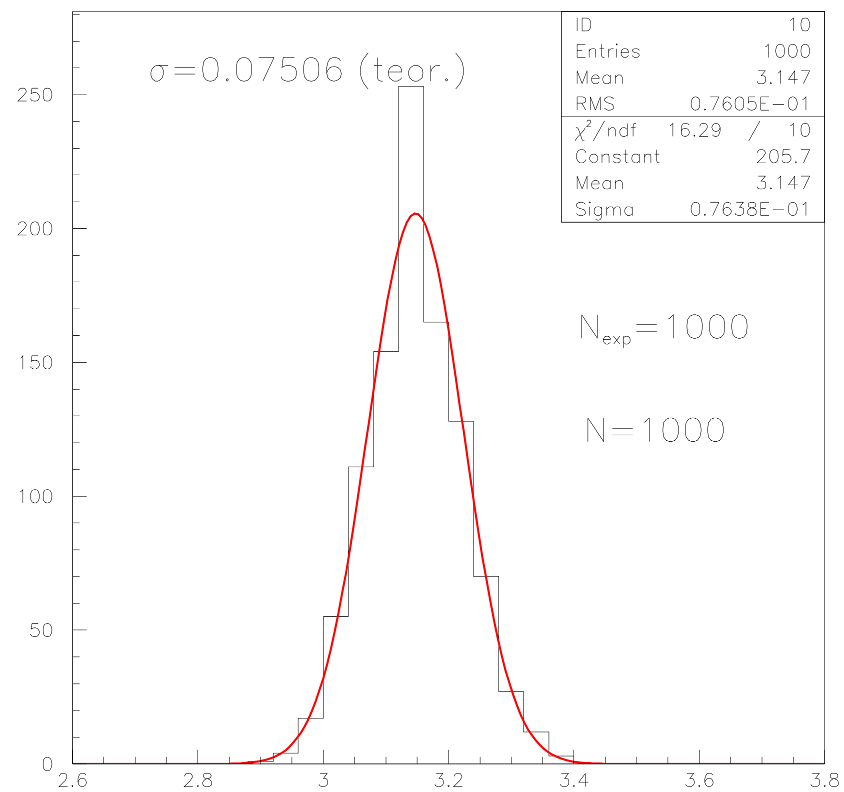
$$d = \ell \quad \rightarrow \quad p = 2/\pi = 0.63662 \text{ (teor.)} \quad \text{e} \quad A = \pi/2$$

$$\pi = \frac{2N}{m} \quad \text{e} \quad I = \frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{N}\right) \quad (I \approx 1)$$

- $\mu = \langle m \rangle = Np = m \quad \text{e} \quad \sigma_m = \sqrt{Np(1-p)}$
- $\sigma_\pi = \pi \frac{\sigma_m}{m} = \frac{\pi}{Np}\sqrt{Np(1-p)} = \frac{\pi}{N}\sqrt{\frac{1}{p} - 1}$

$$\boxed{\pi = 2\frac{N}{m} \pm \frac{2.37}{\sqrt{N}}} \quad \text{(teor.)}$$

$$\boxed{\pi = 2\frac{N}{m} \pm 2\frac{N}{m}\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{N}}} \quad (\text{exp.} - N >> 1)$$


σ=0.07506 (teor.)
ID 10
Entries 1000
Mean 3.147
RMS 0.7605E−01
χ²/ndf 16.29 / 10
Constant 205.7
Mean 3.147
Sigma 0.7638E−01
N_exp=1000
N=1000
0
50
100
150
200
250
2.6
2.8
3
3.2
3.4
3.6
3.8

- $\sigma_I = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma_m}{N} = \underbrace{\frac{\pi}{2}\frac{m}{N}}_{\approx 1}\frac{\sigma_m}{m} = \frac{\sigma_\pi}{\pi}$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}\frac{m}{N} \pm \frac{0.76}{\sqrt{N}}} \quad \text{(teor.)}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}\frac{m}{N} \pm \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{N}}} \quad (\text{exp.} - N >> 1)$$

Monte Carlo

- método numérico probabilístico de simulação

  difusão de nêutrons (Fermi -1934)
  problemas probabilísticos e determinísticos (von Neumann, Metropolis e Ulam - 1949)

- distribuições uniformes de números aleatórios $\rightarrow$ geração de eventos ou quantidades (integrais) associadas a um processo aleatório

  seqüências $\{r_1, r_2, \ldots\}$ de números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo $(0, 1) \rightarrow$ seqüência $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de números aleatórios distribuídos de acordo com uma dada **pdf** num intervalo (a, b)

Métodos Diretos

- $\{r_i\}$ e $\{x_i\}$ conjuntos de eventos equivalentes $\longrightarrow$ probabilidade de ocorrência de r_i no intervalo $(r,\ r+dr)$ = probabilidade de ocorrência de x_i no intervalo $[x(r),\ x(r)+dx]$

$$r = \int_a^{x(r)} f(x')\, dx' \quad r \in (0,1) \text{ (uniforme)} \longrightarrow x(r) \in (a,b) \text{ segundo } f(x)$$

Exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad (0,\infty) \quad \longrightarrow \quad x(r) = -\lambda \log r$$

- Integrais definidas no intervalo $(0,1)$

$$I = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 u(x)\ f(x)\ dx = \langle f \rangle$$

onde $u(x)$ - pdf de x, uniforme no intervalo (0,1)

podem ser calculadas a partir da média da seqüência $\{h(x_1), h(x_2), \ldots\}$ gerada por uma grande amostra $\{x_i\}$ de úmeros aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo (0,1).

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_i^N f(x_i)}{N}$$

com incerteza

$$\sigma_I = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}$$

Método da Rejeição

- Experimento de Buffon $\Longleftrightarrow$ seqüência de tentativas de acertar um alvo (região do espaço), a partir de disparos aleatórios distribuídos uniformemente numa região que englobe o alvo.

1) A partir de duas seqüências $\{r_1^i\}$ e $\{r_2^j\}$ de números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo (0,1) $\rightarrow$ duas seqüências $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ uniformes nos intervalos (a, b) e $(0, f_{\text{max}})$, segundo $x = r_1(b-a) + a$ e $y = r_2 f_{\text{max}}$

2) Conjunto $\{x_i\}$ dos pontos que satisfazem $y < f(x)$ estarão distribuídos segundo $f(x)$.

3) Se m é o número de pontos na região do alvo, para um grande número (N) de tentativas, a probabilidade ($\epsilon = m/N$) a posteriori (eficiência) tenderá à probabilidade ($p = I/A$) geométrica (teórica).

$A = f_{\max}\ (b - a)$ é a área do retângulo que engloba o alvo e I a área da região que constitui o alvo, limitada pela curva $f(x)$, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo das abscissas.

Estimativa para a integral de $f(x)$ no intervalo (a, b)

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\ dx = A\frac{m}{N} = f_{\max}(b-a)\frac{m}{N}} \quad (N >> 1)$$

Incerteza do número ($m = Np$) de pontos na região do alvo:
$\sigma_m = \sqrt{Np(1-p}$

Incerteza ($\sigma_I = I\frac{\sigma_m}{m}$) na estimativa da integral ($I = A\frac{m}{N}$)

$$\boxed{\sigma_I = \frac{A}{N}\,\sqrt{Np(1-p)} = \frac{A}{\sqrt{N}}\,\sqrt{\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)}}$$