

Spin do elétron

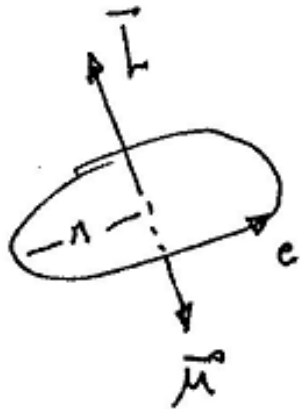
Vitor Oguri

Departamento de Física Nuclear e Altas Energias
Instituto de Física Armando Dias Tavares
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Rio de Janeiro, 27 de abril de 2018

Spin do elétron

Momento dipolar



$$\mu = i A = \frac{e}{(T)} \pi r^2 = \left(\frac{e}{2m} \right) \underbrace{(m \omega r)}_p \pi$$

γ_L - razão giromagnética

$$\boxed{\vec{\mu}_L = -\gamma_L \vec{L}} \quad \text{- momento orbital}$$

$$\mu_z = -\underbrace{\gamma_L \hbar}_{\mu_B} l_z$$

$$= -\mu_B m_l$$

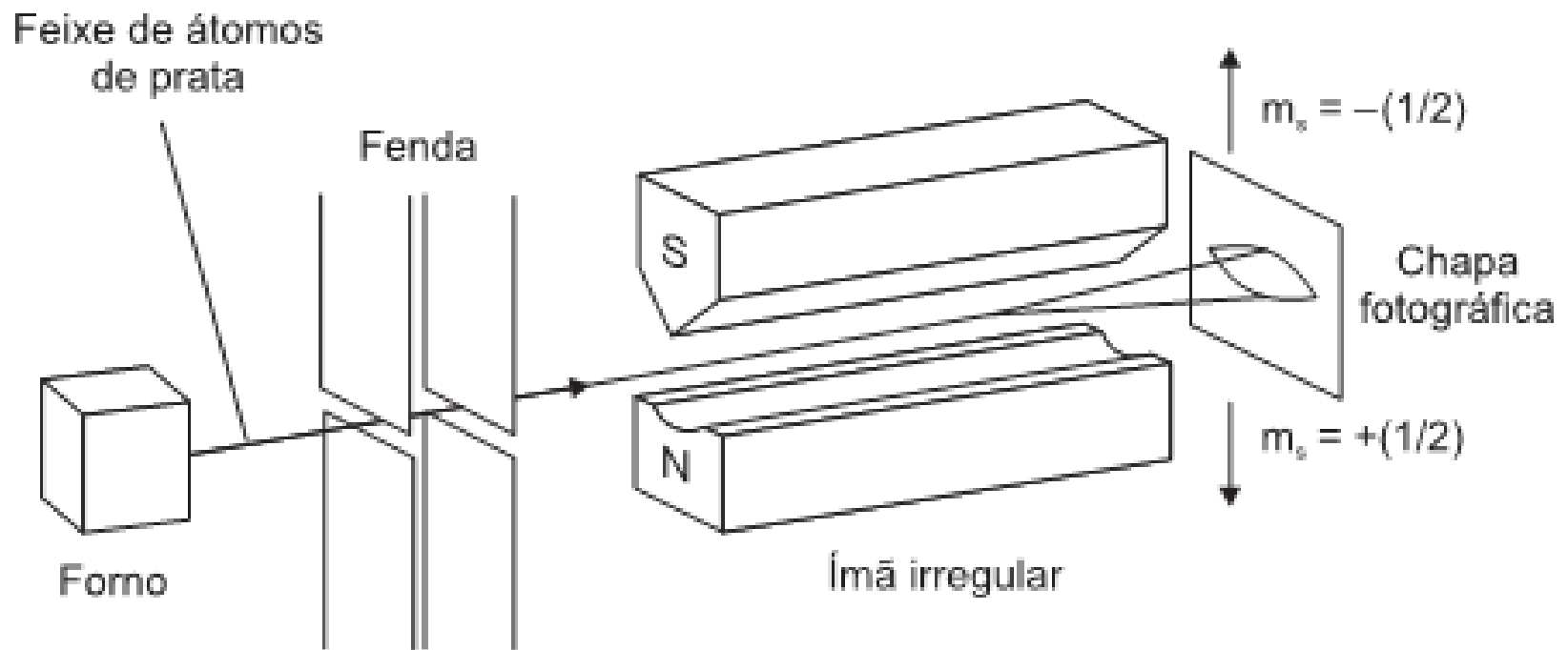
$\rightarrow (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\gamma_L = 1.76 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1}$$

$\hookrightarrow$ magneton de Bohr $(9.3 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1})$

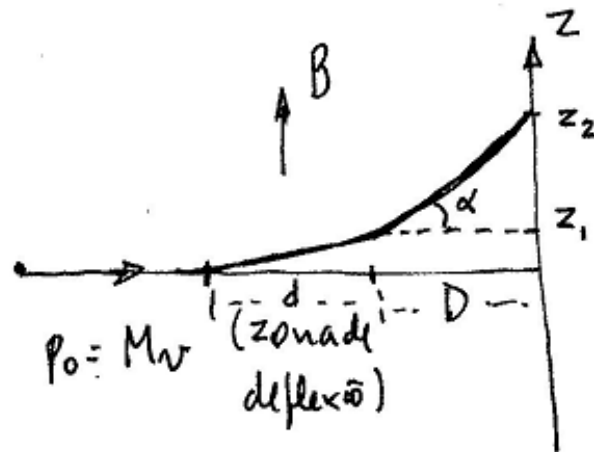
Spin do elétron

- Experimento de Stern-Gerlach



Spin do elétron

Deflexão de jatos atômicos por um campo magnético não-uniforme

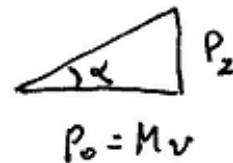


$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{F_z}{M} \right) t_d^2 \\ z_2 = D \tan \alpha \end{cases}$$

$$t_d = \frac{d}{v}$$



$$\tan \alpha = \frac{p_z}{p_0}$$

$$p_z = F_z t_d = F_z \frac{d}{v} \Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{d}{Mv^2} \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}}$$

Spin do elétron

$$Z_1 = \frac{d^2}{2Mv^2} \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$Z_2 = \frac{d\hbar}{2Mv^2} \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\Rightarrow Z = Z_1 + Z_2 = \frac{d}{Mv^2} \left(D + \frac{d}{2} \right) \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

Resultado esperado

μ_z - contínuo (clássico) $\Rightarrow Z$ - contínuo

$\mu_z = -m_e \mu_B$ (quantizado) $\Rightarrow (2l+1)$ traços

Resultado experimental : 2 traços $\begin{cases} +\mu_B \\ -\mu_B \end{cases} (\mu_z)$

Spin do elétron

Segundo Goudsmit e Uhlenbeck, os resultados dos experimentos de Stern-Gerlach, mostrando um efeito Zeeman anômalo com apenas duas linhas e um valor para o momento dipolar magnético do elétron, em uma dada direção, da ordem de $\frac{e\hbar}{2mc} = \gamma_l \hbar = \mu_B$, ou seja, de 1 magneton de Bohr, podiam ser explicados associando-se ao elétron um *momentum* angular intrínseco ($\vec{S}$), ou *spin*, tal que os autovalores associados a cada uma das componentes (S_x, S_y, S_z) fossem iguais a $\frac{\hbar}{2}$ ou $-\frac{\hbar}{2}$.

De maneira análoga ao *momentum* angular orbital (L) do elétron, para o qual os autovalores de L^2 são representados por $l(l+1)\hbar^2$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), e os das componentes, L_z, L_y ou L_x , por $m_l \hbar$ ($m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$), Goudsmit e Uhlenbeck associaram ao *spin* do elétron os autovalores $s(s+1)\hbar^2$ ($s = 1/2$) para S^2 , e $m_s \hbar$ ($m_s = 1/2, -1/2$) para qualquer das componentes.

Desse modo, diferentemente do momento dipolar magnético devido ao *momentum* angular orbital, o qual é dado por

$$\vec{\mu}_l = -\gamma_l \vec{L}$$

o momento dipolar magnético devido ao *spin* do elétron é dado por

$$\vec{\mu}_s = -2\gamma_l \vec{S}$$

Assim, os autovalores de suas componentes são dados por $\pm \gamma_l \hbar = \pm \mu_B$.

Spin do elétron

Devido a não comutatividade das componentes (L_x, L_y, L_z) do *momentum* angular orbital ($\vec{L}$), os estados do elétron em um átomo são caracterizados pelos auto-estados simultâneos de uma das componentes (L_z) e do quadrado (L^2), que correspondem aos autovalores inteiros l e m_l , tal que

$$\begin{cases} L^2 Y_l^{m_l} = \hbar^2 l(l+1) Y_l^{m_l} & l = 0, 1, 2, \dots \\ L_z Y_l^{m_l} = \hbar m_l Y_l^{m_l} & m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \end{cases}$$

onde as autofunções $Y_l^{m_l}(\theta, \varphi)$ dependem das coordenadas angulares θ e φ .

No entanto, com respeito a ação dos operadores L^2 e L_z sobre as autofunções, apenas a indicação dos autovalores l e m_l é relevante, ou seja, pode-se representar os autoestados e a ação dos operadores como

$$\begin{cases} L^2 |l, m_l\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m_l\rangle \\ L_z |l, m_l\rangle = \hbar m_l |l, m_l\rangle \end{cases}$$

De modo análogo, o *spin* do elétron é representado por um operador $\vec{S}$, cujas componentes obedecem às relações de comutação,

$$\begin{cases} [S_x, S_y] = i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] = i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] = i\hbar S_y \end{cases}$$

e os autoestados e a ação dos operadores $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ e S_z são representados implicitamente

Spin do elétron

como 17

$$\begin{cases} S^2 |s, m_s\rangle_z = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle_z & s = 1/2 \\ S_z |s, m_s\rangle_z = \hbar m_s |s, m_s\rangle_z & m_s = \pm 1/2 \end{cases}$$

Operacionalmente, Pauli, em 1927, introduziu uma representação explícita para o *spin* do elétron. A partir das chamadas matrizes de Pauli,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o *spin* do elétron pode ser representado como

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} = \hat{i} \frac{\hbar}{2} \sigma_x + \hat{j} \frac{\hbar}{2} \sigma_y + \hat{k} \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

Assim,

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

e

$$S^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \right] = 3 \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spin do elétron

Como S^2 e a componente S_z são diagonais na representação de Pauli, os autoestados simultâneos de S^2 e S_z , correspondentes aos pares de autovalores $\{3\hbar^2/4, \hbar/2\}$ $\{3\hbar^2/4, -\hbar/2\}$, são dados por

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e obedecem às relações

$$\begin{cases} S^2 \chi_+ = 3\frac{\hbar^2}{4} \chi_+ & S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+ \\ S^2 \chi_- = 3\frac{\hbar^2}{4} \chi_- & S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_- \end{cases}$$

¹⁷ Como para o elétron s é sempre igual a $1/2$, e m_s , a $1/2$ ou $-1/2$, a notação é redundante. Assim, os autoestados de *spin* são representados, usualmente, como

$$\begin{cases} |+\rangle_x & |+\rangle_y & |+\rangle_z & (m_s = 1/2) \\ |-\rangle_x & |-\rangle_y & |-\rangle_z & (m_s = 1/2) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle_x & |\uparrow\rangle_y & |\uparrow\rangle_z & (m_s = 1/2) \\ |\downarrow\rangle_x & |\downarrow\rangle_y & |\downarrow\rangle_z & (m_s = -1/2) \end{cases}$$