Operações de simetria e leis de conservação

Como estabelecido pelas equações de evolução do valor médio de uma grandeza (eq. de Ehrenfest), as leis de conservação estão associadas com a compatibilidade da grandeza com a hamiltoniana do sistema, ou seja, se uma grandeza A comuta com a hamiltoniana H,

$$[A, H] = 0 \implies \frac{d\langle A\rangle}{dt} = 0$$ (conservação do valor médio ao longo do tempo)

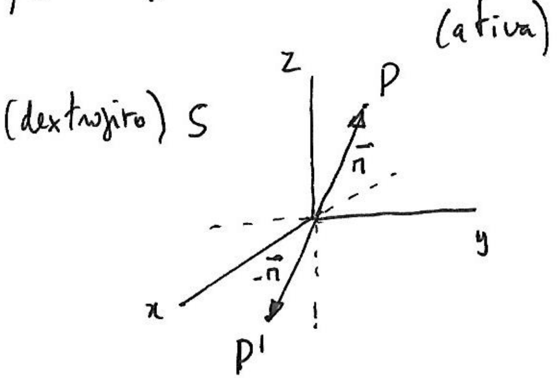
Uma outra característica das leis de conservação é a conexão com as operações de simetria, expressa pela invariância da hamiltoniana do sistema com relação às ações de transformações geradas pelas grandezas conservadas.

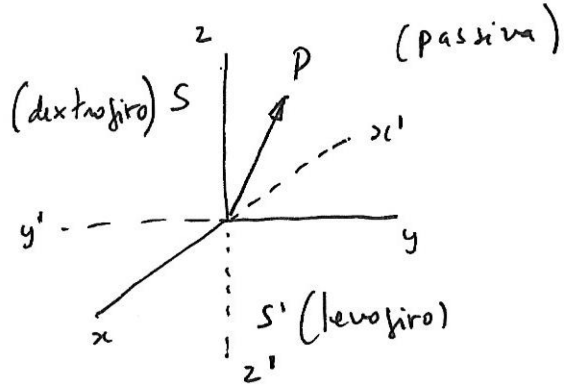
- **Inversão**

Um exemplo de operação para a qual a hamiltoniana de um sistema sujeito às interações fundamentais eletromagnéticas e fortes é a inversão da posição de uma partícula.

$$\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r} \qquad \begin{cases} x \to -x, \quad y \to -y, \quad z \to -z' \\ r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \varphi \to \varphi + \pi \end{cases}$$

Do pto. de vista das transformações de coordenadas, a inversão pode ser vista de duas formas: (x,y,z) e (x',y',z') podem ser associadas a dois pontos distintos, P e P', segundo um sistema de coordenadas S (transformação ativa), ou a um mesmo ponto P, segundo dois sistemas (S e S') de coordenadas distintos (transformação passiva).





Nesse sentido, a inversão é uma transformação descontínua que não pode ser expressa por uma sucessão de ações contínuas

Exemplos de sistemas cuja hamiltoniana é invariante sob inversão, ou seja, a operação de inversão é uma operação de simetria, são o oscilador harmônico e o movimento de uma partícula em um campo central.

$$\left\{\begin{array}{l} V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = V(-x) \\ V(\vec{r}) = \frac{-e^2}{r} = V(-\vec{r}) \end{array}\right. \Rightarrow H(\vec{r}) = H(-\vec{r})$$

Com relação à ação da operação de inversão ($\vec{r} \to -\vec{r}$) sobre as funções de onda (campos escalares), a ação é representada pelo chamado operador de paridade (P), tal que

$$\underbrace{P\psi(\vec{r})}_{\psi'(\vec{r})} = \psi(-\vec{r}) \implies \underbrace{P\psi'(\vec{r})}_{P^2\psi(\vec{r})} = \underbrace{\psi'(-\vec{r})}_{\psi(\vec{r})} \implies \boxed{P^2 = 1} \quad \text{(idempotente)}$$

ou seja, os autovalores de P são 1 e -1, o que implica $\boxed{P\psi(\vec{r}) = \pm\underbrace{\psi(\vec{r})}_{\psi(-\vec{r})}}$,

se $\psi(\vec{r})$ é uma autofunção de P (autofunções de P têm paridade definida)

Para um operador $H(\vec{r})$,

$$\psi(\vec{r}) = H(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \implies P\underbrace{H(\vec{r})\varphi(\vec{r})}_{\psi(\vec{r})} = \underbrace{H(-\vec{r})\varphi(-\vec{r})}_{\psi(-\vec{r})}$$

$$P H(\vec{r}) P^{-1} \underbrace{P\varphi(\vec{r})}_{\varphi(-\vec{r})} = H(-\vec{r})\varphi(-\vec{r}) \implies \boxed{H(-\vec{r}) = P H(\vec{r}) P^{-1}}$$

Se $H(\vec{r})$ é uma hamiltoniana invariante sob. inversão,

$$H(-\vec{r}) = H(\vec{r}) \implies [H, P] = 0 \implies \psi(-\vec{r}) = \pm\psi(\vec{r})$$

→ os autoestados de energia de hamiltoniana invariante sob inversão têm paridade definida.

→ a paridade é conservada.

Como o operador de paridade é aplicado aos operadores que representam as grandezas físicas?

No caso do operador de posição,

$$P \vec{r} P^{-1} = -\vec{r} \quad (\text{polar})$$

e do momentum linear,

$$P \vec{p} P^{-1} = -\vec{p} \quad (\text{polar}) \qquad \left(\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \longrightarrow i\hbar\vec{\nabla} = -\vec{p} \right)$$

Para outras grandezas, como o momentum angular orbital, a ação pode ser obtida a partir da combinação dos operadores $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \implies P \vec{L} P^{-1} = \vec{L} \; (\text{axial})$$

"a simetria de um sistema com relação à operação de inversão está associada à conservação da paridade."

O conceito de paridade está intimamente ligado operação de reflexão.

Paridade

Paridade (reversão espacial

$$\text{(polares)} \quad \vec{r}, \vec{p}, \vec{J}, \vec{A}, \vec{E} \;\; \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{\;}} \;\; -\vec{r}, -\vec{p}, -\vec{J}, -\vec{A}, -\vec{E} \quad (-)$$

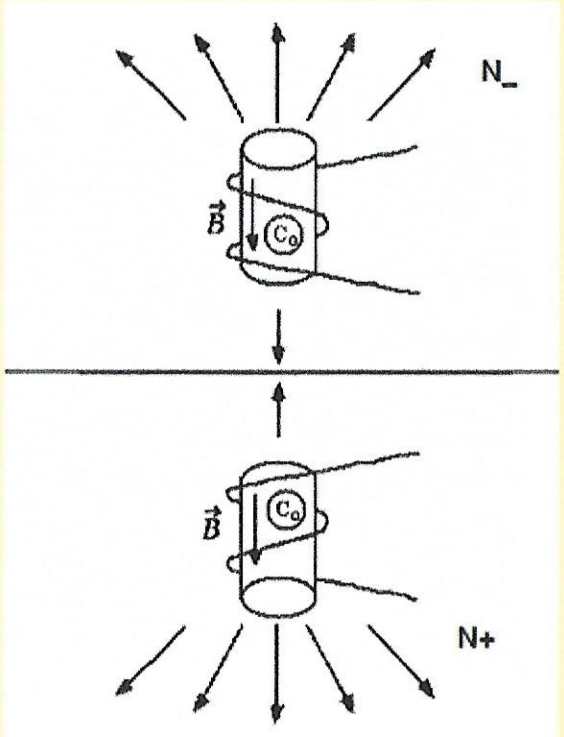
$$\text{(axiais)} \quad \vec{\omega}, \vec{L}, \vec{S}, \vec{B} \;\; \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\;}} \;\; \vec{\omega}, \vec{L}, \vec{S}, \vec{B} \quad (+)$$

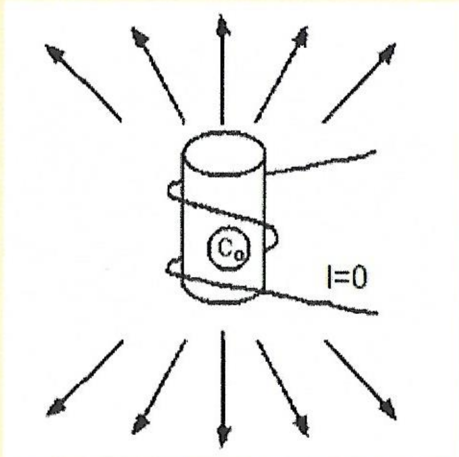
helicidade

- positiva (+) $\quad \vec{S}.\vec{p} > 0$
- negativa (-) $\quad \vec{S}.\vec{p} < 0$

Violação da Paridade (Lee/Yang -1956)

Experimento de Wu et al. (1957)





resultados do experimento:

- $N_- \gg N_+$
- elétrons com helicidade (-) definida

Helicidade e neutrino do múon

Experimento de Goldhaber et al. (1957)

- neutrinos têm helicidade negativa
- antineutrinos têm helicidade positiva

Experimento de Lederman et al. (1963)

- neutrinos (helicidade definida) $\rightarrow$ múons 100% polarizados em decaimentos de píons

$$
\begin{array}{cccccc}
\pi^- & \rightarrow & \mu^- & + & \bar{\nu} \\
 & & \Leftarrow & & \Rightarrow \\
 & & \leftarrow & & \rightarrow
\end{array}
$$

- neutrinos do múon e do elétron são distintos (número leptônico)

• <u>Translação</u>

A translação ao longo de uma direção é um outro tipo de operação sob a qual a hamiltoniana de um sistema pode ser invariante.

Enquanto a coordenada x é transformada (ponto de vista ativo) em $x' = x + a$ $(x' = T_a x)$, onde $\underline{a}$ é um parâmetro contínuo que caracteriza a translação T_a, a função de onda (como qualquer campo escalar) é transformada pela ação de um operador induzido U_a, segundo

$$\psi(x) \longrightarrow \underbrace{U_a \psi(x)}_{\psi'(x)} = \underbrace{\psi(x')}_{\psi(T_a x)} = \psi(x+a)$$

Uma vez que $\psi(x+a) = \psi(x) + \psi'(x)\,a + \psi''(x)\,\frac{a^2}{2} + \cdots$

$$= \left(1 + a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdots\right)\psi(x) = e^{a\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x)$$

$$\psi'(x) = e^{i\frac{a}{\hbar}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)}\psi(x) \Longrightarrow \boxed{U_a = e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{P}_x}}$$

representação induzida do grupo de translações ao longo de x.

Como a transformação induzida é contínua, a representação de uma translação finita $\underline{a}$ pode ser obtida a partir de uma sucessão de transformações infinitesimais $\frac{a}{N} = d$.

$$U_d = \left(1 + i\frac{d}{\hbar}\hat{p}_x\right) \Longrightarrow U_a = \lim_{N\to\infty}\left(1 + i\frac{a}{N}\frac{\hat{p}_x}{\hbar}\right)^N = e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{p}_x}$$

Desse modo, a representação induzida do grupo de translações é unitária,

$$\begin{cases} U_a = 1 + i\frac{a\hat{p}_x}{\hbar} \\ U_a^\dagger = 1 - i\frac{a\hat{p}_x}{\hbar} \end{cases} \Longrightarrow U_a^\dagger U_a = 1 \Rightarrow U_a^\dagger = U^{-1}$$

e o chamado gerador de translações (operador momentum linear) é hermitiano.

$$U_a^\dagger U_a = 1 = 1 + i\frac{a}{\hbar}\left(\hat{p}_x - \hat{p}_x^\dagger\right) + \dots \Longrightarrow \boxed{p_x^\dagger = p_x}$$

Para um operador $H(x)$.

$$H(x)\,\phi(x) = \Psi(x) \implies U_a H(x) U_a^{\dagger} \underbrace{U_a \phi(x)}_{\phi'(x)} = \underbrace{\Psi(x')}_{H(T_a x)\,\phi(T_a x)} = H'(x)\,\phi'(x)$$

$$\boxed{H'(x) = U_a H(x) U_a^{\dagger}}$$

Se $H(x)$ é uma hamiltoniana invariante sob translações ao longo de x,

$$H'(x) = H(x) \implies [H, U_a] = 0 = [H, \hat{P}_x] = 0$$

o valor médio do momentum é conservado.

geradores e regras de comutação

$T(a_\alpha)$ – grupo contínuo (parâmetros do grupo) $\Rightarrow S(T) = 1 + i\sum_\alpha a_\alpha G_\alpha$ (representação (transformações unitárias induzida))

$$\begin{cases} S(T)\psi(x) = \psi(Tx) = \psi'(x) \\ S\,L(x)\,S^{-1} = L(Tx) = L'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i\sum_\alpha a_\alpha G_\alpha \psi(x) = \psi(Tx) - \psi(x) \\ \underbrace{\left[1 + i\sum_\alpha a_\alpha G_\alpha\right] \overbrace{L(x)\left[1 - i\sum_\alpha a_\alpha G_\alpha\right]}^{\left[L(x) - i\sum_\alpha a_\alpha L G_\alpha\right]}}_{L(x) + i\sum_\alpha a_\alpha (L G_\alpha - G_\alpha L)} = L(Tx) \\ \therefore\; i\sum_\alpha a_\alpha [L, G_\alpha] = L(Tx) - L(x) \end{cases}$$

① translações : $\begin{cases} T_{\vec a} \Rightarrow x'_k = x_k + a_k = (T_{\vec a}\vec x)_k \\ S_{\vec a} = 1 + i\sum_k a_k \dfrac{p_k}{\hbar} \end{cases}$

$$\therefore\; i\sum_k a_k\, p_k \psi(\vec x) = \psi(\vec x + \vec a) - \psi(\vec x) = \sum_k a_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \Rightarrow \boxed{p_k = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}} \Rightarrow \boxed{U_{\vec a} = e^{-i\hbar\vec a\cdot\nabla}}$$

$$-i\sum_k \frac{a_k}{\hbar}[x_\ell, p_k] = (x_\ell + a_\ell) - x_\ell = a_\ell = \sum_k \delta_{\ell k} a_k \Rightarrow \boxed{[x_\ell, p_k] = i\hbar\,\delta_{\ell k}}$$

- geradores de um grupo contínuo associado a transf. unitárias são hermitianos.

$$U(a) = 1 + iaG \Rightarrow U^\dagger(a) = 1 - iaG^\dagger = U^{-1} \Rightarrow U^\dagger U = 1 = 1 + ia(G - G^\dagger) + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$G = G^\dagger$ (hermitianos)

(2) rotação em torno de um eixo z

$$\left\{ \begin{array}{l} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - \theta y \\ \theta x + y \end{pmatrix} \\ U_\theta = 1 + i\theta L_z/\hbar \end{array} \right.$$

$$i\theta \frac{L_z}{\hbar} \psi(x,y,z) = \underbrace{\psi(x-\theta, \; y+\theta x, z)}_{\psi(x,y,z) + \left[-\theta y \frac{\partial}{\partial x} + \theta x \frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x,y,z)} - \psi(x,y,z) = \theta\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi$$

$$L_z = x\underbrace{\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{p_y} - y\underbrace{\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{p_x} = \boxed{x p_y - y p_x} \implies \boxed{U_\theta = e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z}}$$

$$T\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} L_x - \theta L_y \\ \theta L_x + L_y \end{pmatrix}$$

$$-i\frac{\theta}{\hbar}[L_x, L_z] = (L_x - \theta L_y) - L_x = -\theta L_y \implies \boxed{[L_x, L_z] = -i\hbar L_y}$$

$$-i\frac{\theta}{\hbar}[L_y, L_z] = (L_y + \theta L_x) - L_y = \theta L_x \implies \boxed{[L_y, L_z] = i\hbar L_x}$$