Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Instituto de Física Armando Dias Tavares (IFADT)

Departamento de Física Nuclear e Altas Energias (DFNAE)

Estrutura da Matéria II

Lista de exercícios - 05

(11 de novembro de 2020)

1. Mostre que a equação de Schrödinger para duas partículas de massas m_1 e m_2, em interação coulombiana,
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 \ + \ V(r)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = E_T\,\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$
onde os índices 1 e 2 se referem às coordenadas das partículas de massas m_1 e m_2, pode ser escrita como
$$\frac{1}{\psi(\vec{r})}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{r}}^2 + V(r)\right]\psi(\vec{r}) \ + \ \frac{1}{\chi(\vec{R})}\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla_{\vec{R}}^2\right]\,\chi(\vec{R}) = E_T$$
sendo $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$ e $M = m_1 + m_2$.

2. O estado de um elétron em um átomo de hidrogênio pode ser caracterizado pelos números quânticos $n = 2$, $l = 1$ e $m = 1$, ou pela correspondente função de onda em coordenadas esféricas,
$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{21}(r)\,P_1^1(\theta)\,e^{i\phi}$$
onde $R_{21}(r) = r\,e^{-r/(2a_B)}$, $P_1^1(\theta) = \operatorname{sen}\theta$, e $a_{\scriptscriptstyle B} = \dfrac{\hbar^2}{me^2}$ é o raio de Bohr.
   a) Esboce o gráfico da distribuição radial de probabilidades, indicando o valor de r que determina o máximo da distribuição; $(4a_B)$
   b) Esboce o gráfico polar da parte angular em θ da função de onda.

3. O elétron em um átomo de hidrogênio encontra-se em seu estado fundamental,
$$\psi(r) = Ae^{-r/a_B} \qquad \text{onde} \ \ a_{\scriptscriptstyle B} = \frac{\hbar^2}{me^2} \ \text{é o raio de Bohr}$$
   a) Determine os valores médios $\langle r\rangle$ e $\left\langle \dfrac{1}{r}\right\rangle$, associados a distância do elétron ao próton. $(1{,}5a_B)$ $(1/a_B)$
   b) Calcule a probabilidade de presença do elétron entre $r = 0$ e $r = 10^{-14}a_B$. (10^{-12})
   c) Mostre que os valores médios da energia potencial e da energia cinética são dados por
$$\langle V\rangle = -\frac{e^2}{a_{\scriptscriptstyle B}} \qquad \text{e} \qquad \langle T\rangle = \frac{e^2}{2a_{\scriptscriptstyle B}}$$

4. O elétron em um átomo de hidrogênio encontra-se em um estado descrito pela superposição de autoestados de energia (E) e dos momenta angulares L^2 e L_z:
$$\frac{1}{4}\left[\sqrt{3}\,\psi_{100} \ - \ 2\,\psi_{211} \ + \ \psi_{210} \ - \ 2\sqrt{2}\,\psi_{21-1}\right]$$
Determine:
   a) os valores médios de L^2, de L_z; $\big(\langle L^2\rangle = (13/8)\hbar^2\big)$ $\big(\langle L_z\rangle = -(1/4)\hbar\big)$
   b) a incerteza relativa na energia $(\Delta E/\langle E\rangle)$. (0,75)

5. Determine os comutadores:

   a) $[L_x, x], [L_y, y], [L_z, z]$;

   b) $[L_x, y], [L_x, z], [L_y, x], [L_y, z], [L_z, x], [L_z, y]$.

6. O estado normalizado de um elétron no átomo de hidrogênio é dado pela superposição

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{100} + A\,\psi_{210} + \frac{1}{\sqrt{8}}\,\psi_{310}$$

   Determine:

   a) a constante A; $(\sqrt{3/8})$

   b) o valor médio da energia; $(0{,}61E_1 \simeq -8{,}3 \text{ eV})$

   c) os valores médios de L^2 e L_z. $\big(\langle L^2\rangle = \hbar^2\big)$ $\big(\langle L_z\rangle = 0\big)$

7. O estado normalizado de um elétron no átomo de hidrogênio pode ser expresso pela superposição

$$\psi = R_{32}\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,Y_2^1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\,Y_2^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\,Y_2^{-1}\right)$$

   Determine:

   a) a energia média do elétron e a incerteza associada; (-1,51 eV)

   b) os valores que podem ser encontrados para a medida de L^2, seu valor médio e incerteza; $(6\hbar^2, 6\hbar^2, 0)$

   c) as probabilidades associadas aos valores que podem ser encontrados para a medida de L_z, seu valor médio e incerteza. (1/6, 1/2 e 1/3) $\big(\langle\, L_z\rangle = -\hbar/6\big)$ $(\Delta L_z = \frac{\sqrt{17}}{6}\,\hbar)$

8. O estado normalizado de um elétron no átomo de hidrogênio é dado por

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{8}}\big(R_{10} \;+\; R_{30}\big)Y_0^0 \;+\; \frac{\sqrt{3}}{2}\,R_{21}Y_1^0$$

   Determine:

   a) a energia média do elétron; (-4,44 eV)

   b) os valores que podem ser encontrados para a medida de L^2, seu valor médio e incerteza ; (0 e $2\hbar^2$) ($3/2\ \hbar^2$) $(\sqrt{3/2}\hbar^2)$

   c) as probabilidades associadas aos valores que podem ser encontrados para a medida de L_z, seu valor médio e incerteza. $\big(P(m=0)=1\big)$ $\big(\langle\, L_z\rangle = 0\big)$ $(\Delta L_z = 0)$