

Mecânica Quântica I

Lista de exercícios - 01

(25 de março de 2019)

1. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int_{-5}^1 (x^3 - 2x^2 + x + 1) \delta(x - 1) dx$

b) $\int_0^\infty (\cos 3x - 2) \delta(x - \pi) dx$

c) $\int_{-1}^1 e^{|x|+3} \delta(x - 2) dx$

d) $\int_0^\infty \left(\cos \frac{\pi}{a} x \right) \delta(x^2 - a^2) dx \quad (a > 0)$

2. Indique as funções que são autofunções dos operadores $\frac{d}{dx}$, $-\frac{d}{dx}$, $i\frac{d}{dx}$, $-i\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$ e $-\frac{d^2}{dx^2}$.

a) e^{ax^2}

b) x

c) $ax + b$

d) $\sin x$

e) $\cos x$

f) ie^{ax}

g) e^{iax}

h) $(1 + i)e^{iax}$

3. Uma grandeza é representada por um operador diferencial hermitiano A que possui n autofunções normalizadas $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}$, que correspondentes a autovalores distintos $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Se o estado de uma partícula é descrito por

$$\psi = \frac{1}{2} \phi_1 + \sqrt{\frac{3}{8}} \phi_2 + \sqrt{\frac{3i}{8}} \phi_3$$

a) verifique a normalização de ψ ;

b) determine as probabilidades de ocorrência de a_1 e $a_1 + a_2$ para medidas de A ;

c) determine o valor médio de A .

4. Dois estados de uma partícula com energias definidas são representados pelas seguintes soluções normalizadas da equação de Schrödinger:

$$\begin{cases} \Psi_1(x, t) = \psi_1(x) e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \\ \Psi_2(x, t) = \psi_2(x) e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \end{cases}$$

a) Escreva uma superposição linear de Ψ_1 e Ψ_2 que representa um estado no qual as probabilidades associadas aos valores de energia E_1 e E_2 são $1/4$ e $3/4$, respectivamente.

b) Determine a incerteza na energia para o estado encontrado no item anterior.

- c) Mostre que a densidade de probabilidade de presença oscila como tempo, e determine a relação entre o período das oscilações e a incerteza da energia.

5. Uma partícula está confinada em uma região $0 < x < a$ tal que seu estado inicial pode ser representado por

$$\Psi(x, 0) = Ax(x - a)$$

- a) Determine $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$.

- b) Mostre que $\Delta x = \sqrt{\frac{1}{28}} a$ e $\Delta p = \sqrt{10} \frac{\hbar}{a}$

6. Sejam $\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$ e $\Psi_2(x, t) = \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$ dois autoestados de uma partícula associados às energias E_1 e $E_2 = 2E_1$. As autofunções ψ_1 e ψ_2 são reais.

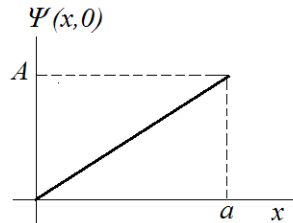
- a) Escreva uma superposição linear desses autoestados que representa um estado para o qual o valor médio da energia é igual a $7/4E_1$.
b) Determine a incerteza na energia para esse estado.
c) Mostre que a densidade de probabilidade de presença oscila com o tempo, e determine a relação entre o período das oscilações e a incerteza na energia.

7. A função de onda que descreve o estado de uma partícula de massa m , confinada entre os limites $x = 0$ e $x = a$ de um poço de potencial infinito, é dada por

$$\Psi(x, t) = A \sin \frac{5\pi}{a} x e^{-i \frac{25\hbar\pi^2}{2ma^2} t}$$

- a) Esse estado é estacionário? Justifique.
b) Determine os valores médios da posição e do *momentum*.
c) Calcule a probabilidade da partícula ser encontrada entre $x = 0$ e $x = a/2$.

8. O estado inicial de uma partícula é dado por



- a) Normalize esse estado.
b) Esboce o gráfico da densidade de probabilidade de presença.
c) Calcule a probabilidade de presença no intervalo $a/2 < x < a$.
d) Determine o ponto b , a partir do qual a probabilidade de presença é igual a $1/2$, ou seja, $P(b < x < a) = 0,5$.

9. O estado de uma partícula de massa m , confinada no intervalo $0 < x < a$, em um poço infinito, é expresso por

$$\Psi(x, t) = A \left(\sin \frac{\pi}{a} x \right) e^{-iEt/\hbar}$$

onde E é a energia.

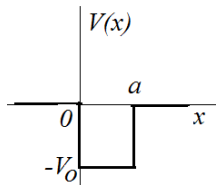
- a) Esse estado é estacionário? Por que?
b) Normalize esse estado.

- c) Esboce o gráfico da densidade de probabilidade de presença.
- d) Determine o valor médio da posição;
- e) Determine o valor médio do *momentum*;

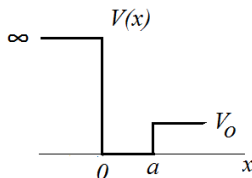
10. Com relação ao estado do problema anterior,

- a) Mostre que a incerteza na posição é dada por $\Delta x = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}}$
- b) Calcule a incerteza no *momentum*, e mostre que $\Delta x \Delta p \simeq 0,57\hbar$

11. Determine os estados ligados de uma partícula de massa m em um poço de potencial do tipo



12. Determine os estados ligados de uma partícula de massa m em um poço de potencial do tipo



13. O estado inicial de uma partícula de massa m confinada entre $0 < x < a$, em um poço de potencial infinito, é dado por

$$\Psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a)$$

Determine:

- a) o valor médio e a incerteza na posição; $\langle x \rangle = a/2$ e $\Delta x = \frac{a}{\sqrt{12}} \sqrt{1 - \frac{49}{6\pi^2}}$
- b) a incerteza relativa na energia. $(\Delta E / \langle E \rangle = 4/3)$

14. O estado inicial de uma partícula de massa m confinada entre $0 < x < a$, em um poço de potencial infinito, é dado por

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} Ax & (0 \leq x \leq a/2) \\ A(a - x) & (a/2 \leq x \leq a) \end{cases}$$

Determine:

- a) o estado da partícula para $t \geq 0$, $\Psi(x, t)$;

$$\Psi(x, t) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{a} x e^{-iE_n t/\hbar}$$
- b) a probabilidade de ocorrência do valor $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{3ma^2}$ para a energia da partícula, e o valor médio da energia. $P(E_1) = 0,9855$ e $\langle E \rangle = \frac{6\hbar^2}{ma^2}$

15. O estado fundamental de um oscilador harmônico de massa m e frequência natural ω_0 é dado por

$$\Psi_0(x, t) = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \quad \alpha = \frac{m\omega_0}{\hbar}$$

Determine:

- a) a constante de normalização e a energia do estado fundamental; $A_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$ $E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$
b) a constante de normalização e a energia do primeiro estado excitado, dado por

$$\Psi_1(x, t) = A_1 x e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \alpha^{3/4} \quad E_1 = \frac{3\hbar\omega_0}{2}$$

- c) a relação entre $\psi_1(x)$ e $\psi_0(x)$. $\psi_1(x) = \sqrt{2\alpha} \psi_0(x)$

16. Mostre que as incertezas associadas à posição e ao *momentum* de um oscilador harmônico de massa m e frequência natural ω_0 em seu estado fundamental obedecem à relação

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

17. Determine a probabilidade de presença de um oscilador harmônico na região classicamente proibida quando:

- a) o oscilador encontra-se em seu estado fundamental; (0,16)
b) o oscilador encontra-se no primeiro estado excitado. (0,11)

18. O estado de um oscilador harmônico de massa m e frequência natural ω_0 é dado por

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_0(x) e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} - \frac{1}{2} \psi_1(x) e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}$$

onde $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ são os autoestados correspondentes aos dois primeiros níveis de energia.

- a) Determine o valor médio e a incerteza da energia. $\langle E \rangle = \frac{3}{4}\hbar\omega_0$ $\Delta E = \frac{\sqrt{3}}{4}\hbar\omega_0$
b) Mostre que os valores médios $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ são dados por

$$\langle x \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\hbar}{2m\omega_0} \right) \cos \omega_0 t \quad \text{e} \quad \langle x^2 \rangle = \frac{3}{4} \frac{\hbar}{m\omega_0}$$

- c) Mostre que os valores médios $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ são dados por

$$\langle p \rangle = \left(\frac{3m\omega_0\hbar}{8} \right) \sin \omega_0 t \quad \text{e} \quad \langle p^2 \rangle = \frac{3}{4} m\omega_0\hbar$$

- d) Mostre que a relação entre as incertezas Δx e Δp pode ser expressa como

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{3}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \omega_0 t\right) \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \omega_0 t\right)} \right]$$

- e) Esboce o gráfico da relação $\Delta x \Delta p$ indicando os pontos máximos e mínimos. $(\pi/4, 1,125 \times \hbar/2)$ e $(\pi/2, 1,061 \times \hbar/2)$

19. Mostre que o espectro de energia de um oscilador harmônico unidimensional de carga elétrica q , massa m e frequência natural ω_0 , sob a ação de um campo elétrico uniforme E é dado por

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 - \frac{q^2}{2m\omega_0} E^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Ou seja, os níveis de energia são apenas deslocados de um valor constante. Esse comportamento análogo ao deslocamento dos níveis de energia de um átomo em um campo magnético (efeito Zeeman) é chamado de efeito Stark.

20. Se um oscilador harmônico encontra-se em um de seus autoestados de energia, mostre que os valores médios da posição e do *momentum* são nulos.

21. Com base no teorema do virial,

$$2 \langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

onde T é a energia cinética e V a energia potencial, mostre que a relação entre as incertezas Δx e Δp para um oscilador harmônico é dada por

$$\Delta x \Delta p = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \hbar$$

22. A energia potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

descreve um corpo elástico que pode ser estendido, mas não comprimido.

- a) Esboce as autofunções de energia que representam o estado fundamental e o primeiro estado excitado.
- b) Determine as autofunções normalizadas e as energias do estado fundamental e do primeiro estado excitado.