



caruso & oguri

O principal objetivo do texto é apresentar a transição da Termodinâmica para a Mecânica Estatística a alunos de graduação, tanto dos cursos de Física como de áreas afins, como as Engenharias e a Química.

As investigações de Clausius e Maxwell, ao final do século XIX, sobre o comportamento de sistemas macroscópicos compostos por moléculas ou partículas – os gases moleculares – e, posteriormente, os trabalhos de Boltzmann e Gibbs, sem hipóteses ou modelos teóricos explícitos sobre as interações entre as partículas constituintes de um sistema, originaram uma descrição estatística dos sistemas gasosos constituídos por muitas partículas: a Mecânica Estatística.

Após uma breve revisão de alguns elementos da teoria de probabilidades e dos principais conceitos e leis da Termodinâmica, ressaltando-se aqueles como entropia, calor específico e potencial químico, mostra-se o limite que se pode alcançar, aliando-se a Termodinâmica à hipótese atômica da matéria e ao comportamento quântico das partículas.

Depois dos três primeiros capítulos introdutórios, a partir da definição de entropia de Boltzmann, são deduzidas as distribuições especiais de Maxwell-Boltzmann, Planck, Fermi-Dirac e Bose-Einstein e, então, as propriedades dos gases ideais são formalmente estabelecidas.

Utilizando-se do método dos ensembles de Gibbs, são apresentados, ainda, os principais fenômenos e sistemas abordados nos cursos de graduação como o paramagnetismo em cristais e a radiação de corpo negro, além dos sistemas degenerados de férmions relativísticos em uma estrela anã branca e os bósons massivos não relativísticos na condensação de Bose-Einstein.

O livro se encerra com uma breve introdução aos métodos avançados de abordagem da Mecânica Estatística, como os de Jaynes e de Neumann-Landau.

Os autores

mecânica estatística de sistemas em equilíbrio

caruso & oguri



mecânica estatística de sistemas em equilíbrio

Sumário

Prefácio	vii
1 Introdução	1
1.1 Necessidade e acaso	1
1.2 O papel da Teoria Cinética dos Gases	3
1.3 A Termodinâmica e os processos reversíveis e irreversíveis	5
1.4 A Mecânica Quântica e o conceito de energia	7
2 Elementos da teoria de probabilidades	11
2.1 Probabilidades <i>a priori</i>	12
2.2 Probabilidades <i>a posteriori</i> e distribuições	14
2.3 Exercícios	22
3 Elementos de Termodinâmica	25
3.1 Variáveis e equações de estado	25
3.1.1 Equação de Clapeyron	27
3.1.2 A lei de Curie	27
3.1.3 Trabalho magnético	28
3.1.4 Propriedades extensivas e intensivas	31
3.2 1ª e 2ª leis da Termodinâmica para sistemas fechados	32
3.3 Entropia e irreversibilidade	36
3.3.1 Entropia em transições de fase	37
3.3.2 Entropia em uma expansão livre	38
3.4 Calores específicos dos sólidos e dos gases	40
3.5 Potenciais químicos e termodinâmicos	45
3.6 3ª lei da Termodinâmica	48
3.7 Entropia e potencial químico de um gás ideal monoatômico	49
3.8 Entropia da radiação de corpo negro	56
3.9 Exercícios	60

4	Gases ideais não degenerados e degenerados	63
4.1	Limites dos gases ideais	63
4.2	Densidade de estados	64
4.3	Gases ideais não degenerados	67
4.4	Temperaturas de degenerescência	68
4.5	Gases ideais degenerados	70
4.5.1	Férmions não relativísticos fortemente degenerados	71
4.5.2	Bósons não massivos fortemente degenerados	72
4.5.3	Calor específico dos sólidos cristalinos	74
4.5.4	Gás de fótons	76
4.5.5	Bósons massivos não relativísticos fortemente degenerados	77
4.5.6	Condensação de Bose-Einstein	78
4.6	Exercícios	82
5	Método combinatorial de Boltzmann	85
5.1	Conceito estatístico de entropia e temperatura	88
5.2	Entropia e 2ª lei da Termodinâmica	90
5.3	Gás ideal não degenerado	91
5.4	Gás de <i>spins</i> 1/2	93
5.5	Temperaturas negativas	97
5.6	Princípio da máxima entropia	99
5.7	Distribuições de Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac, Bose-Einstein e Planck	102
5.8	Gases ideais degenerados de férmions não relativísticos	109
5.9	Gases ideais degenerados de bósons massivos não relativísticos	113
5.9.1	Gás de bósons fortemente degenerado	115
5.9.2	Gás de bósons levemente degenerado	116
5.10	Exercícios	119
6	Método dos <i>ensembles</i> de Gibbs	121
6.1	Distribuição microcanônica	124
6.2	Distribuição canônica	125
6.3	Propriedades da distribuição canônica	127
6.3.1	Função de partição canônica	129
6.3.2	Aproximação clássica	130
6.3.3	Analogia termodinâmica de Gibbs	132
6.3.4	Funções termodinâmicas	133
6.4	Paramagnetismo em um cristal	135
6.4.1	Calor específico magnético	138
6.4.2	Efeito Schottky	139
6.5	Polarização de dielétricos polares	140
6.6	Sólidos cristalinos	144
6.6.1	Problema do calor específico	145
6.6.2	Modelo de Einstein	146

6.6.3	Modelo de Debye	148
6.6.4	Conceito de fônon e distribuição de Planck	153
6.6.5	Calor específico dos metais	156
6.6.6	Conceito de quase-partícula	157
6.7	Radiação de corpo negro e distribuição de Planck	160
6.8	Gases ideais moleculares	164
6.8.1	Função de partição translacional	164
6.8.2	Função de partição vibracional para moléculas diatômicas	167
6.8.3	Função de partição rotacional para moléculas diatômicas	168
6.8.3.1	Moléculas diatômicas heteronucleares	169
6.8.3.2	Moléculas diatômicas homonucleares	171
6.8.3.3	Moléculas poliatômicas	174
6.9	Flutuações e conexão entre as distribuições canônica e microcanônica	175
6.10	Distribuição gran-canônica	178
6.10.1	Analogia termodinâmica de Gibbs	182
6.10.2	Funções termodinâmicas	183
6.10.3	Flutuações e conexão entre as distribuições gran-canônica e canônica	184
6.10.4	Distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein	185
6.11	Estrelas anãs brancas	188
6.12	Exercícios	192
6.13	Outros métodos	197
6.13.1	Método de Jaynes	197
6.13.2	Formulação de von Neumann-Landau	201
A	Tópicos sobre Termodinâmica	209
A.1	Teorema de Carnot e desigualdade de Clausius	209
A.2	Potenciais termodinâmicos	214
B	Funções especiais	217
B.1	Função gama	217
B.2	Fórmula de Stirling	219
B.3	Volume da esfera em D dimensões	221
B.4	Função zeta de Riemann	222
B.5	Fórmula de Euler-Maclaurin	226
C	Densidade de estados	231
C.1	Densidade de estados de Rayleigh	231
D	Método de Darwin-Fowler	235
D.1	Método de Darwin-Fowler para gases degenerados	235
	Referências Bibliográficas	239

2.3 Exercícios

2.3.1. A tabela a seguir mostra os resultados de 120 000 lançamentos de um dado. Nessa tabela, n_i representa a frequência de ocorrências da respectiva face (i).

face (i)	frequência (n_i)	P_i
1	20 108	n_1/N
2	19 854	n_2/N
3	19 859	n_3/N
4	20 149	n_4/N
5	20 036	n_5/N
6	19 994	n_6/N

$$P_i = 1/6 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

Determine:

$$N = \sum_{i=1}^6 n_i = 120.000$$

- a) o valor médio dos resultados; (Resposta: 3,501) $\bar{x} = \sum_{i=1}^6 i \cdot P_i$
 b) o desvio padrão dos resultados; (1,708) $\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^6 i^2 \cdot P_i \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}$
 c) os valores esperados desses parâmetros. (3,5 e 1,71) $\mu = \sum_{i=1}^6 i \cdot P_i$ $\langle x^2 \rangle = \sum_{i=1}^6 i^2 \cdot P_i$
 $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

2.3.2. As posições de uma partícula confinada ao longo de uma reta na direção x , entre os pontos $x = 0$ e $x = a$, distribuem-se segundo uma densidade de probabilidade proporcional a $\sin^2 \frac{2\pi}{a} x$.

- a) Normalize a densidade de probabilidade de presença da partícula. $\left(\frac{2}{a}\right)$
 b) Determine o valor médio e o desvio padrão (incerteza) associados à posição da partícula. $\left(\frac{a}{2} \text{ e } \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{6}{\pi^2}}\right)$

2.3.3. As posições de uma partícula ao longo de uma direção x obedecem a seguinte distribuição uniforme (ρ):

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

2.3.2. $\rho(x) = A \sin^2 \frac{2\pi}{a} x \quad (0 \leq x \leq a)$

a) $\int_0^a \rho(x) dx = A \int_0^a \sin^2 \frac{2\pi}{a} x dx = 1 = \frac{A}{2} \left[\int_0^a dx - \int_0^a \cos \frac{4\pi}{a} x dx \right] \Rightarrow A = \frac{2}{a}$

b) $\langle x \rangle = \int_0^a x \rho(x) dx = A \int_0^a x \sin^2 \frac{2\pi}{a} x dx = \frac{A}{2} \left[\int_0^a x dx - \int_0^a x \cos \frac{4\pi}{a} x dx \right]$
 $= \frac{A}{2} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2\pi} x \sin \frac{4\pi}{a} x + \frac{a}{4\pi} \cos \frac{4\pi}{a} x \right]_0^a = \frac{a}{2}$

$\langle x^2 \rangle = \int_0^a x^2 \rho(x) dx = A \int_0^a x^2 \sin^2 \frac{2\pi}{a} x dx = \frac{A}{2} \left[\int_0^a x^2 dx - \int_0^a x^2 \cos \frac{4\pi}{a} x dx \right]$
 $= \frac{1}{a} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2\pi^2} \right) = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2\pi^2}$

$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2\pi^2} - \frac{a^2}{4} = a^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2\pi^2} \right)$
 $\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{12}} \sqrt{1 + \frac{6}{\pi^2}}$

2.3.3. $\rho(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1 \Rightarrow A = 1$

a) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{12}}$

2.3.4. $\rho(v_i) = A e^{-\frac{1}{2} m v_i^2 / kT} \quad (i=1, 2, 3) \quad (-\infty < v_i < \infty)$

a) $\langle v_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_i \rho(v_i) dv_i = 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_i) dv_i = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} m v_i^2 / kT} dv_i = 1 = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 v_i^2} dv_i \quad (\alpha = \frac{m}{2kT})$
 $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$

c) $\langle \epsilon_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v_1^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m v_2^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m v_3^2 \right\rangle = \frac{3}{2} m \langle v_i^2 \rangle$

$\langle v_i^2 \rangle = A \int_{-\infty}^{\infty} v_i^2 \rho(v_i) dv_i = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_i^2 e^{-\alpha^2 v_i^2} dv_i = \frac{\alpha^{-1}}{2} = \frac{1}{2\alpha}$

$\langle \epsilon_c \rangle = \frac{3}{2} \frac{m}{2\alpha} = \frac{3}{2} kT$

(2.3.5.)

$$a) \begin{cases} \rho(z) = a e^{-mgz/kT} = a e^{-\alpha z} \quad (\alpha = mg/kT) \quad (0 \leq z < \infty) \\ E_p = mgz \Rightarrow \langle E_p \rangle = mg \langle z \rangle \end{cases}$$

normalization $\int_0^\infty \rho(z) dz = a \int_0^\infty e^{-\alpha z} dz = 1 \Rightarrow a = \alpha = \frac{mg}{kT}$

$$\langle z \rangle = \int_0^\infty z \rho(z) dz = a \int_0^\infty z e^{-\alpha z} dz = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{kT}{mg} \Rightarrow \boxed{\langle E_p \rangle = kT}$$

$$b) \langle z^2 \rangle = \int_0^\infty z^2 \rho(z) dz = a \int_0^\infty z^2 e^{-\alpha z} dz = 2\alpha^{-2}$$

$$(\Delta z)^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = 2\alpha^{-2} - \alpha^{-2} = \alpha^{-2} \Rightarrow \boxed{\Delta z = \frac{1}{\alpha} = \frac{kT}{mg}}$$

(2.3.6.)

$$\begin{cases} \rho(x) = A e^{-\epsilon_p/kT} \quad (-\infty < x < \infty) \\ \epsilon_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \Rightarrow \langle \epsilon_p \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle \end{cases}$$

normalization $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{m \omega_0^2}{kT} x^2} dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2\pi kT}}$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{A}{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{\alpha}{2} x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \Rightarrow \epsilon_p = kT \alpha \frac{1}{2\alpha} = \boxed{\frac{kT}{2}}$$

(2.3.7.)

$$\rho(v) = A v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m v^2}{kT}} \quad (0 \leq v < \infty)$$

$$a) \frac{d\rho}{dv} = (2v - 2\alpha v^3) e^{-\alpha v^2} = 0 \Rightarrow v_{\text{mod}} = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$b) \int_0^\infty \rho(v) dv = A \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha^{3/4} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/4}$$

$$c) \langle v \rangle = \int_0^\infty v \rho(v) dv = A \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi} \alpha} = 2 \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$d) \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \rho(v) dv = A \int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{3}{2\alpha} = \boxed{\frac{3kT}{m}}$$

3.9 Exercícios

3.9.1. Estime a variação da entropia de 1 mol de átomos de prata ao ser aquecido de 0°C a 30°C ($c_v = 6,09 \text{ cal.mol}^{-1}.\text{°C}^{-1}$) (0,635 cal/K).

3.9.2. Um corpo de capacidade térmica a pressão constante (C_p) e temperatura T_i é colocado em contato com uma fonte térmica à temperatura T_f ($T_f \neq T_i$). Determine a variação total da entropia do sistema (corpo + fonte), e mostre que ela é positiva.

3.9.3. Um quilograma de água ($c_p = 4,18 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$) a 0°C é colocado em contato com uma fonte térmica a temperatura igual a 100°C. Quando a água atingir a temperatura da fonte, determine:

- a) a variação da entropia da água; (1304 J/K)
- b) a variação da entropia do sistema (água + fonte); (184 J/K)
- c) uma maneira pela qual a variação da entropia do sistema seja nula.

3.9.4. Explique como os pesos atômicos foram corrigidos com a lei de Dulong-Petit.

3.9.5. O calor específico molar (c) do ouro a baixas temperaturas ($T < 10 \text{ K}$) varia com a temperatura segundo

$$TdS = c dT \text{ (1 mol)} \Rightarrow \Delta S = \int c \frac{dT}{T} = \int (aT^3 + b) dT = \frac{aT^3}{3} + bT$$

$c = aT^3 + bT$

(a e b são constantes)

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{c}{T} dT = \int_{T_i}^{T_f} \left(\frac{aT^2}{3} + \frac{b}{T} \right) dT = \left[\frac{aT^3}{9} + b \ln T \right]_{T_i}^{T_f}$$

Determine a variação da entropia de 1 mol de átomos de ouro, em função da temperatura. ($\Delta S_{(1 \text{ mol})} = aT^3/3 + bT$)

3.9.6. Em baixas temperaturas, o calor específico de um sólido cristalino não metálico varia com a temperatura segundo

$$c = aT^3$$

(a é constante)

Dois sólidos cristalinos não metálicos de mesmo material mesma massa (m), inicialmente a temperaturas de 10 K e 20 K, são colocados em contato térmico, mas isolados de outros corpos. Em relação a esses dois sólidos, determine:

- a) a temperatura final; (17,1 K)
- b) a variação de entropia. (333,5 mJ/K)

3.9.1.

$c_v = 6.09 \text{ cal/mol}^\circ\text{C}$

$T_1 = 0^\circ\text{C} \rightarrow T_2 = 30^\circ\text{C}$

(processo isométrico)

(1 mol de prata)

$dQ = c_v dT = T dS \Rightarrow \Delta S = c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$

$\Delta S = 6.09 \ln \left(\frac{303.15}{273.15} \right) = 0.635 \text{ cal/K}$

3.9.2.

corpo

T_i

fonte

T_f

(processo isobárico)

$\left\{ \begin{aligned} \Delta S_c &= C_p \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_f}{T_i} \\ \Delta S_F &= \frac{Q_F}{T_F} = C_p \frac{(T_i - T_F)}{T_F} \quad (Q_F = -Q_c) \end{aligned} \right.$

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_F = C_p \left(\frac{T_i}{T_f} - 1 + \ln \frac{T_f}{T_i} \right) = C_p \left(\frac{T_i}{T_f} - 1 - \ln \frac{T_i}{T_f} \right)$$

$\left\{ \begin{aligned} T_f > T_i &\Rightarrow -1 < x \leq 0 \\ T_f < T_i &\Rightarrow x > 0 \\ &-1 < x < \infty \end{aligned} \right.$

$\Delta S \sim f(x) = x - \ln(1+x)$

$\left\{ \begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0) = 0 \text{ (mínimo)} \\ f'(0) &= 0 \Rightarrow f''(0) > 0 \text{ (mínimo)} \end{aligned} \right.$

3.9.3.

$m_{\text{água}} = 10^3 \text{ g}$

$T_i = 0^\circ\text{C}$

$T_f = 100^\circ\text{C}$

$c_p^{\text{água}} = 4.18 \text{ J/g}^\circ\text{C}$

a)

$\Delta S_{\text{água}} = m_{\text{água}} c_p^{\text{água}} \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = 10^3 \times 4.18 \times \ln \left(\frac{373.15}{273.15} \right) = 1304 \text{ J/K}$

b)

$\Delta S_F = \frac{Q_F}{T_F} = - \frac{Q_{\text{água}}}{T_F} = - \frac{m_{\text{água}} c_p^{\text{água}} \Delta T_{\text{água}}}{T_F} = - \frac{10^3 \times 4.18 \times 10^2}{373.15} = -1120 \text{ J/K}$

$\Delta S = \Delta S_{\text{água}} + \Delta S_F = 1304 - 1120 = 184 \text{ J/K}$

3.9.4.

(cal/m específico)

$c = \frac{C}{m}$

$C \rightarrow \text{capacidade térmica}$

$m \rightarrow \text{massa}$

$\Rightarrow \frac{C_{\text{mol}}}{c} = \frac{m}{n} = \mu$

(massa de um mol em gramas = peso atômico)

(cal/m específico molar)

$c_{\text{molar}} = \frac{C}{n}$

$n \rightarrow \text{no de mols}$

$c_{\text{molar}} \sim 6 \text{ cal/mol}^\circ\text{C}$

(metais)

3.9.6.

$$T_A = 10\text{ K} \quad T_B = 20\text{ K}$$

$$c = aT^3 \Rightarrow \int_{T_A}^{T_F} T^3 dT + \int_{T_B}^{T_F} T^3 dT = 0 \Rightarrow (T_F^4 - T_A^4) + (T_F^4 - T_B^4) = 0$$

$$T_F^4 = \frac{T_A^4 + T_B^4}{2} = \frac{10^4 + 2^4}{2} = 10^4 \left(\frac{17}{2}\right) \Rightarrow T_F = 10 \left(\frac{17}{2}\right)^{1/4} = 17.1\text{ K}$$

$$b) \Delta S = m \int_{T_A}^{T_F} \frac{c dT}{T} = ma \int_{T_A}^{T_F} T^2 dT = \frac{ma}{3} (T_F^3 - T_A^3)$$

$$\begin{cases} \Delta S_A = \frac{ma}{3} (17.1^3 - 10^3) = ma \cdot 1333.4 \text{ (J/K)} \\ \Delta S_B = \frac{ma}{3} (17.1^3 - 20^3) = -ma \cdot 999.93 \text{ (J/K)} \end{cases} \Rightarrow \Delta S = 333.5 ma \text{ (J/K)}$$

3.9.7.

$$T_A = 100\text{ K} \quad T_B = 200\text{ K}$$

$$c = aT \Rightarrow \int_{T_A}^{T_F} T dT + \int_{T_B}^{T_F} T dT = 0$$

$$a) (T_F^2 - T_A^2) + (T_F^2 - T_B^2) = 0 \Rightarrow T_F^2 = \frac{T_A^2 + T_B^2}{2} = \frac{100^2 + 200^2}{2} = 15810 \Rightarrow T_F = 100\sqrt{\frac{5}{2}} = 158.1\text{ K}$$

$$b) \Delta S = \int_{T_A}^{T_F} \frac{c dT}{T} = a \int_{T_A}^{T_F} dT = a(T_F - T_A)$$

$$\begin{cases} \Delta S_A = a(T_F - T_A) = a \cdot 58.1 \text{ (J/K)} \\ \Delta S_B = a(T_F - T_B) = -a \cdot 41.5 \text{ (J/K)} \end{cases} \Rightarrow \Delta S = 16.2 a \text{ (J/K)}$$

3.9. EXERCÍCIOS

9.1

3.9.7. Dois sólidos homogêneos de mesmo material e mesmo volume, a temperaturas iniciais de 100 K e de 200 K, são colocados em contato, mas isolados da vizinhança, até atingirem o equilíbrio térmico. A capacidade térmica dos corpos varia linearmente com a temperatura segundo

$$C = aT \quad (a \text{ é constante})$$

Estime:

a) a temperatura final dos corpos; (158,1 K)

b) a variação de entropia de ambos. (16,2 a J/K)

3.9.8. A partir da fórmula de Sackur-Tetrode,

$$S = Nk \ln \left[\frac{3}{2} \ln T + \ln \frac{V}{N} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) \right]$$

mostre que:

$$\frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right) \frac{U}{N}$$

a) a entropia pode ser escrita como

$$S = Nk \ln \left[\left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} e^{5/2} \right] \quad \text{sendo} \quad T_c = \left(\frac{h^2}{2\pi mk} \right) \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

b) o potencial químico (μ) de um gás ideal molecular monoatômico não degenerado é dado por

$$\mu = -\frac{3}{2} kT \ln \frac{T}{T_c}$$

$$S = Nk \left[\frac{3}{2} \ln \frac{U}{N} + \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right) + \frac{5}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V} = k \left[\frac{3}{2} \ln \frac{U}{N} + \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right) + \frac{5}{2} \right] + Nk \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \right) \\ &= \frac{3}{2} k \ln \left(\frac{2\pi mk}{h^2} \right) \left(\frac{V}{N} \right)^{2/3} T \end{aligned}$$

$$\mu = -\frac{3}{2} k \ln \frac{T}{T_c}$$

Exercícios

1. A densidade de elétrons móveis em um semiconductor é da ordem de 10^{23} cm^{-3} .

Explique por que esses elétrons se comportam como um gás não degenerado na temperatura ambiente.

2. Defina um gás degenerado.

3. Explique o que é nível de Fermi.

4. A densidade de elétrons móveis em um semiconductor é da ordem de 10^{23} cm^{-3} .

Explique por que esses elétrons se comportam como um gás não degenerado na temperatura ambiente.

5. Estime a temperatura e o nível de Fermi para:

a) elétrons em um metal ($N/V \approx 2 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$);

b) prótons em um núcleo pesado ($N/V \approx 0,55 \times 10^{44} \text{ m}^{-3}$).

6. Mostre que a pressão de um gás ideal de férmions não relativísticos em estado fundamental ($T = 0 \text{ K}$), também denominada pressão de Fermi, é dada por

$$P_F = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \epsilon_F \quad (\epsilon_F = \text{nível de Fermi})$$

7. Estime o nível de Fermi, em eV, e a pressão, em atm, de um gás ideal de férmions não relativísticos em seu estado fundamental, constituído por cerca de 10^{23} elétrons confinados em um volume de 1 cm^3 .

8. A energia média de um gás de férmions em seu estado fundamental (0 K) é dada por

$$U_0 = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

9. Estime o nível de Fermi do gás.

10. Estime o nível de Fermi, em eV, e a pressão, em atm, desse gás, se o mesmo é constituído por cerca de 10^{23} elétrons confinados em um condutor de volume 1 cm^3 .

(-10 eV, $5 \times 10^5 \text{ atm}$)

4.6.9. Um efeito magnético, denominado paramagnetismo de Pauli, decorre dos elétrons de condução de um metal. Para temperaturas bem abaixo da temperatura de Fermi, ao submeter o metal a um campo magnético $\vec{B}$, apenas alguns elétrons são excitados ligeiramente acima do nível de Fermi (ϵ_F), com energias da ordem de $\epsilon_F + \mu_B B$ tal que $\mu_B B \ll \epsilon_F$, em que μ_B é o chamado magnéton de Bohr.

Mostre que, nesse caso, o número de elétrons excitados (N_{exc}) pode ser estimado por

$$N_{\text{exc}} = \frac{3}{2} N \frac{\mu_B B}{\epsilon_F}$$

e que a chamada susceptibilidade de Pauli, independente da temperatura, é dada por

$$\chi_{\text{Pauli}} = \frac{3}{2} N \frac{\mu_B^2}{\epsilon_F}$$

$$g(\epsilon) = \frac{3}{2} N \frac{\epsilon^{1/2}}{\epsilon_F^{3/2}} \Rightarrow N_{\text{exc}} = \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \mu_B B} \frac{3}{2} N \frac{\epsilon^{1/2}}{\epsilon_F^{3/2}} d\epsilon = \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \left[\epsilon^{3/2} \right]_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \mu_B B}$$

$$N_{\text{exc}} = \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \left[(\epsilon_F + \mu_B B)^{3/2} - \epsilon_F^{3/2} \right] = N \left[\left(1 + \frac{\mu_B B}{\epsilon_F} \right)^{3/2} - 1 \right] \approx N \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\mu_B B}{\epsilon_F} - 1 \right) = \frac{3}{2} N \frac{\mu_B B}{\epsilon_F} \quad (\mu_B B \ll \epsilon_F)$$

$$M = N_{\text{exc}} \mu_B = \left(\frac{3}{2} N \frac{\mu_B^2}{\epsilon_F} \right) B$$

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \frac{3}{2} N \frac{1}{\epsilon_F^{3/2}} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{3}{2} N \frac{1}{\epsilon_F^{3/2}} \left[\frac{2}{5} \epsilon^{5/2} \right]_0^{\epsilon_F} = \frac{3}{5} N \epsilon_F = \frac{3}{5} N \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$$

$$P_F = P_0 = - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S=0} = \frac{3}{5} N \frac{2}{3} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \frac{1}{V} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \epsilon_F$$

$$- \frac{\partial U_F}{\partial V} \approx \frac{2}{3} V^{-2/3} T_F$$

$$4.6.7 \quad \frac{N}{V} = 10^{29} \text{ m}^{-3} \quad \epsilon_F = k T_F = \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left(\frac{h^2}{2m} \right) = 1,274 \times 10^{-18} \text{ J} = 7,96 \text{ eV} \approx 10 \text{ eV}$$

$$P_F = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \epsilon_F = \frac{2 \times 10^{29}}{5} \times 1,274 \times 10^{-18} = 5,096 \times 10^{10} \text{ Pa} = 5,1 \times 10^5 \text{ atm}$$

$$5.10.1. \quad S = N k \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{5/2} \right] = k \ln \underbrace{\left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{5/2} \right]^N}_W$$

$$\text{CNTP} \Rightarrow \begin{cases} N = 6.022 \times 10^{23} \\ \frac{V}{N} = \frac{22.4 \times 10^{-3}}{6.022 \times 10^{23}} = 3.72 \times 10^{-26} \text{ m}^3 \\ \frac{2\pi m k T}{h^2} = \frac{2\pi \times 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 2.73 \times 10^2}{(6.626)^2 \times 10^{-68}} = 3.6 \times 10^{20} \end{cases}$$

$$W = \left[3.72 \times 10^{-26} \times \frac{(3.6)^{3/2}}{4.83} \frac{(10^{20})^{3/2}}{10^{30}} \frac{e^{5/2}}{12.18} \right]^N = \left(3 \times 10^6 \right)^{6.022 \times 10^{23}} \\ = 10^{3.6 \times 10^{24}} \sim 10^{10^{25}}$$

$$5.10.2. \quad \Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{4.14 \times 10^{-15}}{\frac{300}{3 \times 10^2}} = 1.38 \times 10^{-21} \text{ J/K}$$

$$\begin{cases} S = k \ln W \\ S_0 = k \ln W_0 \end{cases} \Rightarrow \Delta S = k \ln \frac{W}{W_0} \Rightarrow \frac{W}{W_0} = e^{\Delta S/k} = e^{100} = 2.73 \times 10^{43} \\ \frac{\Delta W}{W_0} = \frac{W - W_0}{W_0} = \frac{W}{W_0} - 1 = e^{\Delta S/k} - 1 \approx e^{100} = 2.73 \times 10^{43} \\ 10 e^{\ln 10} \Rightarrow 10^{43} = e^{43 \ln 10} \approx e^{99} \approx \frac{e^{100}}{e} \Rightarrow e^{100} = 2.73 \times 10^{43}$$

$$5.10.3. \quad \Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{10^{-7}}{31.34} = 3.19 \times 10^{-9} \text{ J/K}$$

$$\frac{W}{W_0} = e^{\Delta S/k} = \frac{3.19 \times 10^{-9}}{e^{1.38 \times 10^{-23}}} = e^{2.3 \times 10^{14}} = (e^{2.3})^{10^{14}} \approx 10^{10^{14}}$$

$$5.10.4. \quad \Delta S = \frac{Q}{T}$$

$$\frac{W}{W_0} = e^{\Delta S/k} \Rightarrow \frac{\Delta S}{k} = \ln \frac{W}{W_0} = \frac{Q}{kT} \Rightarrow Q = kT \ln \frac{W}{W_0}$$

$$Q = 1.38 \times 10^{-23} \times 2.98 \times 10^2 \ln 10^6 = 5.675 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$5.10.6. \quad \langle n(\epsilon) \rangle = \lambda e^{-\epsilon/kT} \quad g(\epsilon) = \frac{3}{2} N \frac{\epsilon^{1/2}}{(hT_b)^{3/2}}$$

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) \langle n(\epsilon) \rangle d\epsilon = \frac{3 N \lambda}{2 (hT_b)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon}{(hT)^{3/2} x^{1/2} e^{-x} dx}$$

$$N = \frac{3}{2} N \lambda \left(\frac{T}{T_b} \right)^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \Gamma(3/2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon/kT = x &\Rightarrow d\epsilon = kT dx \\ \epsilon^{1/2} &= x^{1/2} (kT)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{T_b^{3/2}}{\frac{3}{2} \Gamma(3/2)} \frac{1}{T^{3/2}} = \left(\frac{T_b}{T} \right)^{3/2}$$

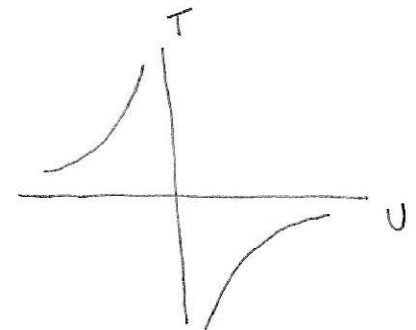
$$T_b = \frac{T_b^{3/2}}{\Gamma(5/2)}$$

$$5.10.5. \quad S = S_0 - C U^2$$

$$\begin{cases} U \rightarrow \text{pos. or neg.} \\ C \rightarrow \text{cte pos.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = -2CU$$

$$T = \left(-\frac{1}{2C} \right) \frac{1}{U}$$



Entropia dos gases degenerados

$$\ln W = \sum_i \left[n_i \ln \left(\frac{g_i}{n_i} \mp 1 \right) \mp g_i \ln \left(1 \mp \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{fermions } (-) \\ \text{bosons } (+) \end{array} \quad \frac{n_i}{g_i} = \langle n_i \rangle$$

$$= \sum_i \left[n_i \ln \left(\frac{1}{\langle n_i \rangle} \mp 1 \right) \mp g_i \ln \left(1 \mp \langle n_i \rangle \right) \right]$$

$$= \sum_i \left[n_i \ln \left(1 \mp \langle n_i \rangle \right) - n_i \ln \langle n_i \rangle \mp g_i \ln \left(1 \mp \langle n_i \rangle \right) \right]$$

$$= \sum_i \left[-n_i \ln \langle n_i \rangle + \underbrace{(n_i \mp g_i)}_{\mp (g_i \mp n_i)} \ln \left(1 \mp \langle n_i \rangle \right) \right]$$

$$\mp (g_i \mp n_i) = \mp g_i (1 \mp \langle n_i \rangle)$$

$$= \sum_i \left[-n_i \ln \langle n_i \rangle \mp g_i (1 \mp \langle n_i \rangle) \ln (1 \mp \langle n_i \rangle) \right]$$

$$= \sum_i g_i \left[-\langle n_i \rangle \ln \langle n_i \rangle \mp (1 \mp \langle n_i \rangle) \ln (1 \mp \langle n_i \rangle) \right]$$

$$\boxed{S = k \sum_i g_i \left[-\langle n_i \rangle \ln \langle n_i \rangle \mp (1 \mp \langle n_i \rangle) \ln (1 \mp \langle n_i \rangle) \right]} \quad \begin{array}{l} \text{FD } (-) \\ \text{BE } (+) \end{array}$$

$T \rightarrow 0$ (baixas temperaturas)

(Introductory Statistical Mechanics for Physicists - D. K. C. Mac Donald)

limite não-degenerado ($\langle n_i \rangle \ll 1$)

$$\ln (1 \mp \langle n_i \rangle) = \mp \langle n_i \rangle \Rightarrow \mp (1 \mp \langle n_i \rangle) \ln (1 \mp \langle n_i \rangle) = \langle n_i \rangle = \frac{n_i}{g_i}$$

$$S_{NS} = -k \sum n_i \ln \langle n_i \rangle + k \sum \frac{n_i}{N} \quad (\text{viol. 3.3 lei})$$

• fermions $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i > \varepsilon_F \Rightarrow \langle n_i \rangle = 0 \\ \varepsilon_i \leq \varepsilon_F \Rightarrow \langle n_i \rangle = 1 \end{array} \right. \Rightarrow S_{FD} = 0$

• bosons $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i > \varepsilon_0 \Rightarrow \langle n_i \rangle = 0 \\ \varepsilon_i = \varepsilon_0 \Rightarrow \langle n_i \rangle \gg 1 \end{array} \right. \Rightarrow S_{BE} = 0$
 $\varepsilon_0 \rightarrow$ nível fundamental

6.12.1. $Z_{gas} \propto Z_{molec}^N \Rightarrow \ln Z_{gas} = N \ln Z_{molec}$

$$Z_{molec} \propto \int e^{-\beta E(p)} d^3p \quad E(p) = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{p_y^2}{2m}} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{p_z^2}{2m}} dp_z$$

$$\propto \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d\xi \right]^3 = \left(\sqrt{\pi} \right)^3 \propto \beta^{-3/2} \Rightarrow \ln Z_{molec} = -\frac{3}{2} \ln \beta$$

$$U = - \frac{\partial \ln Z_{gas}}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln Z_{molec}}{\partial \beta} = \frac{3}{2} N \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2} N k T = 3N \left(\frac{1}{2} k T \right)$$

gas (N particles) $\Rightarrow$ 3N terms quadratic $\Rightarrow \left[\frac{1}{2} k T \right]$ p/cade terms quadratic

6.12.2. $Z_c = Z^N$ $N = 10^{23}$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad T = 1K \Rightarrow \beta = \frac{1}{k} \quad k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$$

$$E_n \begin{cases} E_1 = 0 J \\ E_2 = 1.38 \times 10^{-23} J \\ E_3 = 2.76 \times 10^{-23} J \end{cases}$$

a) $Z = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} + e^{-\beta E_3} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} = 1.503 \Rightarrow Z_c = (1.503)^{10^{23}}$

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -E_1 e^{-\beta E_1} - E_2 e^{-\beta E_2} - E_3 e^{-\beta E_3}$$

b) $U = - \frac{\partial \ln Z_c}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$

$$\frac{U}{N} = \left(\frac{e^{-\beta E_1}}{Z} \right) E_1 + \left(\frac{e^{-\beta E_2}}{Z} \right) E_2 + \left(\frac{e^{-\beta E_3}}{Z} \right) E_3 = \langle E \rangle$$

energy middle for 3 terms

c) $P_1 = \frac{1}{1.503} = 0.665 \quad P_2 = \frac{0.368}{1.503} = 0.245 \quad P_3 = \frac{0.135}{1.503} = 0.09$

$$U = \sum_i \langle n_i \rangle E_i = \langle n_1 \rangle E_1 + \langle n_2 \rangle E_2 + \langle n_3 \rangle E_3$$

$$\frac{U}{N} = \left(\frac{\langle n_1 \rangle}{N} \right) E_1 + \left(\frac{\langle n_2 \rangle}{N} \right) E_2 + \left(\frac{\langle n_3 \rangle}{N} \right) E_3$$

$$U = (N P_1) E_1 + (N P_2) E_2 + (N P_3) E_3 = 10^{23} (0.245 \times 1.38 + 0.09 \times 2.76) \times 10^{-23}$$

$$U = 0.587 J$$

6.12.3. $E_1 = 0 J \quad E_2 = 1.38 \times 10^{-23} J \quad E_3 = 4.14 \times 10^{-23} J \quad E_4 = 8.28 \times 10^{-23} J \quad (T = 5K)$

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = 1 + e^{-1/5} + e^{-3/5} + e^{-6/5} = 1 + \frac{1}{e^{1/5}} + \left(\frac{1}{e^{1/5}} \right)^3 + \left(\frac{1}{e^{1/5}} \right)^6$$

$$= 1 + 0.819 + \frac{(0.819)^3}{0.549} + \frac{(0.819)^6}{0.302} = 2.67 = Z$$

$$P_1 = \frac{e^{-E_1/kT}}{Z} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2.67} = 0.375$$

6.12.4. $E_1 = 0 J \quad g_1 = 1 \quad E_2 = 138 \times 10^{-23} J \quad g_2 = 3 \quad E_3 = 276 \times 10^{-23} J \quad (T = 100K)$

$$Z = 1 + \frac{3e^{-1}}{1.104} + \frac{5e^{-2}}{0.677} = 2.781 = Z$$

a) $P_1 = \frac{1}{2} = 0.36 \quad P_2 = \frac{1.104}{2} = 0.397 \quad P_3 = \frac{0.677}{2} = 0.243$

b) $\langle E \rangle = \frac{0.397 \times 138 \times 10^{-21} + 0.243 \times 276 \times 10^{-21}}{0.548 \times 10^{-21} + 0.671 \times 10^{-21}} = 1.22 \times 10^{-21} J$

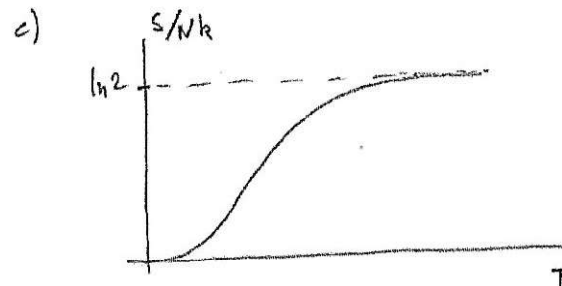
6.12.6. $E < \begin{matrix} \mu_0 B \\ -\mu_0 B \end{matrix} \Rightarrow Z = e^x + e^{-x} = 2 \cosh x \quad x = \frac{\mu_0 B}{kT} = \beta \mu_0 B$

$$\ln Z = \ln 2 + \ln \cosh x \quad \tanh x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

a) $S = Nk \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z) = Nk \ln Z + Nk T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial T} \right)$

$$S = Nk [\ln 2 + \ln \cosh x - x \tanh x]$$

b) $\begin{cases} T \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow S = Nk (\ln 2 + \frac{\ln e^x}{2} - x) = 0 \\ T \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0 \Rightarrow S = Nk (\ln 2 + \frac{\ln 1}{0} - x^2) = Nk \ln 2 \end{cases}$



6.12.6) $S = Nk (\ln 2 + \ln \cosh x - x \tanh x)$ $x = \frac{\mu_B B}{kT}$

d) $C_B = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B = T \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T} \xrightarrow{-x/T}$

$L_0 - x \frac{d}{dx} (\tanh x) = -x \frac{(\cosh^2 x - \sinh^2 x)}{\cosh^2 x} (x Nk)$

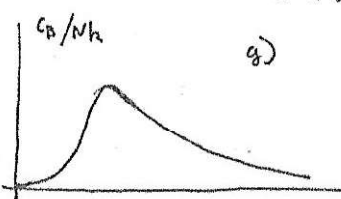
$$C_B = Nk \left(\frac{x}{\cosh^2 x} \right)^2$$

e) $\begin{cases} T \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow C_B = Nk \left(\frac{2x}{e^x} \right)^2 \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0 \Rightarrow C_B = Nk x^2 \rightarrow 0 \end{cases}$

f) $\frac{dC_B}{dx} = Nk \frac{2x \cosh^2 x - 2x^2 \sinh x \cosh x}{\cosh^4 x} = Nk \left[\frac{2x}{\cosh^2 x} - \frac{2x^2 \sinh x}{\cosh^3 x} \right] = 0$

$= 1 - x \tanh x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \tanh x$

$h(x) = \frac{1}{x} - \tanh x$ (pontos de máximo e raiz de $h(x)$)



6.12.8) $E_j = g \mu_B B m_j$ ($m_j = -J, -J+1, -J+2, \dots, J-1, J$) ($2J+1$ valores)

a) $Z = \sum_{m_j=-J}^J e^{-\frac{g \mu_B B}{kT} m_j} = \sum_{m_j=-J}^J e^{\frac{a}{J} m_j} = e^a + e^{a \frac{(J-1)}{J}} + e^{a \frac{(J-2)}{J}} + \dots + e^{-a}$

$Z = e^a + e^a (e^{-a/J}) + e^a (e^{-a/J})^2 + \dots + e^a (e^{-a/J})^{2J} \rightarrow P.G. \text{ (razão } = \frac{e^{-a/J}}{1})$

$\boxed{a = g \mu_B B J}$

$\begin{cases} Z = e^a + n e^a + n^2 e^a + \dots + n^{2J} e^a \\ nZ = n e^a + n^2 e^a + \dots + n^{2J+1} e^a \end{cases}$

$(1-n)Z = e^a (1 - n^{2J+1}) \Rightarrow Z = \frac{e^a (1 - n^{2J+1})}{1 - n}$

$= \frac{e^a (1 - e^{-a/J(2J+1)})}{1 - e^{-a/J}} = \frac{e^a (1 - e^{-a(2J+1)/J})}{1 - e^{-a/J}} = \left(\frac{e^{a/2J}}{e^{a/2J}} \right)$

$Z = \frac{e^{a(J+1/2)/J} - e^{-a(J+1/2)/J}}{e^{a/2J} - e^{-a/2J}} = \boxed{\frac{\sinh a(J+1/2)/J}{\sinh a/2J}}$

b) $\begin{cases} \ln Z = \ln \sinh a(J+1/2)/J - \ln \sinh a/2J \\ \frac{\partial \ln Z}{\partial a} = \frac{(J+1/2)}{J} \coth a(J+1/2)/J - \frac{1}{2J} \coth \frac{a}{2J} = B_J(a) \end{cases}$

$\rightarrow$ função de Brillouin $\boxed{\frac{\partial \ln}{\partial a} = g \mu_B B J}$

$U = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \beta} = \left[\frac{1}{J} g \mu_B J B_J(a) \right] B$

$M \text{ (magnetização)}$

6.12.5. $\epsilon \begin{cases} \mu_B B \\ 0 \\ -\mu_B B \end{cases} \Rightarrow Z = e^2 + 1 + e^{-2} = 1 + 2 \cosh \alpha \quad \alpha = \frac{\mu_B B}{kT} = \beta \mu_B B$

a) $U = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -N \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)$
 $U = - \left(\mu_B \frac{2 \cosh \alpha}{1 + 2 \cosh \alpha} \right) B$

b) $\begin{cases} T \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow \infty \Rightarrow M = N \mu_B (\text{saturado}) \\ T \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow M = \frac{2}{3} \frac{N \mu_B^2 B}{kT} \end{cases}$

6.12.7. $Z \propto (VT^3)^N \Rightarrow \ln Z = 3N \ln T + \ln V + \text{cte}$

$\begin{cases} U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta / \partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \beta} = 3NkT = \frac{3N}{\beta} \\ -\frac{\partial U}{\partial \beta} = 3N/\beta^2 = 3Nk^2 T^2 \end{cases}$

$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \frac{1}{U} \sqrt{-\frac{\partial U}{\partial \beta}} = \sqrt{\frac{-\partial U / \partial \beta}{U^2}} = \sqrt{\frac{3Nk^2 T^2}{9N^2 k^2 T^2}} = \frac{1}{\sqrt{3N}}$

6.12.9. $E_1 = 0 \text{ J}, g_1 = 1 \quad E_2 = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J}, g_2 = 2 \quad E_3 = \frac{4.14 \times 10^{-13}}{2 \times E_2} \text{ J}, g_3 = 3 \quad (T = 10 \text{ K})$

$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} = 1 + 2e^{-1/10} + 3e^{-3/10} = 1 + \frac{2}{e^{0.1}} + \frac{3}{(e^{0.1})^3} = 5.02 \quad (1/e^{0.1} \approx 0.9)$

a) $P_1 = \frac{1}{Z} = \frac{1}{5.02} = 0.199 \quad P_2 = \frac{2}{5.02} = 0.399 \quad P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 0.438$

b) $\langle E \rangle = 0.399 \cdot E_2 + 0.438 \cdot 3 \cdot E_2 = 1.67 E_2 \Rightarrow 2.3 \times 10^{-23} \text{ J}$

6.12.10. Um gás de fótons sempre é fortemente degenerado e também obedece à distrib. de Planck ($C_V \approx 10^7 k V T^3$)

6.12.11. $S = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT = 10^7 k V \int_0^T \frac{1}{T^2} dT = \left(\frac{10^7 V T^3}{3} \right) k \quad \begin{cases} V \approx 10^{-29} \text{ m}^3 \\ T = 2.7 \text{ K} \end{cases}$

$N_g = \frac{10^7 \times 10^{-29}}{3} (2.7)^3 \approx 10^{87}$

6.12.12. $\begin{cases} M = 3 \times 10^{30} \text{ kg} \\ R = 3 \times 10^7 \text{ m} \end{cases} \quad T = 10^7 \text{ K} \quad \begin{cases} m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{cases}$

$\left(\frac{N}{V} \right)_{\text{elétrons}} = \left(\frac{N}{V} \right)_{\text{prótons}} = \frac{M}{m_p} \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{3 \times 10^{30} \times 3}{1.67 \times 10^{-27} \times 4\pi \times 3^3 \times 10^{21}} = \frac{10^2}{1.67 \times 12\pi} \times 10^4$
 $= 1.6 \times 10^{34} \text{ m}^{-3}$

$T_F^{\text{elétrons}} = \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left(\frac{\hbar^2}{2m_e} \right) = \left(\frac{3}{8\pi} \times 1.6 \times 10^{34} \right)^{2/3} \frac{(6.626)^2 \times 10^{-68}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.38 \times 10^{-23}}$
 $= \left(\frac{6}{\pi} \right)^{2/3} \frac{10^{22} \times 10^{-68}}{10^{-54}} \frac{(6.626)^2}{2 \times 1.38 \times 9.11} \approx 2.7 \times 10^8 \text{ K} > T \text{ (degenerado)}$

$\frac{T_F^{\text{prótons}}}{T_F^{\text{elétrons}}} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{9.11 \times 10^{-31}}{1.67 \times 10^{-27}} \approx 0.55 \times 10^{-3} \Rightarrow T_F^{\text{prótons}} = 1.5 \times 10^5 \text{ K} < T \text{ (não degenerado)}$

6.12.13. $P_F^{\text{elétrons}} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \epsilon_F \quad T = 10^6 \text{ K} < T_F \sim 10^{10} \text{ K} \text{ (degenerado)}$

$\begin{cases} \frac{N}{V} = \frac{M/m_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{m_p} \left(\frac{3}{4\pi} \right) \frac{1}{R^3} \\ T_F = \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_e k} \Rightarrow \epsilon_F = kT_F = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{4/3} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{2/3} \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_e R^2} \end{cases}$

$P_F^{\text{elétrons}} = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{5/3} \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_e R^5} \quad P_{\text{prótons}} = \frac{G}{4\pi} \frac{M^2}{R^4}$

equilíbrio: $P_F^{\text{elétrons}} = P_{\text{prótons}} \Rightarrow M^{1/3} = \frac{16\pi^3}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{7/3} \frac{\hbar^2}{G m m_p^{5/3} R}$

$R \sim \frac{\hbar^2}{G m m_p^{5/3}} \frac{1}{M^{1/3}}$

6.12.14. $\begin{cases} C_H \sim N_H k \\ C_Y \sim N_Y k \end{cases} \Rightarrow \frac{C_H}{C_Y} = \frac{N_H}{N_Y} \quad N_Y = 2 \times 10^7 V T^3$

$\frac{C_H}{C_Y} = \left(\frac{N_H}{V} \right) \frac{1}{2 \times 10^7 T^3} \quad \begin{cases} N_H/V = 1 \text{ m}^{-3} \\ T = 2.7 \text{ K} \end{cases}$
 $= 2.5 \times 10^{-9} \sim 10^{-9}$

6.12.15.

$$T_D = \left(6\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \frac{k_B}{k} \rightarrow v_2^{3/2}$$

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{M}{V}\right) \frac{1}{4m_p} = \frac{\rho}{4m_p} = \frac{145}{4 \times 1.67 \times 10^{-27}} = 2.17 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\rho = 0.145 \text{ g/cm}^3 = 145 \text{ kg/m}^3$$

$$v_2 = 240 \text{ m/s}$$

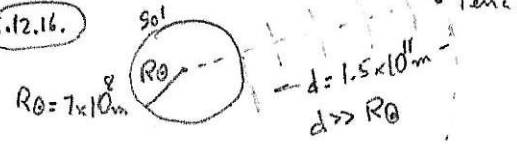
$$T_D = \left(18\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \frac{k_B v_2}{k} = 28.76 \text{ K}$$

(fontamente de gerador) $c = \frac{12\pi^4}{5} Nk \frac{T^3}{T_D^3} = \frac{3\pi^4}{5} \left(\frac{M}{m_p}\right) \frac{T^3}{T_D^3} \Rightarrow \frac{c}{M} = \frac{3\pi^4}{5} \left(\frac{k}{m_p}\right) \frac{T^3}{T_D^3}$

mes 6.20 p8.155

$$\frac{c}{M} \approx 0.0203 T^3 (\text{J/g} \cdot \text{K}) \quad \left(\frac{c}{M}\right)_{\text{exp}} = 0.0204 T^3 (\text{J/g} \cdot \text{K})$$

6.12.16.



$$I = 0.136 \text{ J/s} \cdot \text{cm}^2 = 1360 \text{ J/s} \cdot \text{m}^2$$

intensidade da radiação que chega à Terra

a) $P_0 = P = I (4\pi d^2) = 1360 \times 4\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2 = 3.845 \times 10^{26} \text{ J/s} \sim 4 \times 10^{26} \text{ J/s}$

potência emitida pelo Sol potência que chega à Terra

b) $P_0 = I_0 (4\pi R_0^2) = \sigma T_0^4 4\pi R_0^2 \quad I_0 = \sigma T_0^4$

intensidade da radiação emitida pelo Sol

$$I_0 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ J/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4$$

$$T_0^4 = \frac{P_0}{4\pi \sigma R_0^2} = \frac{3.845 \times 10^{26}}{4\pi \times 5.67 \times 10^{-8} (7 \times 10^8)^2} = 1.1 \times 10^{15} \Rightarrow T_0 = 5760 \text{ K}$$

6.12.17.

$$\begin{cases} E_p = -G M_0^2 / R_0 \\ E = E_p / 2 \end{cases} \Rightarrow E_c = -E_p / 2 = NkT_0$$

$$T_0 = \frac{G M_0^2}{2Nk R_0} = \frac{6.67 \times 10^{-11} (2 \times 10^{30})^2}{2 \times 10^{57} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 7 \times 10^8} = 1.38 \times 10^7 \text{ K} \sim 10^7 \text{ K}$$

$$\begin{cases} G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \\ M_0 = 2 \times 10^{30} \text{ kg} \\ N \sim 10^{57} \\ R_0 = 7 \times 10^8 \text{ m} \end{cases}$$

E
6
P

6.12.18.



intensidade da radiação que chega à Terra

$$I \times \pi R_T^2 = \sigma T_T^4 4\pi R_T^2$$

potência absorvida pela Terra potência emitida pela Terra

$$T^4 = \frac{I}{4\sigma} = \frac{1360}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}} = 6 \times 10^5 \Rightarrow T = 278 \text{ K}$$

6.12.8. $\mathcal{E}_j = g \mu_B B m_j$ ($m_j = -J, -J+1, -J+2, \dots, J-1, J$) $\rightarrow \frac{(2J+1)}{N}$ valores

a) $Z = \sum_{m_j=-J}^J e^{-\frac{g \mu_B B m_j}{kT}} = \sum_{m_j=-J}^J e^{-\frac{a}{J} m_j}$

$$= e^a + e^{a \frac{(J-1)}{J}} + e^{a \frac{(J-2)}{J}} + \dots + e^{-a}$$

$$= e^a + e^a \left(e^{-a/J}\right) + e^a \left(e^{-a/J}\right)^2 + \dots + e^a \left(e^{-a/J}\right)^{2J} \rightarrow \text{P.G. (razão} = e^{-a/J})$$

$$Z = e^a + n e^a + n^2 e^a + \dots + n^{N-1} e^a$$

$$nZ = n e^a + n^2 e^a + \dots + n^{N-1} e^a + n^N e^a$$

$$(1-n)Z = e^a(1-n^N) \Rightarrow Z = \frac{e^a(1-n^N)}{1-n} = \frac{e^a [1 - e^{-a/J(2J+1)}]}{1 - e^{-a/J}}$$

$$= \frac{e^{a/J} - e^{-a/J(2J+1)}}{1 - e^{-a/J}} \times \left(\frac{e^{a/2J}}{e^{a/2J}} \right)$$

$$Z = \frac{e^{a(J+1/2)/J} - e^{-a(J+1/2)/J}}{e^{a/2J} - e^{-a/2J}} = \frac{\sinh a(J+1/2)/J}{\sinh a/2J}$$

b)

$$\begin{cases} \ln Z = \ln \sinh a(J+1/2) - \ln \sinh a/2J \\ \frac{\partial \ln Z}{\partial a} = \frac{(J+1/2)}{J} \coth a(J+1/2)/J - \frac{1}{2J} \coth \frac{a}{2J} = B_J(a) \end{cases}$$

$\frac{\partial a}{\partial \beta} = g \mu_B J$

$\rightarrow$ função de Brillouin

$$U = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \beta} = \underbrace{[N g \mu_B J B_J(a)]}_M B$$

M (magnetização)

6.12.8.

$$B_J(a) = \frac{(J+1/2)}{J} \coth a \frac{(J+1/2)}{J} - \frac{1}{2J} \coth \frac{a}{2J}$$

$$B_{1/2}(a) = \coth 2a - \coth a$$

$\coth a + \tanh a$

$$B_{1/2}(a) = \tanh a$$

$\Downarrow$

$$M = N \mu_B \tanh a$$

$$B_{J \rightarrow \infty}(a) = \coth a - \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{2J} \coth \frac{a}{2J}$$

$\frac{1}{a}$

$$B_{J \rightarrow \infty}(a) = \coth a - \frac{1}{a} = \mathcal{L}(a)$$

$\rightarrow$ função de Langevin

$$\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a$$

$$\sinh 2a = 2 \sinh a \cosh a$$

$$\coth 2a = \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh a}{\sinh a} + \frac{\sinh a}{\cosh a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\coth a + \tanh a)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \coth \left(\frac{a}{2J} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \coth x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{(1+x) - (1-x)}$$

$$= \frac{1}{x} = \frac{2J}{a}$$