Anãs brancas

- Composição principal de uma estrela típica como o Sol ($M \sim 10^{30}\,kg$) são átomos de hidrogênio (71%) e átomos de hélio (27%) resultantes de reações termonucleares em seu interior ($T \sim 10^7 K$), que convertem hidrogênio em hélio (fusão nuclear). Esses processos são responsáveis pela radiação emitida e pelo intenso brilho, enquanto a estrela é jovem.

- A essa temperatura, os átomos de hélio são ionizados e, se a pressão devido ao movimento térmico dos elétrons e íons (partículas α) for suficiente para contrabalançar a pressão gravitacional, evitando o colapso da estrela, a estrela torna-se um sistema de altíssima densidade ($\rho \sim 10^9\,kg/m^3$), denominada <u>anã branca</u>.

- Assim, uma anã branca consiste de ~~pares de~~ partículas α ($m_\alpha = 4m_p$) e pares de elétrons, tal que sua massa é dada por,

$$M = (2m_p)N \qquad (N - \text{é o nº de elétrons})$$

- De acordo com a relação de incerteza ($pr \sim \hbar$), a condição para que a energia cinética dos elétrons seja suficiente para vencer o potencial coulombiano e a estrela tornar-se um gás de férmions pode ser expressa como

$$\frac{p^2}{2m} > \frac{2e^2}{r} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2mr^2} > \frac{2e^2}{r} \Rightarrow r < \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\frac{\hbar^2}{me^2}}_{a_B}\Big) = \frac{a_B}{4} \quad a_B \rightarrow 0.5\times 10^{-10}\,m$$

- Desse modo, a densidade da estrela (anã branca) deve ser maior que

$$\rho_{anã} > \frac{2m_p}{\frac{4}{3}\pi a_B^3/4^3} \sim 2^5 \frac{\overset{\sim 10^{-27}}{m_p}}{\underset{\sim 10^{-30}/2^3}{a_B^3}} \sim 2^8 \times 10^3 \sim 10^5\, kg/m^3$$

- Apesar de ter sido prevista por Bessel (1844), a primeira anã branca (Sirius B) só foi observada em 1862. Sua massa é praticamente igual à do Sol (2×10^{30} kg), o raio da ordem de 5600 km (da ordem da Terra), e sua densidade satisfaz o critério de ser maior que $10^5\, kg/m^3$,

$$\rho = \frac{2\times 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi\,(5{,}6\times 10^6)^3} \sim 2.7\times 10^9\, kg/m^3$$

- Considerando que os elétrons e os nucleons se distribuem uniformemente, a densidade de elétrons, ou dos nucleons, é dada por

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho}{2m_p} = \frac{2.7\times10^9}{2\times1{,}67\times10^{-27}} \sim 10^{36}\ m^{-3}$$

o que corresponde a uma temperatura de Fermi da ordem de $10^{10}K$ para os elétrons

$$T_F^{\text{elétrons}} \begin{cases} \left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\frac{h^2}{2m_e k} \sim 3.9\times10^9 K \sim 10^{10}K \text{ (não-relat.)} \\ \left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{1/3}\frac{hc}{k} \sim 10^{10}K \text{ (relativ.)} \end{cases}$$

e $$T_F^{\alpha} = T_F^{\text{elétrons}}\frac{m_e}{4m_p} \sim 10^{-4}\,T_F^{\text{elétrons}} \sim 10^6 K$$

- Desse modo, os elétrons constituem um gás degenerado $(T=10^7K < T_F^{\text{elétrons}} = 10^{10}K)$, cuja pressão é maior que

$$P_{\text{elétrons}} > \left(\frac{N}{V}\right) k T_F$$

os partículas α constituem um gás não-degenerado $(T > T_F^{\alpha} = 10^6 K)$, cuja pressão é da ordem de

$$P_\alpha \approx \left(\frac{N}{V}\right) kT << P_{\text{elétrons}}$$

- assim, a principal contribuição para a pressão no interior da estrela deve-se aos elétrons.

- Enquanto os núcleos de hélio (partículas alfa) se comportam como um gás não-relativístico e não-degenerado,

$$\langle \varepsilon \rangle \simeq \overset{10^{-23}}{k}\,\overset{10^{7}}{T} \simeq 10^{-16}\,\mathrm{J} \simeq 10^{3}\,\mathrm{eV} = 1\,\mathrm{keV} \ll m_\alpha c^2 \;(4\,\mathrm{GeV})$$

como a energia de Fermi dos elétrons é da ordem de

$$\varepsilon_F = k\,\overset{\sim 10^{10}\,\mathrm{K}}{T_F} \sim 3{,}4\times 10^{5}\,\mathrm{eV} = 0{,}34\,\mathrm{MeV}$$

os elétrons se comportam como um gás degenerado relativístico,

$$\langle \varepsilon \rangle \simeq \varepsilon_F \simeq 0{,}34\,\mathrm{MeV} \sim m_e c^2 \simeq 0.5\,\mathrm{MeV}$$

- a evolução do colapso estelar foi apropriadamente explicada em 1939 por Chandrasekhar, ao estabelecer a relação entre o raio e a massa de uma estrela anã branca, considerando que a pressão de um gás de férmions relativísticos fortemente degenerado contrabalança a pressão gravitacional.

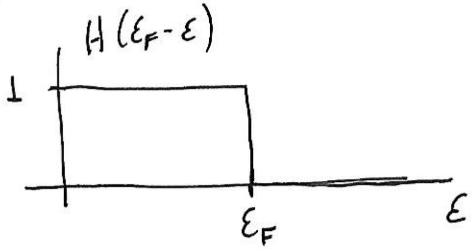
pressão

fator de correção p/ não homogeneidade

$$-P \underbrace{dV}_{4\pi r^2 dr} = (-\nabla\varphi)\, dr \simeq \alpha \frac{G M^2 dr}{r^2} \implies \boxed{P(R) = \frac{\alpha}{4\pi} G \frac{M^2}{R^4}}$$

- a pressão de um gás de férmions relativísticos fortemente degenerado pode ser determinada aproximadamente por

$$\begin{cases} \langle n(\varepsilon)\rangle = H(\varepsilon_F - \varepsilon) \\ g(\varepsilon) = \dfrac{V}{\pi^2} \dfrac{\varepsilon^2}{(\hbar c)^3} \quad (\varepsilon \simeq pc) \end{cases}$$



$$P_0 V = \frac{1}{3} \int_0^\infty \varepsilon\, g(\varepsilon) \langle n(\varepsilon)\rangle\, d\varepsilon = \frac{V}{3\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^3} \int_0^\infty \langle n(\varepsilon)\rangle\, \varepsilon^3\, d\varepsilon$$

$$P_0 = \frac{c}{3\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F=\varepsilon_F/c} p^3\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{p}\right)^2\right]dp$$

$$= \frac{c}{12\pi^2\hbar^3}\left[p_F^4 + (mc)^2 p_F^2\right] = \frac{c}{12\pi^2\hbar^3}\,p_F^4\left[1+\left(\frac{mc}{p_F}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = (pc)^2\left[1+\left(\frac{mc}{p}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$d\varepsilon = c^2\frac{p}{\varepsilon}\,dp = \frac{c}{\left[1+\left(\frac{mc}{p}\right)^2\right]^{1/2}} = c\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{p}\right)^2\right]$$

$$p_F = \frac{\varepsilon_F}{c} = \frac{kT_F}{c} = \left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{1/3}\overset{2\pi\hbar}{h} = \left(3\pi^2\frac{N}{\underset{\frac{4}{3}\pi R^3}{V}}\right)^{1/3}\hbar$$

$$= \left(\frac{9}{4}\pi \underset{M/2m_p}{N}\right)^{1/3}\frac{\hbar}{R} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3}\left(\frac{M}{2m_p}\right)^{1/3}\frac{\hbar}{R}$$

$$\boxed{P_0 = \frac{\hbar c}{12\pi^2}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{4/3}\left(\frac{M}{2m_p}\right)^{4/3}\frac{1}{R^4}\left[1+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\frac{4}{9\pi}\right)^{2/3}\left(\frac{2m_p}{M}\right)^{2/3}R^2\right]}$$

Em equilíbrio,

$$P_0 = P(R) \Longrightarrow M^{2/3} = \frac{\hbar c/G}{(2m_p)^{4/3}}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{4/3}\frac{1}{\alpha 3\pi}\left[1-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\frac{8m_p}{9\pi M}\right)^{2/3}R^2\right]$$

assim,

$$1-\left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3} = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\frac{8m_p}{9\pi M}\right)^{2/3}R^2$$

onde $M_0 = \underbrace{\left(\frac{9\pi}{4}\right)^2\frac{1}{\alpha^{3/2}(3\pi)^{3/2}}}_{\frac{9}{16}\left(\frac{3\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2}}\frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{(2m_p)^2} = \delta\,\frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{(2m_p)^2} \sim 10^{30}\,\mathrm{kg}$

Ou seja,

$$\boxed{R = \frac{(9\pi)^{1/3}}{2}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)\left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/3}\left[1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}\right]^{1/2}}$$

$$M_0 = 1.44 M_{\odot}$$ massa do Sol ($\sim 10^{30}$ kg) (Chandrasekhar)

- Segundo Chandrasekhar, a condição de equilíbrio entre o raio e a massa de uma estrela estabelece um limite p/ o qual uma estrela pode se tornar uma <u>anã branca</u> estável, após a fusão de todo o seu hidrogênio.

- Se a massa da estrela for maior que o chamado limite de Chandrasekhar, os elétrons reagem com os prótons gerando nêutrons e neutrinos (processo beta inverso), e podem se tornar uma <u>estrela de nêutrons</u>.

- De maneira análoga, mas levando-se em conta a relatividade geral, pode-se encontrar uma massa limite, acima da qual uma estrela de nêutrons pode se tornar um <u>buraco negro</u>.