Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Instituto de Física Armando Dias Tavares (IFADT)

Departamento de Física Nuclear e Altas Energias (DFNAE)

Física Estatística

Lista de Exercícios - 02

(9 de maio de 2018)

1. O que é um gás degenerado?
2. A densidade de elétrons móveis em um semicondutor é da ordem de 10^{17} cm^{-3}.

   Por que esses elétrons se comportam como um gás não degenerado à temperatura ambiente?
3. O que é *ensemble* canônico?
4. Mostre que um gás ideal clássico em equilíbrio térmico obedece ao princípio de equipartição de energia.
5. Um cristal é constituído de 10^{23} átomos. Em equilíbrio térmico à temperatura de 1 K, e sob a ação de um campo magnético, os átomos se comportam como subsistemas idênticos, independentes e localizados, cada qual associado a três níveis de energia, $E_1 = 0$ J, $E_2 = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J e $E_3 = 2{,}76 \times 10^{-23}$ J. Determine:
   a) a função de partição do cristal;
   b) a energia interna do cristal;
   c) a probabilidade de ocupação dos níveis de energia E_1, E_2 e E_3.
6. Os átomos de um cristal em equilíbrio térmico à temperatura de 5 K (sob a ação de um campo magnético) têm espectro de energia não degenerado, $E_1 = 0$ J, $E_2 = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J e $E_3 = 4{,}14 \times 10^{-23}$ J e $E_4 = 8{,}28 \times 10^{-23}$ J. Qual a probabilidade de ocupação do nível de energia E_1.
7. Os átomos de um cristal em equilíbrio térmico à temperatura de 100 K (sob a ação de um campo magnético) têm espectro de energia, $E_1 = 0$ J, $E_2 = 138 \times 10^{-23}$ J e $E_3 = 276 \times 10^{-23}$ J, e os respectivos graus de degenerescência são 1 , 3 e 5. Determine:
   a) a população relativa de cada nível de energia;
   b) a energia média por átomo.
8. Seja um cristal com N átomos de *spin* 1 em equilíbrio térmico à temperatura T, e na presença de um campo magnético B.
   a) Mostre que a magnetização é dada por

   $$M = N\mu \frac{2\sinh x}{(1 + 2\cosh x)} \qquad \left(x = \frac{\mu B}{kT} \right)$$

   b) Quais os limites da magnetização para $T \to 0$ e $T \to \infty$?
9. Seja um sistema de N *spins* 1/2 independentes e localizados, e em equilíbrio térmico à temperatura T, na presença de um campo magnético B.
   a) Determine a entropia do sistema.
   b) Quais os limites da entropia para $T \to 0$ e $T \to \infty$?
   c) Represente graficamente o comportamento da entropia em termos da temperatura.
   d) A partir da entropia, determine a capacidade térmica (C_B) para $B =$ constante.

e) Quais os limites de C_B para $T \to 0$ e $T \to \infty$?
f) Mostre que o máximo de C_B ocorre para $a = \frac{\mu_B B}{kT} = 1.2$.
g) Represente graficamente o comportamento de C_B em termos da temperatura.

10. A energia de um dipolo elétrico $\vec{p}$ em um campo elétrico $\vec{E}$ é dada por

$$\epsilon = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{p}$ e $\vec{E}$.

Considerando um dielétrico linear, isotrópico e homogêneo sob a ação de um campo elétrico $E = |\vec{E}| \simeq 10^3$ V/cm como um sistema de N dipolos elétricos idênticos, independentes e localizados, mostre que a susceptibilidade χ do dielétrico em equilíbrio térmico à temperatura ambiente obedece à lei de Curie

$$\chi = \frac{C}{T} \qquad \left(C = \frac{Np^2}{3k}\right)$$

11. A função de partição (Z) de um gás ultra-relativístico constituído por N partículas em um volume V, e em equilíbrio térmico à temperatura T, é proporcional a

$$\left(VT^3\right)^N$$

Mostre que a flutuação relativa da energia do gás é igual a

$$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \frac{1}{\sqrt{3N}}$$

12.) Em alguns metais as propriedades paramagnéticas resultam da interação de um campo magnético ($\vec{B}$) com os momentos dipolares orbitais e de spin. Nesses casos, o espectro de energia de cada átomo é dado por

$$\varepsilon_j = g\mu_B B m_j \qquad (m_j = -J, -J+1, ..., J-1, J)$$

onde g é o chamado *fator de Landé*, que depende dos números quânticos orbitais e de spin, e $\mu_B \approx 10^{-20}$ erg/G é o chamado magneton de Bohr.

Considerando que os átomos são independentes e localizados na rede de cristalina do metal, mostre que a função de partição z associada a cada átomo é dada por

$$z = \frac{\sinh\left[\left(\frac{J+1/2}{J}\right)a\right]}{\sinh\frac{a}{2J}}$$

e, que a magnetização média é dada por

$$M = Ng\mu_B J B_J(a)$$

onde

$$B_J(a) = \left(\frac{J+1/2}{J}\right)\coth\left[\left(\frac{J+1/2}{J}\right)a\right] - \frac{1}{2J}\coth\frac{a}{2J}$$

é a chamada função de Brillouin, cujos limites são

$$\begin{cases} B_{1/2}(a) = \tanh a \\ \\ B_{J\to\infty}(a) = \mathcal{L}(a) \qquad \text{(função de Langevin)} \end{cases}$$

13. O modelo de Einstein

a) Determine a capacidade térmica a volume constante de $3N$ osciladores harmônicos idênticos, independentes e localizados, em equilíbrio térmico à temperatura T.
b) Quais os limites da capacidade térmica para $T \to 0$ e $T \to \infty$?
c) Represente graficamente o comportamento da capacidade térmica em termos da temperatura.