Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Instituto de Física Armando Dias Tavares (IFADT)

Departamento de Física Nuclear e Altas Energias (DFNAE)

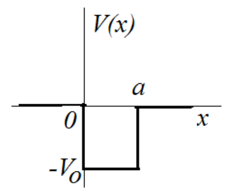
Estrutura da Matéria II

Lista de exercícios - 03

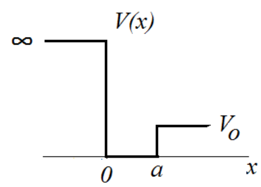
(8 de novembro de 2020)

1. Uma partícula com energia $\epsilon = 12$ keV incide sobre um degrau de potencial de 9 keV. Determine os coeficientes de transmissão e de reflexão. ($t = 8/9$ e $r = 1/9$)

2. Determine os estados ligados de uma partícula de massa m em um poço de potencial do tipo



3. Determine os estados ligados de uma partícula de massa m em um poço de potencial do tipo



4. O estado inicial de uma partícula de massa m confinada entre $0 < x < a$, em um poço de potencial infinito, é dado por

$$\Psi(x,0) = A\ \mathrm{sen}^3(\pi x/a)$$

Determine:

a) o valor médio e a incerteza na posição; $\langle x\rangle = a/2$ e $\Delta x = \dfrac{a}{\sqrt{12}}\sqrt{\left(1 - \dfrac{49}{6\pi^2}\right)}$

b) a incerteza relativa na energia. $(\Delta E/\langle E\rangle = 4/3)$

5. O estado inicial de uma partícula de massa m confinada entre $0 < x < a$, em um poço de potencial infinito, é dado por

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & (0 \le x \le a/2) \\ A(a-x) & (a/2 \le x \le a) \end{cases}$$

a) Mostre que o estado da partícula para $t \ge 0$ é dado por

$$\Psi(x,t) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{(n-1)/2}\frac{1}{n^2}\ \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{a}x\ e^{-iE_nt/\hbar} \qquad \left(E_n = n^2\,\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)$$

b) Determine a probabilidade de ocorrência do valor $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ para a energia da partícula, e o valor médio da energia. $P(E_1) = 0{,}9855$ e $\langle E\rangle = \dfrac{6\hbar^2}{ma^2}$

6. O estado inicial de uma partícula de massa m confinada entre $0 < x < a$, em um poço de potencial infinito, é dado por

$$\Psi(x,t) = A\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-iEt/\hbar}$$

onde A é a constante de normalização.

   a) Esse estado é estacionário?
   b) Determine a energia da partícula.
   c) A partir do gráfico da densidade de probabilidade de presença, determine a probabilidade da partícula se encontrada entre $x = 0$ e $x = a/2$, e o valor médio da posição..

7. Dois estados estacionários de uma partícula, com energias E_1 e E_2 são dados por

$$\begin{cases} \Psi_1(x,t) = \psi_1(x)\,e^{-iE_1t/\hbar} \\ \\ \Psi_2(x,t) = \psi_2(x)\,e^{-iE_2t/\hbar} \end{cases}$$

   a) Escreva uma superposição linear de $\Psi_1(x,t)$ e $\Psi_2(x,t)$ que represente um estado para o qual o valor médio da energia é dado por $\dfrac{E_1 + 3E_2}{4}$
   b) Essa superposição representa um estado estacionário?
   c) Determine a incerteza na energia da partícula.

8. A partir da definição de valor médio e da equação de Schrödinger em uma dimensão espacial, mostre que as equações de Ehrenfest para a posição (x) e *momentum* (p_x) de uma partícula de massa m, em um campo conservativo, $V(x)$, são dadas por

$$\begin{cases} m\,\dfrac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle p_x\rangle \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\langle p_x\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle -\dfrac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \end{cases}$$

e podem ser generalizadas como

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\langle A\rangle}{\mathrm{d}t} = \big\langle [A,H]\big\rangle$$

para qualquer operador A que não dependa explicitamente do tempo, onde $[A,H]$ é o comutador do operador A com o operador hamiltoniano H, associado à partícula.

9. A partir da equação de Ehrenfest generalizada, mostre o chamado teorema do virial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\langle x\,p_x\big\rangle = 2\langle T\rangle - \left\langle x\,\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$

onde $T = \left(\dfrac{p_x^2}{2m}\right)$ representa a energia cinética da partícula de massa m.

10. O estado fundamental de um oscilador harmônico de massa m e frequência natural $\omega_\circ$ é dado por

$$\Psi_\circ(x,t) = A_\circ\;e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}\;e^{-i\frac{E_\circ}{\hbar}t} \qquad \alpha = \frac{m\omega_\circ}{\hbar}$$

Determine:

   a) a constante de normalização e a energia do estado fundamental; $A_\circ = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$ $\qquad E_\circ = \dfrac{\hbar\omega_\circ}{2}$
   b) a constante de normalização e a energia do primeiro estado excitado, dado por

$$\Psi_1(x,t) = A_1\;x\;e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}\;e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \qquad \left(A_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\;\alpha^{3/4}, \qquad E_1 = \frac{3\hbar\omega_\circ}{2}\right)$$

c) a relação entre $\psi_1(x)$ e $\psi_\circ(x)$. $\qquad \psi_1(x) = \sqrt{2\alpha}\, x\, \psi_\circ(x)$

11. Mostre que as incertezas associadas à posição e ao *momentum* de um oscilador harmônico de massa m e frequência natural $\omega_\circ$ em seu estado fundamental obedecem à relação

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

12. Determine a probabilidade de presença de um oscilador harmônico na região classicamente proibida quando:
    a) o oscilador encontra-se em seu estado fundamental; (0,16)
    b) o oscilador encontra-se no primeiro estado excitado. (0,11)

13. O estado de um oscilador harmônico de massa m e frequência natural $\omega_\circ$ é dado por

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \psi_\circ(x)\, e^{-i\frac{E_\circ}{\hbar}t} \; - \; \frac{1}{2}\, \psi_1(x)\, e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}$$

onde $\psi_\circ(x)$ e $\psi_1(x)$ são os autoestados correspondentes aos dois primeiros níveis de energia.

a) Determine o valor médio e a incerteza da energia. $\qquad \langle E\rangle = \frac{3}{4}\hbar\omega_\circ \qquad \Delta E = \frac{\sqrt{3}}{4}\hbar\omega_\circ$

b) Mostre que os valores médios $\langle x\rangle$ e $\langle x^2\rangle$ são dados por

$$\langle x\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega_\circ}\right)\cos\omega_\circ t \quad \text{e} \quad \langle x^2\rangle = \frac{3}{4}\,\frac{\hbar}{m\omega_\circ}$$

c) Mostre que os valores médios $\langle p\rangle$ e $\langle p^2\rangle$ são dados por

$$\langle p\rangle = \left(\frac{3m\omega_\circ\hbar}{8}\right)\operatorname{sen}\omega_\circ t \quad \text{e} \quad \langle p^2\rangle = \frac{3}{4}\, m\omega_\circ\hbar$$

d) Mostre que a relação entre as incertezas Δx e Δp pode ser expressa como

$$\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega_\circ t\right)\left(1-\frac{1}{2}\cos^2\omega_\circ t\right)}\right]$$

e) Esboce o gráfico da relação $\Delta x\Delta p$ indicando os pontos máximos e mínimos. $\qquad (\pi/4, 1{,}125\times\hbar/2)$ e $(\pi/2, 1{,}061\times\hbar/2)$

14. Mostre que o espectro de energia de um oscilador harmônico unidimensional de carga elétrica q, massa m e frequência natural $\omega_\circ$, sob a a ação de um campo elétrico uniforme E é dado por

$$\epsilon_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_\circ - \frac{q^2}{2m\omega_\circ}E^2 \qquad (n = 0,1,2,\ldots\ldots)$$

Ou seja, os níveis de energia são apenas deslocados de um valor constante. Esse comportamento análogo ao deslocamento dos níveis de energia de um átomo em um campo magnético (efeito Zeeman) é chamado de efeito Stark.

15. Se um oscilador harmônico encontra-se em um de seus autoestados de energia, mostre que os valores médios da posição e do *momentum* são nulos.

16. Com base no teorema do virial,

$$2\,\langle T\rangle = \left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle$$

onde T é a energia cinética e V a energia potencial, mostre que a relação entre as incertezas Δx e Δp para um oscilador harmônico é dada por

$$\Delta x\Delta p = \left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar$$

17. A energia potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ \\ \frac{1}{2} m\omega_\circ^2 x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

descreve um corpo elástico que pode ser estendido, mas não comprimido.

a) Esboce as autofunções de energia que representam o estado fundamental e o primeiro estado excitado.

b) Determine as autofunções normalizadas e as energias do estado fundamental e do primeiro estado excitado.