

Gases ideais quânticos não-relativísticos degenerados

Bósons massivos degenerados

$$N = \sum_i \langle n_i \rangle = \underbrace{\langle n_0 \rangle}_{N_0} + \frac{3}{2} \frac{N}{(kT_d)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{\lambda^{-1} e^{\epsilon/kT} - 1} d\epsilon$$

$$N_0 = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \quad (\text{no de bósons no estado fundamental})$$

- densidade de estados não leva em conta o estado fundamental ($\epsilon_0 = 0$), e essa população deve ser explicitada antes da integração.

$$- N_0 > 0 \Rightarrow 0 \leq \lambda < 1$$

$$N = N_0 + \frac{3}{2} N \left(\frac{T}{T_d} \right)^{3/2} \lambda \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - \lambda} dx$$

$$\begin{cases} x = \beta \epsilon = \epsilon / kT \\ d\epsilon = kT dx \\ \epsilon^{1/2} = (kT)^{1/2} x^{1/2} \end{cases}$$

$$\Gamma(3/2) \left(1 + \frac{\lambda}{2^{3/2}} + \frac{\lambda^2}{3^{3/2}} + \dots \right)$$

$$N = N_0 + N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2^{3/2}} + \frac{\lambda^3}{3^{3/2}} + \dots \right)$$

$$\begin{cases} T_c^{3/2} = \frac{T_d^{3/2}}{\frac{3}{2} \Gamma(3/2)} = \frac{T_d^{3/2}}{\Gamma(5/2)} \\ T_B^{3/2} = \frac{T_c^{3/2}}{\zeta(3/2)} \end{cases}$$

$$T_c = \left(\frac{h^2}{2\pi m h} \right) \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \Rightarrow T_B \approx 0.53 T_c$$

$$T_c \approx 0.827 T_d \Rightarrow T_B \approx 0.44 T_d$$

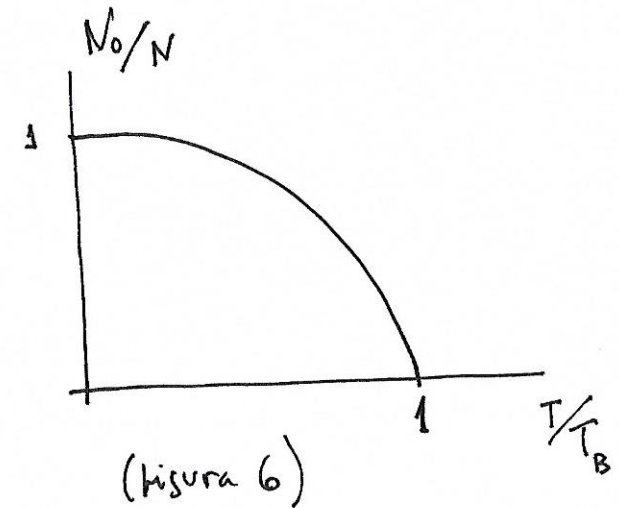
- bósons fortemente degenerados : $T \ll T_B \Rightarrow \begin{cases} N_0 \approx N \\ \lambda \approx 1 \Rightarrow \mu \approx 0 \end{cases}$

$$N = N_0 + N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \dots \right) = N_0 + N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$$

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \right] \quad (19)$$

(London - 1938)

De acordo com a eq. (19), abaixo da temperatura de degenerescência o gás se aproxima de um estado em que o número de bósons massivos agrupados nas vizinhanças do estado fundamental cresce rapidamente (figura 6). Com base nesse comportamento, Einstein supõe que nessa temperatura ocorra um novo fenômeno, no qual o sistema de bósons massivos atinja um estado mais organizado da matéria, em uma transição do tipo desordem-ordem. Em analogia com a condensação de um gás ordinário, o fenômeno é conhecido, desde então, como condensação de Bose-Einstein [24-26] e, nesse caso, a temperatura de degenerescência é uma temperatura crítica T_c que caracteriza uma transição de fase.



fração de bósons ~~de~~ massivos
no condensado de Bose-Einstein

- condensação de Bose-Einstein

A descoberta da existência de um novo estado condensado da matéria foi considerada, inicialmente, apenas um resultado matemático, sem possibilidade de verificação. Devido ao baixíssimo valor da temperatura crítica de um gás molecular ($T_c < 0,1$ K), qualquer gás real a tão baixa temperatura estaria no estado líquido.

Apesar dos argumentos contrários à condensação de Bose-Einstein, F. London, em 1938, estabelece que o calor específico molar a volume constante de um gás de bósons massivos não relativísticos para temperaturas até o valor crítico é dado por [24]

$$C_V = 1,93 Nk \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B)$$

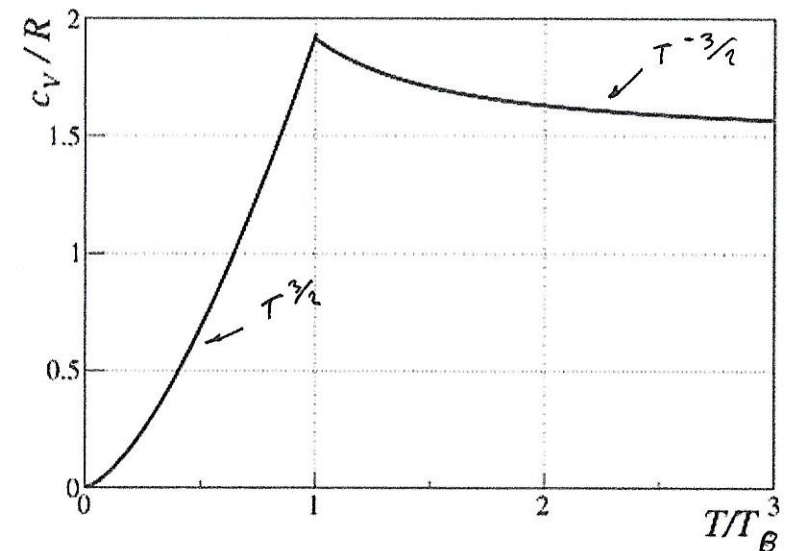
Como o valor do calor específico molar à temperatura crítica ($1,93 R$) excede o valor clássico ($1,5 R$) para o qual deve se aproximar assintoticamente para $T > T_B$, nas vizinhanças da temperatura crítica o calor específico do gás apresenta um comportamento não suave (figura [7]), o que implica descontinuidade em sua derivada.

$$\lambda \approx 1 \Rightarrow U = \frac{3}{2} \frac{N}{(kT_d)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\epsilon/kT} - 1} d\epsilon$$

$$U = \frac{3}{2} N k T \left(\frac{T}{T_d} \right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx}_{\zeta(5/2)}$$

$$U = \frac{3}{2} N k T \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \quad \begin{matrix} \Gamma(5/2) \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} + \frac{1}{3^{5/2}} + \dots \right) \\ \approx 1,34 \end{matrix}$$

$$U \approx 0,77 N k \frac{T^{5/2}}{T_B^{3/2}} \quad (T \ll T_B)$$



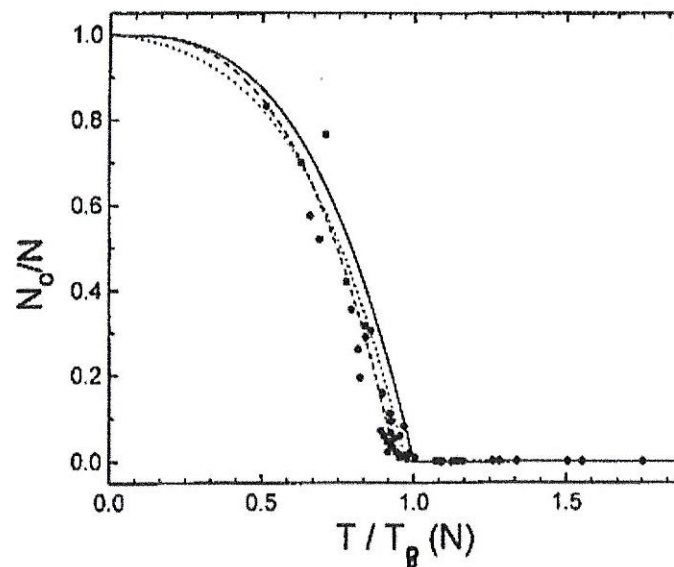
Foi exatamente a partir desse comportamento que London defendeu a hipótese de Einstein sobre a temperatura crítica de um gás de bósons massivos não relativísticos estar associada a uma transição de fase. Rebatendo as críticas de que o fenômeno da condensação de Bose-Einstein resultaria de um artifício matemático, London sugere a transição líquido-superfluido do hélio (He^4) como um exemplo de condensação de Bose-Einstein que ocorreria na natureza^[19]

Uma vez que os átomos de He^4 possuem seis partículas (2 prótons, 2 nêutrons e 2 elétrons) de *spin* semi-inteiros, F. London supõe, em primeira aproximação, que o hélio líquido constituído dos isótopos He^4 pode ser considerado um sistema de partículas independentes de *spin* inteiros, ou seja, como um gás de bósons massivos não relativísticos, e que a transição líquido-superfluido tivesse relação com o fenômeno de condensação de Bose-Einstein.

Essa hipótese é reforçada quando, ao considerar-se He^4 líquido como um gás de bósons, o valor da temperatura crítica é cerca de 3 K, conforme Tabela 1. Apesar da

similaridade e do estabelecimento posterior do fenômeno como um exemplo de condensação de Bose-Einstein^[20] por não ser exatamente um sistema de partículas que não interagem, o comportamento do calor específico do He^4 líquido é muito diferente do gás ideal degenerado de bósons massivos.

A procura de um sistema gasoso que exibisse a condensação de Bose-Einstein só teve êxito em 1995, quando vapores de átomos de Rb, a uma densidade de 10^{12} cm^{-3} , foram resfriados a baixíssima temperatura, cerca de 100 nK, por um grupo do JILA^[21] Desde então, vários experimentos sobre esse estranho comportamento da matéria foram realizados, constituindo-se em uma ativa área de pesquisa da Física de ultra baixas temperaturas^[26,29].



Anderson et. al (1995)

Férmions déjenerados

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/kT} + 1}$$

$$\Rightarrow N = \sum_i \langle n_i \rangle = \frac{3}{2} \frac{N}{(kT_F)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1} d\epsilon$$

température de Fermi

$$T_F = T_d \quad (10^5 \text{ K})$$

$$T_d = \left(\frac{3}{4\pi P} \right)^{2/3} \left(\frac{h^2}{2m} \right) \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

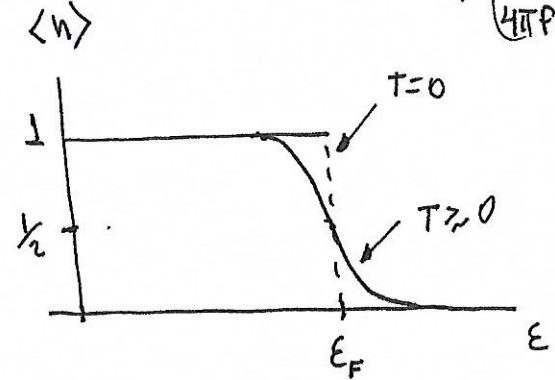
- T = 0 K (complètement déjenerados)

$$\langle n_i \rangle_{T=0} = \begin{cases} 1 & \epsilon_i < \mu(0) = \epsilon_F \text{ (niveau de Fermi)} \\ 0 & \epsilon_i > \epsilon_F \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$N = \frac{3}{2} \frac{N}{(kT_F)^{3/2}} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2} d\epsilon = N \left(\frac{\epsilon_F}{kT_F} \right)^{3/2} \Rightarrow \boxed{\epsilon_F = kT_F} \quad (10 \text{ eV} - \text{électrons de conduction})$$

(n° de états = n° de électrons)



- férmions fortement déjenerados ($0 \text{ K} \lesssim T \ll T_F$)

$$\begin{cases} \langle n(\epsilon) \rangle = f(\epsilon) \text{ (degré)} \\ \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \approx -\delta(\epsilon - \mu) \text{ (appréciable à l'entour de } \epsilon = \mu) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} N = \int_0^\infty g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \int_0^\infty \epsilon^{1/2} f(\epsilon) d\epsilon \\ U = \int_0^\infty g(\epsilon) \epsilon f(\epsilon) d\epsilon = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} f(\epsilon) d\epsilon \end{cases}$$

$M_{1/2}$ $M_{3/2}$

$$M_\nu = \int_0^\infty \overbrace{\varepsilon^\nu f(\varepsilon)}^{dG} d\varepsilon = \cancel{f(\varepsilon) G(\varepsilon) \Big|_0^\infty} - \int_0^\infty G(\varepsilon) \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{G(\varepsilon)}_{\delta(\varepsilon-\mu)} \underbrace{\left(\frac{-\partial f}{\partial \varepsilon} \right)}_{\delta(x)} d\varepsilon = \int_{-\mu/kT}^\infty G(\mu + kT x) \left(\frac{-\partial f}{\partial x} \right) dx$$

$$G(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \varepsilon^\nu d\varepsilon = \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\nu+1} \quad \begin{cases} G(0) = 0 \\ f(\infty) = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\varepsilon - \mu}{kT} \Rightarrow \begin{cases} d\varepsilon = kT dx \\ \delta(\varepsilon - \mu) = \delta(x kT) \\ = \frac{1}{kT} \delta(x) \end{cases}$$

$$kT x \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} G(\mu + kT x) = G(\mu) + G'(\mu) kT x + \frac{1}{2} G''(\mu) (kT)^2 x^2 + \dots \\ G(\mu) = \frac{\mu^{\nu+1}}{\nu+1}, \quad G'(\mu) = \mu^\nu, \quad G''(\mu) = \nu \mu^{\nu-1} = \frac{\mu^{\nu+1}}{\nu+1} \frac{\nu(\nu+1)}{\mu^2} \end{cases}$$

$$M_\nu = G(\mu) + kT G'(\mu) \underbrace{\int_{-\infty}^\infty x \left(\frac{-\partial f}{\partial x} \right) dx}_{\text{impar}} - \frac{1}{2} (kT)^2 G''(\mu) \int_{-\infty}^\infty \overbrace{x^2}^{pm} \left(\frac{-\partial f}{\partial x} \right) dx$$

$$= G(\mu) + 2 G''(\mu) (kT)^2 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx}_{\pi^2/12}$$

$$2 \int_0^\infty x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx = 2 \left\{ \cancel{x^2 f(x) \Big|_0^\infty} - 2 \int_0^\infty x f(x) dx \right\} = -4 \int_0^\infty x f(x) dx$$

$$M_\nu = \frac{\mu^{\nu+1}}{\nu+1} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} (\nu+1) \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

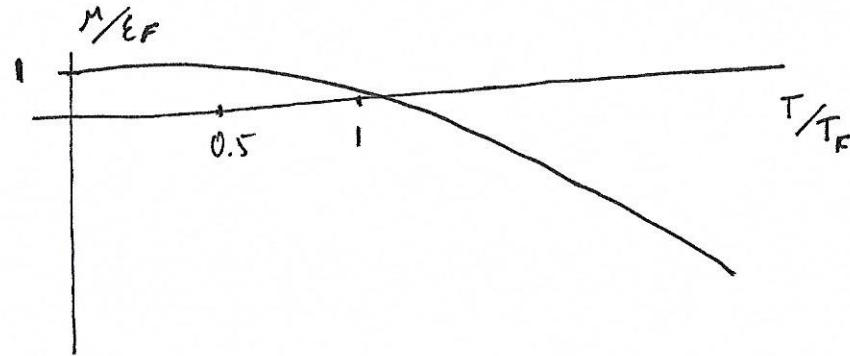
$$\frac{kT}{\mu} = \frac{kT}{\varepsilon_F} = \frac{T}{T_F} \quad (\mu(T \ll T_F) \approx \varepsilon_F)$$

- potencial químico de um gás degenerado de férmions

$$\begin{cases} N = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} M_{1/2} \\ M_{1/2} = \frac{2}{3} \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \quad (T \ll T_F)$$

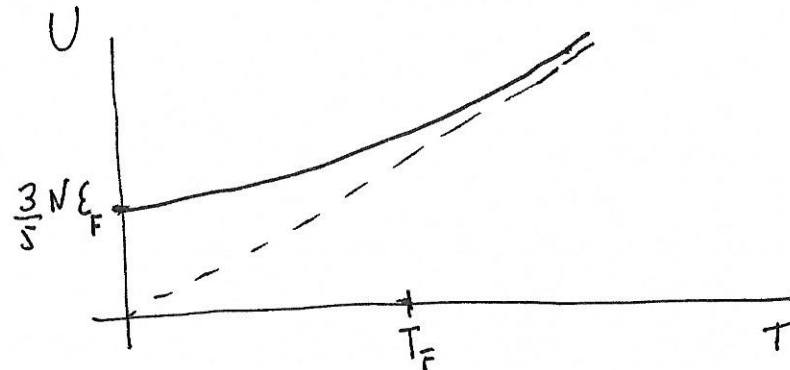


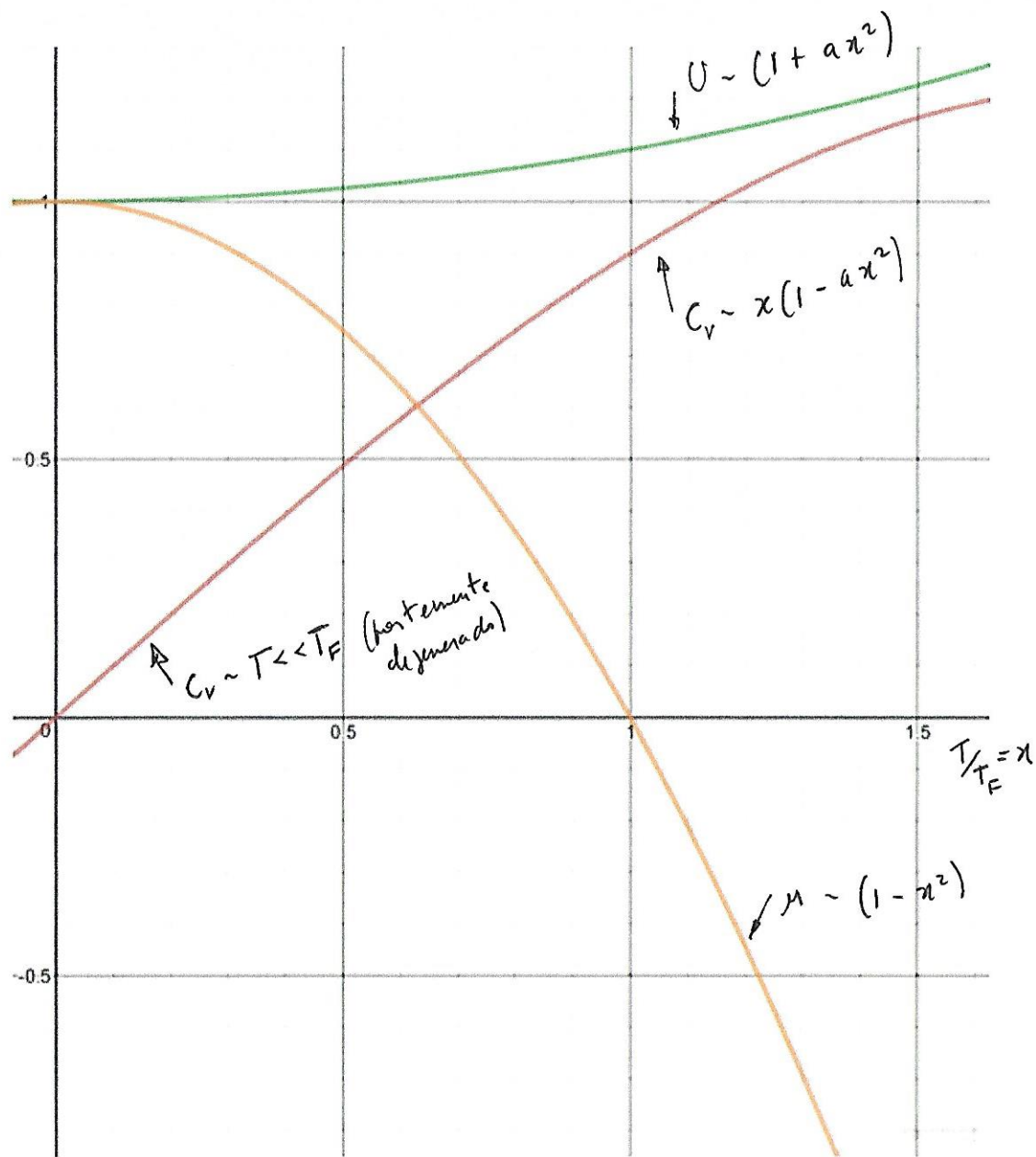
$$\begin{cases} U = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F^{3/2}} M_{3/2} \\ M_{3/2} = \frac{2}{5} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \quad (T \ll T_F)$$

$$\begin{cases} PV = \frac{2}{5} N k T_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \\ P(T=0) = \frac{2}{5} \frac{N k T_F}{V} \quad (\text{pressão no estado fundamental}) \end{cases}$$





(Sommerfeld - 1928)

$$C_V = \underbrace{\left(\frac{\pi^2}{2}\right) N k}_{4.9} \frac{T}{T_F} \quad (T \ll T_F)$$

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right]$$

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right]$$

$$\begin{cases} \mu N = U + PV - TS \\ PV = \frac{2}{3} U \end{cases} \Rightarrow \mu N = \frac{5}{3} U - TS$$

$$S = \frac{\pi^2}{3} N k \frac{T}{T_F} \quad (T \ll T_F)$$