

Teoria da Relatividade Restrita

Vitor Oguri

Sumário

- Conceitos pré-relativísticos
- Transformações de Galileu
- Princípio da Relatividade de Galileu
- Problema com a dinâmica newtoniana
- O espaço-tempo de Einstein
- Medições de tempo
- Medições de distância
- Princípio da Relatividade de Einstein
- Transformações de Lorentz
- Fórmula de Einstein para velocidade

Sumário

- Equações de movimento da partícula
- Energia e momentum: relações de Einstein
- Limites clássico e semi-relativístico
- Equações de movimento de Einstein
- Transformações de energia e momentum
- Quadrivetores de Minkowski
- Dinâmica relativística da partícula
- Efeito Doppler

Conceitos pré-relativísticos

- os conceitos de espaço e tempo são fundamentais em qualquer teoria física
- concepção dos filósofos gregos e cientistas modernos (Galileu, Descartes e Newton):
 - a duração dos eventos (fenômenos) é caracterizada pela variação uniforme e contínua do tempo
 - o espaço é uma espécie de palco (estático) no qual os fenômenos ocorrem, e as possíveis variações de posição de um corpo constituem também um contínuo
- o espaço-tempo é contínuo, homogêneo e isotrópico

Conceitos pré-relativísticos

Além dessas hipóteses, a Física Clássica pressupõe também que:

- a duração de um evento é a mesma para observadores em referenciais distintos $\Rightarrow$ **invariância dos intervalos temporais**
- o comprimento de um objeto, ou o deslocamento de uma partícula, é o mesmo para observadores em referenciais distintos $\Rightarrow$ **invariância dos intervalos espaciais (distâncias)**

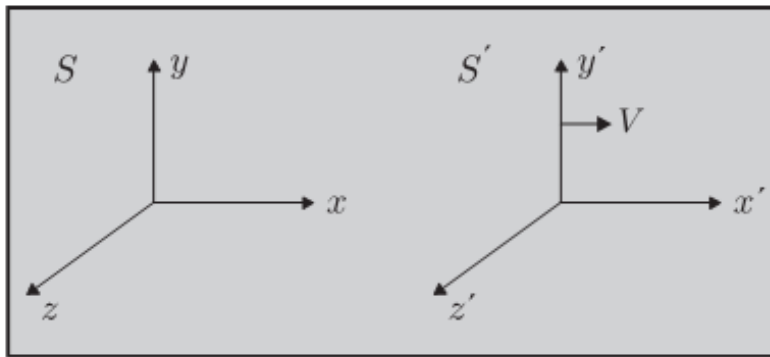
Essas hipóteses estão, tacitamente, incorporadas na Mecânica Clássica e no Eletromagnetismo, as duas teorias fundamentais da Física Clássica.

Transformações de Galileu

Uma vez aceito a homogeneidade, a isotropia e a continuidade do espaço e do tempo, e as invariâncias da duração dos eventos e do comprimento de um objeto, as leis da Mecânica de Newton ainda pressupõem que elas sejam válidas apenas em referenciais inerciais. Essa hipótese é denominada **princípio da Relatividade de Galileu**.

Todas essas hipóteses da Mecânica implicam que as relações entre as coordenadas de posição e tempo, correspondentes a dois referenciais inerciais distintos, são lineares e dadas pelas chamadas **transformações de Galileu**.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right.$$



S' e S têm eixos paralelos
e coincidentes em $t=t'=0$

translação uniforme de S'
na direção de x
(boost na direção x)

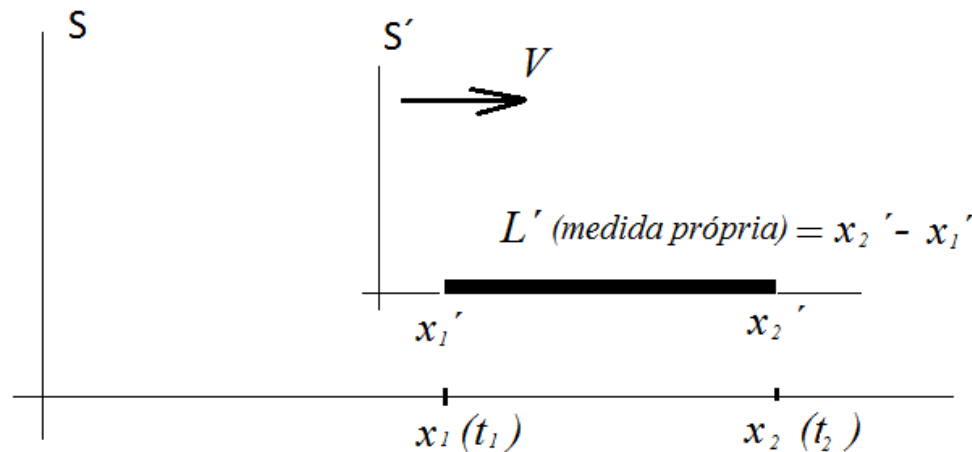
A isotropia espacial implica que apenas a coordenada espacial na direção do movimento é afetada.

Transformações de Galileu

É claro que as transformações de Galileu subentendem as hipóteses de invariância dos intervalos espacial e temporal.

evento 1 : $t_1 = t_1'$

evento 2 : $t_2 = t_2'$ $\Rightarrow t_2' - t_1' = t_2 - t_1$ ($T' = T$) independente dos locais de ocorrência
(invariância da duração de eventos locais e não-locais)



$L = x_2 - x_1$ ($t_1 = t_2$) medidas de comprimento em um referencial para o qual um objeto está em movimento devem ser simultâneas

$$x_1' = x_1(t_1) - V t_1$$

$$\Rightarrow x_2' - x_1' = x_2 - x_1$$

$$x_2' = x_2(t_2) - V t_2$$

$L' = L$ (invariância do comprimento)

Princípio da Relatividade de Galileu

Sendo $dt' = dt$, as relações entre as velocidades de uma partícula segundo dois referenciais inerciais é dada pela fórmula de Galileu,

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V & (v'_x = v_x - V) \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}}$$

e as acelerações por

$$\begin{cases} \frac{dv'_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} & (a'_x = a_x) \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{a}' = \vec{a}} \quad (\text{invariante})$$

Como as forças de interação ou dependem da distância, ou da velocidade relativa ou do intervalo de tempo, a resultante das forças sobre uma partícula é um invariante de Galileu, ou seja, $\vec{F}' = \vec{F}$. E, uma vez que a massa de uma partícula é um invariante para qualquer observador ($m' = m$), a equação de movimento da Mecânica mantém a mesma forma em qualquer referencial inercial.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}' = m\vec{a}'$$

Diz-se que a equação é covariante com relação às transformações de Galileu.

As equações de movimento de Newton são covariantes com relação às transformações de Galileu

Problema com a dinâmica newtoniana

Uma conclusão das leis de Newton, que se sabe hoje não se verificar, é a não existência de um limite para a velocidade de uma partícula.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \text{cte.} \\ \vec{v}(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v \rightarrow \infty$$

- A dinâmica relativística, desenvolvida por Einstein, impõe um limite (c – a velocidade da luz no vácuo) para a velocidade de uma partícula.
- As equações de Maxwell não são covariantes com relação às transformações de Galileu.

O espaço-tempo de Einstein

A revisão dos conceitos de espaço e tempo é aprofundada por Einstein (1905).

Segundo Einstein, a medida do comprimento de um objeto é uma operação complexa que exige do observador a avaliação da simultaneidade de ocorrência de vários eventos.

Até as análises de Einstein, acreditava-se que a avaliação da simultaneidade era absoluta, ou seja, não dependia do estado de movimento do observador em relação ao local de ocorrência dos eventos.

A teoria da Relatividade Restrita, desenvolvida por Einstein, estabelece que tanto a duração dos eventos, como os comprimentos dependem do estado de movimento do observador, ou seja, do referencial segundo o qual as medidas são realizadas.

Princípio da Relatividade de Einstein

- A essência da Teoria da Relatividade de Einstein não é tanto a relativização dos conceitos de espaço e tempo, mas, sim, a reafirmação de que as leis da natureza devem ser independentes de referenciais.
- Procurando as relações entre os campos eletromagnéticos em dois referenciais inerciais, um pouco antes das análises de Einstein, Lorentz (1904) deduz as equações que relacionam as coordenadas espaço-temporais correspondentes, hoje denominadas **transformações de Lorentz**.
- Einstein, por sua vez, deduz as transformações de Lorentz e estabelece uma nova dinâmica, reformulando dentre outros, os conceitos de espaço e tempo, a partir de duas hipóteses:
 - **princípio da relatividade restrita**: as leis da Física devem ser as mesmas para todos os referenciais; inerciais
 - **princípio da invariância da velocidade da luz**: a velocidade de propagação da luz no vácuo tem um valor constante dado por
$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$
independente do estado de movimento do emissor, para qualquer observador.

Princípio da Relatividade de Einstein

A partir desses dois postulados, Einstein também desenvolve uma nova teoria dinâmica, mais adequada que a dinâmica newtoniana, para descrever o movimento de uma partícula carregada sob ação de um campo eletromagnético, restabelecendo o princípio de que todo sistema de referência inercial é equivalente para a descrição dos fenômenos físicos. As relações entre as coordenadas espaço-temporais em dois referenciais inerciais distintos, no entanto, não são mais dadas pelas transformações de Galileu, mas, sim, pelas transformações de Lorentz.

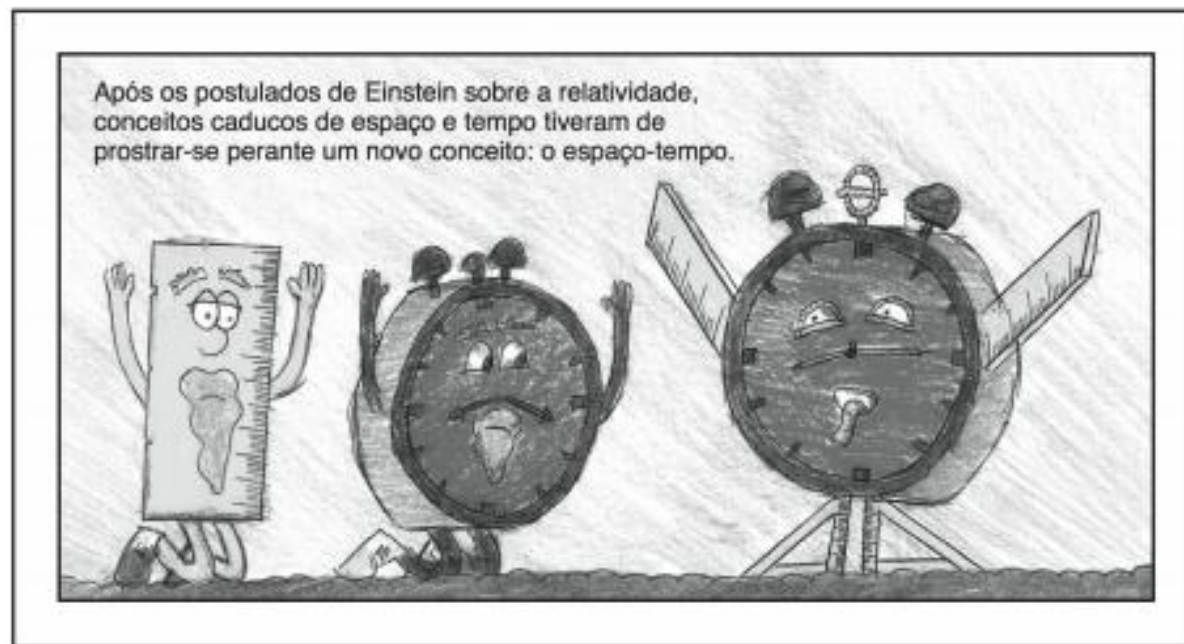


Figura 6.8: O novo conceito de espaço-tempo.

Além desses postulados, Einstein admite também, como na Física Clássica, a homogeneidade e a isotropia do espaço. Desse modo, as transformações entre sistemas de coordenadas em referenciais inerciais distintos continuam sendo lineares.

Medidas próprias de tempo

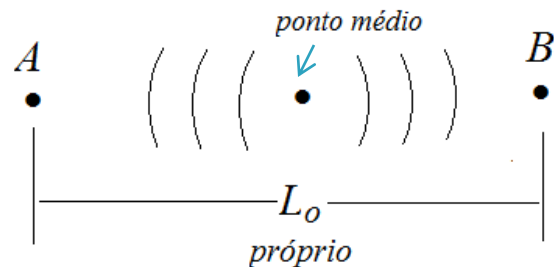
- A determinação da medida de um intervalo de tempo depende da existência de fenômenos cuja ocorrência se repete ordenadamente ao longo de intervalos de tempo iguais, denominados períodos. Inicialmente, Galileu utilizou o período de seu próprio batimento cardíaco (relógio biológico) . No entanto, logo descobriu o isocronismo das pequenas oscilações de um pêndulo.
- Os cronômetros e relógios atuais utilizam padrões bem menores que a reação humana (0.1 s), e permitem que um único observador, praticamente, avalie o instante de ocorrência de qualquer **evento local** em seu referencial.
- Medidas da duração de eventos locais são denominadas medidas próprias de intervalos de tempo ou, brevemente, como **tempo próprio**.
- Avaliação do instante de ocorrência de **eventos não locais** exige a medição de tempo em diferentes regiões do espaço, ou seja, a existência de “observadores” com relógios sincronizados.
- Antes das análises de Einstein, acreditava-se que relógios sincronizados em um dado referencial estariam sincronizados para qualquer outro referencial, ou seja, o sincronismo não dependeria do estado de movimento dos relógios.

A relatividade do sincronismo implica a relatividade da simultaneidade.

Sincronismo e simultaneidade relativa

Simultaneidade relativa e o não sincronismo de relógios em movimento

- A e B são relógios inicialmente sincronizados, em repouso segundo um observador S'
- Uma fonte de luz localizada no ponto médio emite ondas esféricas
- Evento 1: A recebe um sinal de uma dada frente de onda
- Evento 2: B recebe um sinal da mesma frente de onda recebida por A



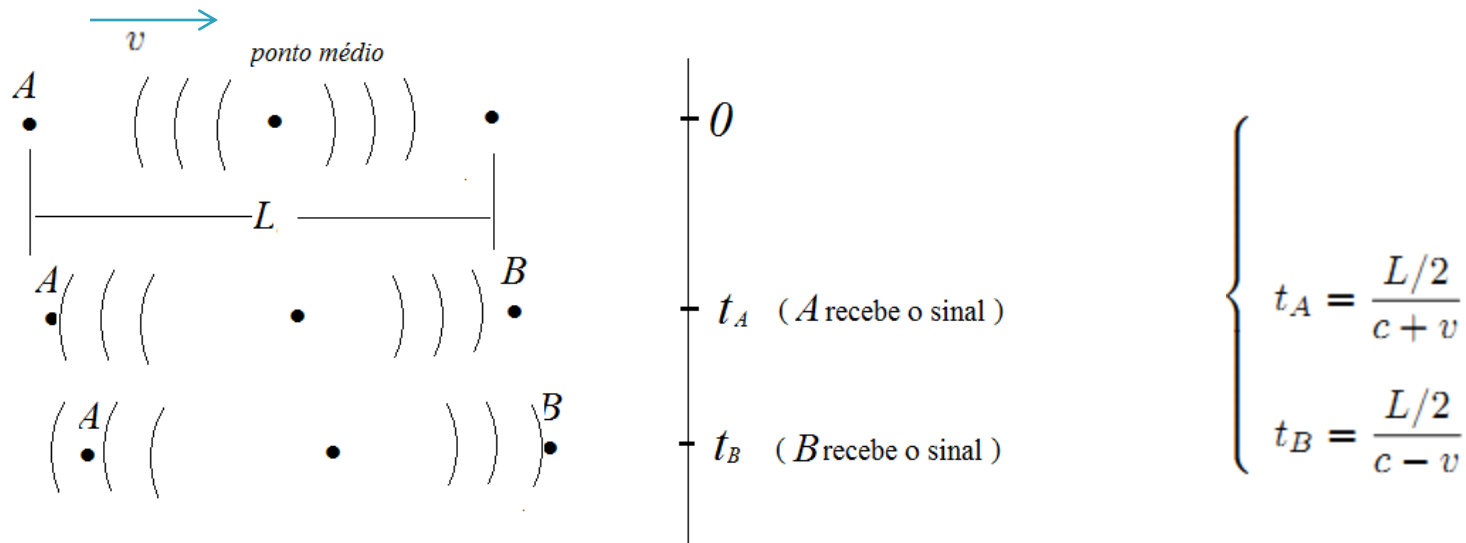
$$t'_A = \frac{L_0/2}{c} \quad t'_B = \frac{L_0/2}{c}$$
$$t'_A = t'_B$$

- Segundo S' , os relógios permanecem sincronizados e recebem os sinais de uma mesma frente de onda (esférica) simultaneamente
- Os eventos 1 e 2 são simultâneos para S'

Sincronismo e simultaneidade

Simultaneidade relativa e o não sincronismo de relógios em movimento

Para um observador S, segundo o qual os relógios e a fonte se deslocam com velocidade v , A e B não recebem os sinais de uma mesma frente de onda no mesmo instante.



$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{L}{2} \left[\frac{(c + v) - (c - v)}{c^2 - v^2} \right] = \frac{Lv/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t = \gamma^2 L \frac{v}{c^2}$$

- Os relógios não permanecem sincronizados ($t_A \neq t'_A$)
 - Os eventos 1 e 2 não são simultâneos para S
- $\gamma(v) = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ o fator de Lorentz.

Sincronismo e simultaneidade relativa

⁶O termo “observador”, como utilizado no texto, não deve ser interpretado como alguém que apenas visualiza a ocorrência ou a evolução de um evento (fenômeno). O termo representa a capacidade de acesso às medidas de grandezas físicas associadas a um evento, principalmente, de tempo e espaço, com relação a um dado referencial. Segundo esse referencial, em todos os pontos de seu sistema de coordenadas estão localizados relógios em repouso e sincronizados entre si, que determinam o tempo do referencial, ou do “observador”.

⁷Segundo a cinemática não relativística, não haveria discordância sobre o intervalo de tempo entre os eventos. Tanto o observador O' como o observador O atribuiriam aos eventos 1 e 2 os tempos $t_A = \frac{L_0/2}{c+v}$ e $t_B = \frac{L_0/2}{c-v}$, respectivamente. Para O' , $(c+v)$ e $(c-v)$ seriam as velocidades da luz nos dois sentidos. E, para O , a medida de comprimento L seria igual ao comprimento próprio L_0 .

Medidas de comprimento

Medidas de comprimento ao longo do movimento

- **evento 1:** coincidência do ponto extremo A da barra com um ponto P_1 de uma régua
- **evento 2:** coincidência do outro ponto extremo B da barra com um ponto P_2 da régua



Se a régua e a barra estão em repouso entre si, apenas as condições de simultaneidade que definem separadamente os eventos 1 e 2 são necessárias para se determinar a distância entre A e B , ou seja, o comprimento próprio da barra (L_0). A simultaneidade entre os eventos 1 e 2 não é necessária, e, uma vez que os pontos estão em repouso entre si, os eventos 1 e 2 podem ser avaliados em instantes distintos.

Medidas de comprimento

Para um observador O solidário à barra

Se a barra se move em relação à régua, a determinação da distância entre A e B , ou seja, do comprimento não próprio da barra (L), segundo o observador O , além das condições de simultaneidade que definem separadamente os eventos 1 e 2, exige-se também a simultaneidade desses eventos entre si. Portanto, o observador deve ser capaz de avaliar as coincidências dos pontos A e P_1 e dos pontos B e P_2 , em um mesmo instante.

Uma vez que a simultaneidade de eventos não locais é relativa, os comprimentos próprio e não próprio são diferentes. Ou seja, as medidas de comprimento de uma barra para observadores que se deslocam paralelamente à barra são relativas.

$$L \neq L_0$$

Medidas de comprimento

A invariância da medida de comprimento na direção transversal ao movimento

Enquanto a medida de comprimento de uma barra ao longo do movimento é relativa, a medida de comprimento de uma barra perpendicular ao movimento é invariante.

Sejam duas barras A e B de mesmo comprimento próprio (L_0), que se aproximam uma da outra, perpendicularmente ao solo (Figura 6.12), e em movimento uniforme.

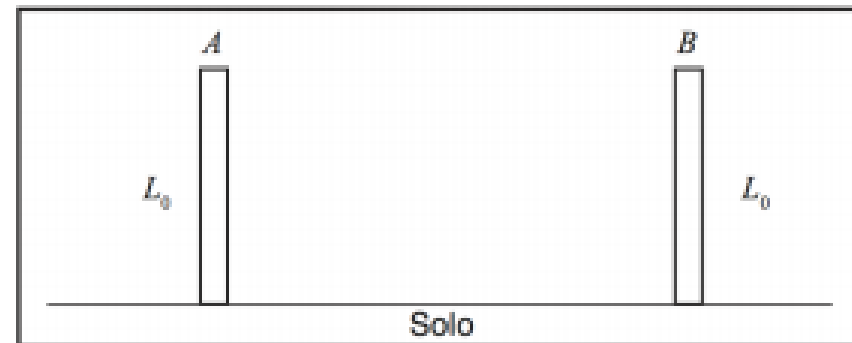


Figura 6.12: Barras que se aproximam perpendicularmente ao solo.

Medidas de comprimento

Para um observador que se desloca com a barra B , a barra A se aproxima com velocidade constante v e tem comprimento L (Figura 6.13), não necessariamente igual ao comprimento próprio L_0 da barra B .

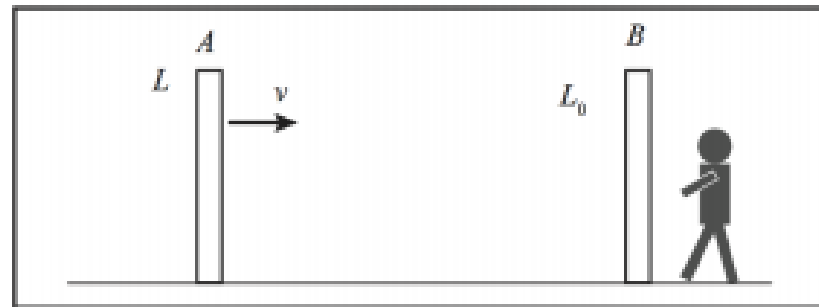


Figura 6.13: Barra A aproximando-se de B , segundo observador solidário a B .

Supondo que, ao se cruzarem, a barra A deixa uma marca na barra B abaixo de sua extremidade (Figura 6.14), então,

$$L < L_0$$



Figura 6.14: Barras cruzando-se, segundo observador solidário a B .

Medidas de comprimento

Reciprocamente, para um observador que se desloca com a barra A , a barra B se aproxima com velocidade constante v (Figura 6.15), o comprimento L' parecerá menor que o comprimento próprio L_0 .

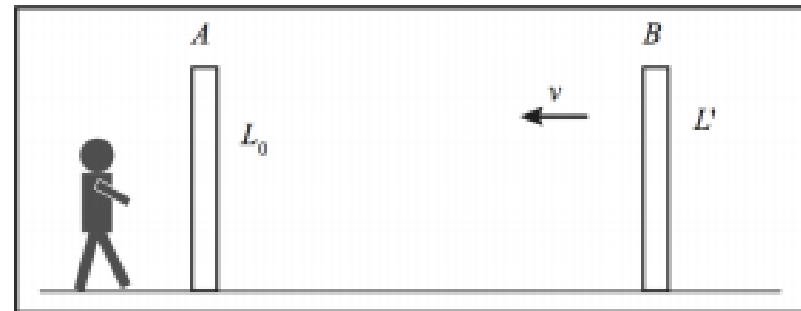


Figura 6.15: Barra B aproximando-se de A , segundo observador solidário a A .

Portanto, a barra B deverá deixar uma marca na barra A abaixo de sua extremidade (Figura 6.16), ou seja,

$$L' < L_0$$

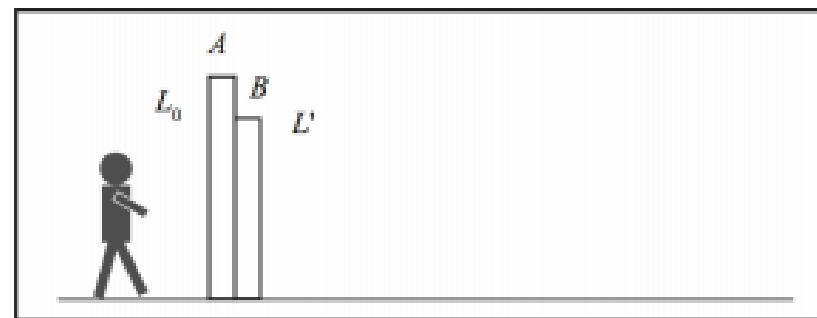


Figura 6.16: Barras cruzando-se, segundo observador solidário a A .

Medidas de comprimento

De maneira análoga, supondo que para ambos os observadores as medidas não próprias sejam maiores que o comprimento próprio, obtém-se outra contradição. Essas contradições são removidas somente se

$$L = L' = L_0$$

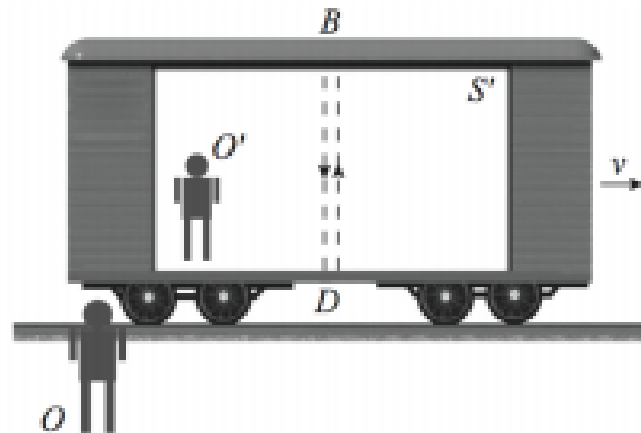
ou seja, as medidas de comprimento de uma barra para observadores que se deslocam perpendicularmente a ela são invariantes.

Nesse exemplo, o argumento utilizado para remover as contradições só é possível porque um dos extremos de cada barra está permanentemente em contato com o solo e, portanto, avalia-se o que ocorre apenas em uma das extremidades de cada barra. Desse modo, ambos os observadores avaliam a simultaneidade de um mesmo evento (local) e, portanto, não deve haver ambiguidades nas conclusões de cada observador.

Dilatação temporal

Do mesmo modo que as medidas de comprimento ou as distâncias entre pontos do espaço são relativas, a duração temporal de um evento também depende do estado de movimento do observador.

Seja um observador O' , em repouso no interior de um trem que se desloca com velocidade v com relação a um observador O (Figura 6.17), e ambos observam a reflexão de um sinal luminoso que parte do piso, no teto do trem.



A duração (τ_0) desse processo para O' será dada por

$$\tau_0 = 2 \frac{\overline{BD'}}{c}$$

Como a partida e a chegada do sinal ocorrem em um mesmo ponto do espaço para o observador O' , τ_0 é um intervalo de tempo próprio.

Dilatação temporal

Para o observador externo O , o caminho percorrido pelo sinal está representado na Figura 6.18, ou seja, o sinal é emitido no ponto A , refletido no ponto B e detectado no ponto C .

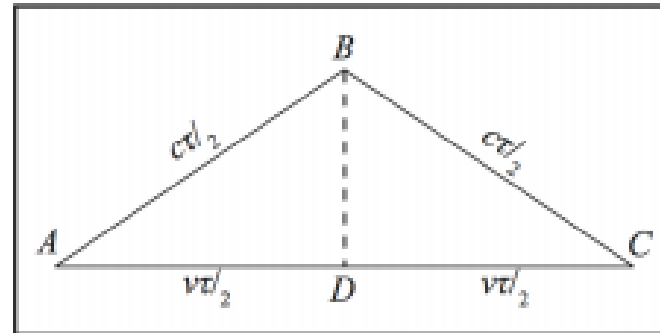


Figura 6.18: Reflexão de um sinal luminoso no teto de um trem, segundo um observador exterior.

Assim, devido ao movimento do trem, para o observador O , os eventos não ocorreram em um mesmo ponto (eventos não locais), e o intervalo de tempo (τ) não próprio entre suas ocorrências é dado por

$$\tau = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{c} = 2 \frac{\overline{AB}}{c} \quad \left(\overline{AB} = \overline{BC} \right)$$

Desse modo, a relação entre os dois intervalos de tempo é dada por

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{AB}}$$

Dilatação temporal

Uma vez que a linha que determina a altura do trem é perpendicular ao movimento, a altura do trem $\overline{BD}$ é invariante para os observadores, e pode ser expressa como

$$\overline{BD'} = \overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}$$

no qual $\overline{AD} = \overline{DC} = v\tau/2$ e $\overline{AB} = c\tau/2$, obtém-se

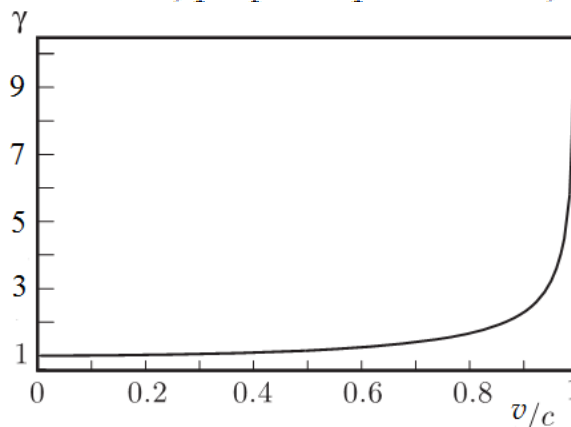
$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}}{\overline{AB}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

ou

$$\tau = \gamma(v) \tau_0 \quad \Rightarrow \quad \tau \geq \tau_0$$

sendo $\gamma(v) = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ o fator de Lorentz.

Ou seja, a medida de intervalo de tempo não próprio é maior que a medida de intervalo de tempo próprio. Esse resultado, proposto por Larmor, em 1900, é denominado *dilatação temporal*.



Contração espacial

Contração espacial

Seja um trecho de estrada cujo comprimento próprio é L_0 (Figura 6.11), na qual um observador A desloca-se com velocidade v em relação a um observador B em repouso na estrada.



Figura 6.11 Comprimento próprio de um trecho de estrada.

Para o observador B , o intervalo de tempo (τ) que A percorre o trecho indicado de estrada é dado por

$$\tau = \frac{L_0}{v}$$

Para o observador A , o intervalo de tempo necessário para o trecho ser percorrido é um intervalo de tempo próprio igual a τ_0 , tal que

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Uma vez que o observador A pode determinar o comprimento (L) do trecho de estrada por

$$L = v\tau_0$$

obtém-se

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)} \quad \Rightarrow \quad L \leq L_0$$

Ou seja, a medida de comprimento não própria é menor que a medida própria. Esse resultado, proposto por Lorentz e Fitzgerald, é denominado *contração do comprimento*.

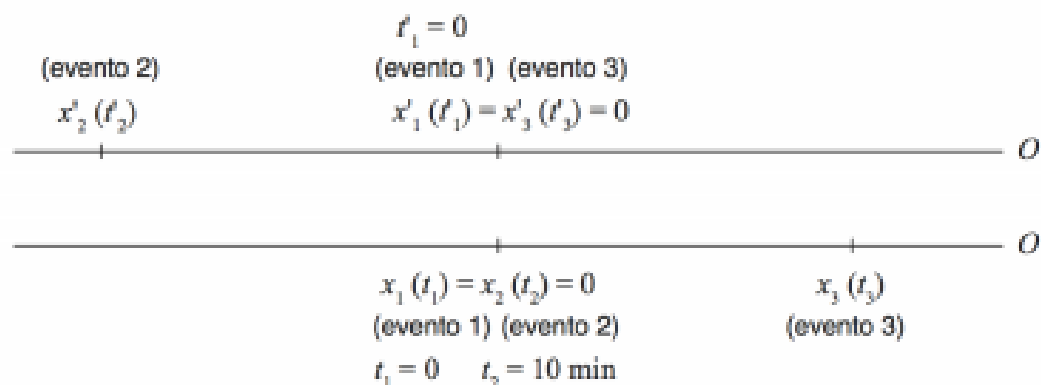
Consequências do princípio da relatividade

- Do mesmo modo que Newton, Einstein admite também que o espaço-tempo é contínuo, homogêneo e isotrópico.
- Transformações de coordenadas entre referenciais inerciais são lineares.
- A relatividade do sincronismo e a isotropia espacial implicam que apenas as coordenadas temporal e espacial na direção do movimento são afetadas pelo movimento.
- Medida de comprimento de uma barra para observadores que se deslocam perpendicularmente à barra é invariante.
- Medidas de comprimento de uma barra para observadores que não se deslocam perpendicularmente à barra dependem do movimento.
- Medida de comprimento de uma barra para observadores que se deslocam paralelamente à barra dependem do movimento.
- Medidas de comprimento no referencial segundo o qual o objeto mensurado está em repouso são denominadas medidas próprias de comprimento ou, brevemente, **comprimento próprio**.

I) Um foguete (fictício) em movimento uniforme passa por uma estação espacial (evento 1) na direção e sentido positivo do eixo x do sistema de coordenadas de um observador (O) na estação, com velocidade $v = 0,6c$. Nesse instante, o astronauta (O') no foguete e o observador na estação sincronizam seus relógios e suas posições, para $t_1 = t'_1 = 0$ e $x_1 = x'_1 = 0$, respectivamente. Dez minutos (t_2) mais tarde, o observador na estação envia um pulso luminoso ao encontro do foguete (evento 2). Ainda segundo o observador na estação, o pulso alcança o astronauta (evento 3) no instante t_3 .

Uma vez que a velocidade de O' para O é igual $v = 0,6c$, o fator de Lorentz é dado por

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5/4$$



- Os eventos 1 e 2 ocorrem em um mesmo ponto para o observador (O) na estação, i.e., $(t_2 - t_1)$ é um intervalo de tempo próprio.

Assim, $t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) \Rightarrow t'_2 = \frac{5}{4} \times 10 = 12,5 \text{ min}$.

Ou seja, enquanto para o astronauta o pulso foi enviado 12,5 min após eles terem sincronizado os seus relógios, para o observador na estação, o evento 2 ocorre após um intervalo de tempo próprio igual a 10 min.

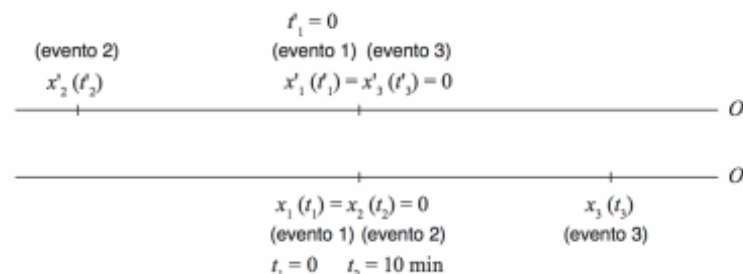
- Uma vez que para o astronauta (O') a velocidade da estação é igual a $v' = -v$, a coordenada x'_2 da estação quando o pulso é enviado é dada por

$$x'_2 - x'_1 = v'(t'_2 - t'_1) \Rightarrow x'_2 = -1,35 \times 10^8 \text{ km}$$

Ou seja, para o astronauta, a distância da estação ao foguete era igual a $d'_2 = 1,35 \times 10^8 \text{ km}$.

Por outro lado, para o observador na estação, quando o pulso é enviado, a distância entre eles é dada por

$$d_2 = v(t_2 - t_1) \Rightarrow d_2 = 1,08 \times 10^8 \text{ km}$$



- Os eventos 2 e 3 ocorrem em pontos associados a coordenadas distintas para ambos os observadores.
- Segundo o astronauta, o intervalo de tempo (não próprio) no qual o pulso se desloca da estação ao foguete, ou seja, o intervalo de tempo entre os eventos 2 e 3, é dado por

$$t'_3 - t'_2 = \frac{d'_2}{c} = 7,5 \text{ min} \quad \Rightarrow \quad t'_3 = t'_2 + \frac{d'_2}{c} = 20 \text{ min}$$

- Os eventos 1 e 3 ocorrem em um mesmo ponto para o astronauta (O'), ou seja, $(t'_3 - t'_1)$ é um intervalo de tempo próprio.

$$\text{Assim, } t_3 - t_1 = \gamma(t'_3 - t'_1) \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{5}{4} \times t'_3 = \frac{5}{4} \times 20 = 25 \text{ min}$$

Ou seja, enquanto para o observador na estação o pulso alcança o astronauta 25 min após eles terem sincronizado os relógios, para o astronauta, o evento 3 ocorre após um intervalo de tempo próprio é igual 20 min.

- Para o observador na estação, a distância entre o foguete e a estação quando o pulso alcança o astronauta, ou seja, a separação espacial entre os eventos 2 e 3, ou entre 1 e 3, é dada por

$$d_3 = x_3 - x_2 = c(t_3 - t_2) \quad \Rightarrow \quad d_3 = 2,25 \times 10^8 \text{ km}$$

Para o astronauta, ao ser alcançado pelo pulso, a distância entre o foguete e a estação corresponde a

$$d'_3 = d'_2 + v(t'_3 - t'_2) \quad \Rightarrow \quad d'_3 = 2,16 \times 10^8 \text{ km}$$

II) O tempo próprio de vida (τ_0) dos múons é da ordem de $2,2 \mu\text{s}$. Se um feixe de múons penetra a atmosfera, a 10 km de altura (h_0), com velocidade de $0,99c$, estime o tempo de vida para um observador no solo.

Calculando-se o fator de Lorentz,

$$v = 0,99c \quad \Rightarrow \quad \gamma \simeq 7,089$$

Para um observador no solo, o tempo de vida é dado por

$$\tau = \gamma \tau_0 = 15,6 \mu\text{s}$$

De acordo com a lei de decaimento de uma partícula instável, após um intervalo de tempo $t = h/c$ (tempo necessário para a partícula com velocidade próxima da luz percorrer a distância h) o número de partículas sobreviventes é dado por

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

Desse modo, o número de múons que consegue alcançar o solo é da ordem de

$$N = \frac{N_0}{e^{h_0/c\tau}} \simeq \frac{N_0}{8,5}$$

ou seja, cerca de 10% dos múons.

Se não houvesse o efeito de dilatação temporal, esse número seria dado por

$$N = \frac{N_0}{e^{h_0/c\tau_0}} \simeq \frac{N_0}{3,8 \times 10^6}$$

ou seja, cerca de 0,00003%.

Assim, para cada dez milhões (10^7) de múons, presentes em um dado momento na atmosfera, que se deslocam para o solo com velocidade da ordem de c , cerca de um milhão (10^6) alcança o solo, e não apenas três (3) como previsto pela cinemática não relativística.

Por outro lado, como h_0 é uma medida própria, a distância (h) a ser percorrida pelos múons até o solo, no referencial do múon, é dada por

$$h = \frac{h_0}{\gamma} \simeq 1,41 \text{ km}$$

de modo que a estimativa para o número de múons que consegue alcançar pode ser expressa também como

$$N = \frac{N_0}{e^{h/c\tau_0}} \simeq \frac{N_0}{8,5}$$

III) Uma nave espacial (fictícia) cujo comprimento próprio é igual a 30 m desloca-se com velocidade igual a $6,0 \times 10^4$ km/s, segundo um observador na Terra. Um tripulante lança uma bola para o alto e a mesma retorna (segundo ele) à sua mão em 3,0 s. Determine o tempo de voo da bola e o comprimento da nave, para o observador na Terra.

Nesse caso, o fator de Lorentz é dado por

$$v = 6,0 \times 10^4 \text{ km/s} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6,0 \times 10^4}{3,0 \times 10^5}\right)^2}} = 1,0206$$

Uma vez que o lançamento e o retorno da bola ocorrem em um mesmo ponto, para o tripulante, $\tau_0 = 3,0$ s é um intervalo de tempo próprio. Assim, para o observador na Terra, o tempo de voo da bola é dado por

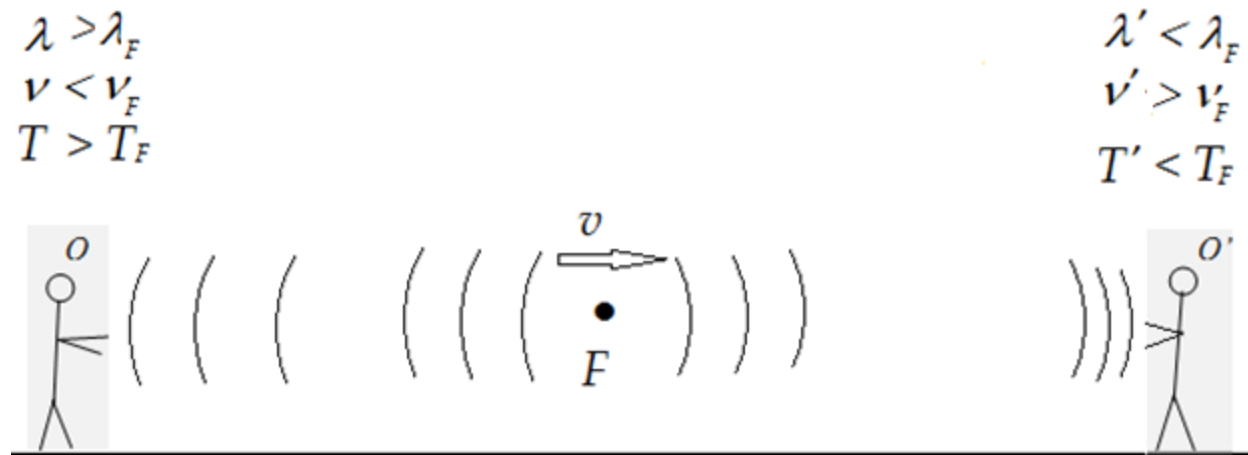
$$\tau = \gamma \tau_0 = 3,02 \text{ s}$$

Como o comprimento determinado por um tripulante no referencial da nave é próprio, o comprimento da nave, para o observador na Terra, é dado por

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = 29,39 \text{ m}$$

Efeito Doppler (longitudinal)

Apesar de a velocidade da luz no vácuo ter um valor constante (c) para qualquer referencial, a frequência (ν), o comprimento de onda (λ) e, portanto, a cor da luz dependem do referencial. Esse fenômeno, denominado *efeito Doppler*, ocorre sempre que a fonte de ondas (F) e o observador estão em movimento um em relação ao outro (Figura 6.20).



Sejam O e O' observadores no solo, para os quais a fonte se afasta e se aproxima, respectivamente. Os relógios de ambos os observadores foram sincronizados com o relógio de um observador que se desloca com a fonte, no instante $t = 0$, quando uma frente de onda Σ_1 é enviada por ela.

Efeito Dopler (longitudinal)



Figura 6.21: Fonte se aproximando do observador, que se encontra na linha de ação da velocidade da fonte.

Segundo o observador O' , para o qual a fonte está se aproximando (Figura 6.21):

- a frente de onda Σ_1 , que o alcança no instante t_1 , foi emitida quando a fonte estava em x_1 , ou seja,

$$t_1 = \frac{x_1}{c}$$

- a frente de onda Σ_2 emitida quando a fonte estava em x_2 após um período próprio T_F , que corresponde, pela equação (6.13), a um intervalo de tempo γT_F para O' , o alcança no instante t_2 , ou seja,

$$t_2 = \frac{x_2}{c} + \gamma T_F$$

Assim, o período da onda (T') determinado por O' é dado por

$$T' = t_2 - t_1 = \frac{(x_2 - x_1)}{c} + \gamma T_F$$

Efeito Doppler (longitudinal)

Por outro lado, o tempo γT_F é também igual à distância percorrida pela fonte dividido por sua velocidade, ou seja,

$$\gamma T_F = \frac{(x_1 - x_2)}{v}$$

Escrevendo

$$\frac{(x_2 - x_1)}{c} = -\frac{(x_1 - x_2)}{v} \frac{v}{c} = -\gamma T_F \frac{v}{c}$$

A equação (6.15) pode ser expressa como

$$T' = T_F \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) = T_F \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T_F \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Logo, a relação entre as respectivas frequências é dada por

$$\boxed{\nu' = \nu_F \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}} \quad (\text{fonte se aproximando})$$

No limite não relativístico ($v \ll c$),

$$\nu' = \nu_F \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Efeito Doppler (longitudinal)

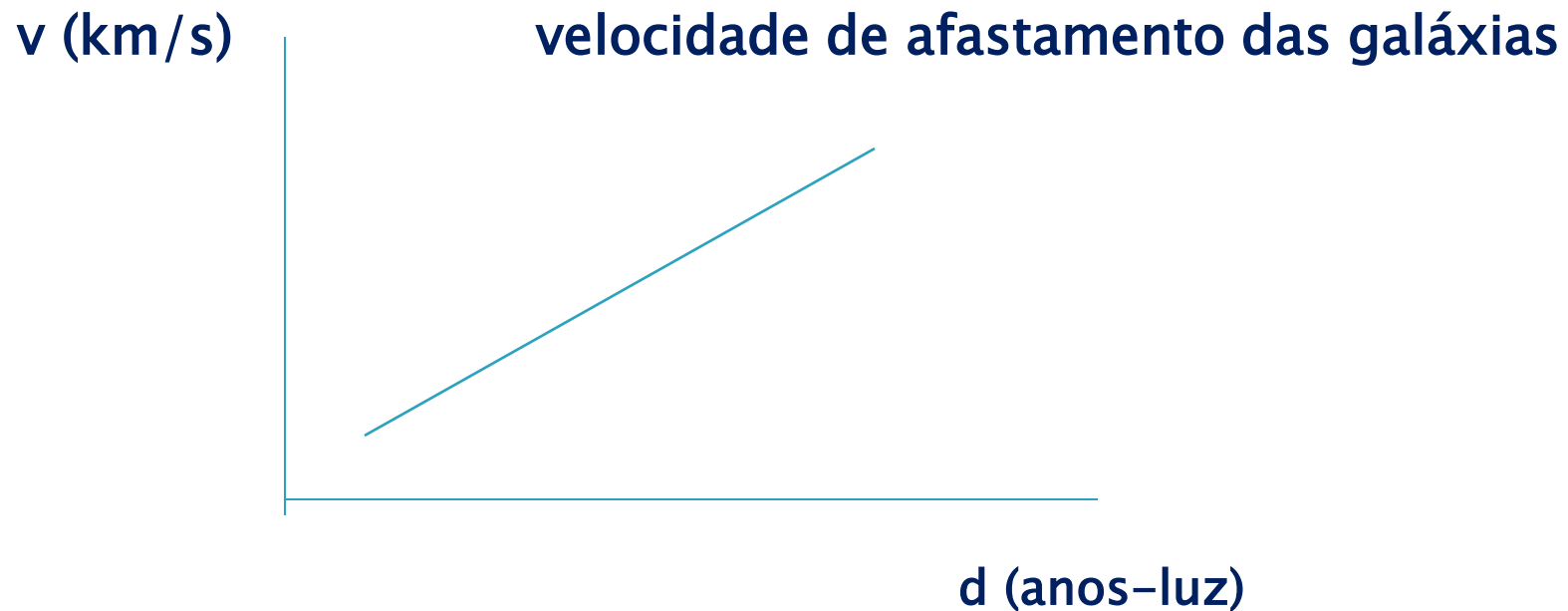
Reciprocamente, para o observador O , para o qual a fonte se afasta,

$$\nu = \nu_F \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (\text{fonte se afastando})$$

A equação (6.17) descreve o chamado *efeito Doppler longitudinal*, quando o observador está na mesma linha de ação da velocidade da fonte.

$$v \ll c \quad \Rightarrow \quad \nu = \nu_F \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (\text{fonte se afastando})$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{v}{c} = \left| \frac{\Delta \nu}{\nu} \right| \quad (\text{redshift})$$

lei de Hubble



$$V = H_0 d \quad H_0 = 70 \text{ km}/(\text{s.Mpc}^{-1})$$

$$1 \text{ Mpc} = 3 \times 10^{19} \text{ km}$$

$$\frac{1}{H_0} = \frac{3 \times 10^{19}}{70 \times \underbrace{3 \times 10^7}_{1 \text{ ano}}} \simeq 14 \text{ bilhões de anos}$$

Efeito Doppler

No caso geral, quando o observador (O) não está na mesma linha de ação do movimento da fonte (Figura 6.22), os instantes t_1 e t_2 são dados por

$$\begin{cases} t_1 = \frac{r_1}{c} \\ t_2 = \frac{r_2}{c} + \frac{x_1 - x_2}{v} \end{cases}$$

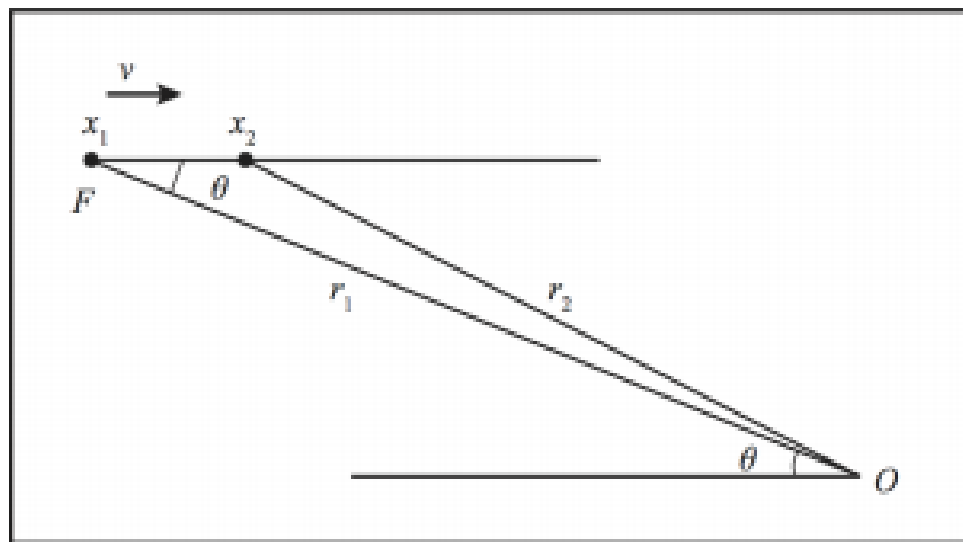
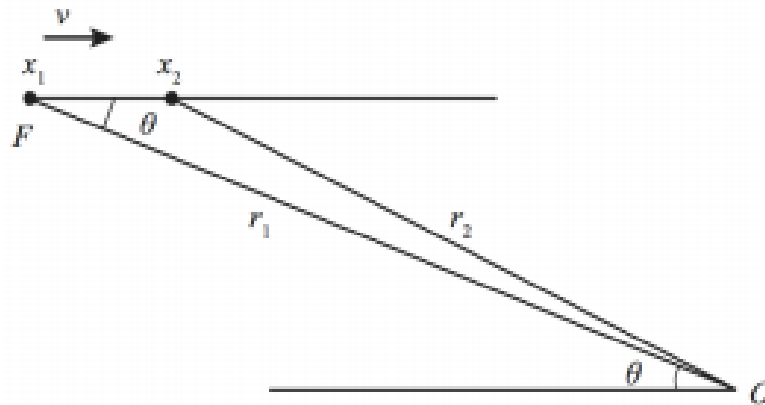


Figura 6.22: Efeito Doppler para um observador fora da linha de ação do movimento da fonte.

Efeito Doppler



Para pontos afastados, uma vez que $r_1 - r_2 \simeq (x_1 - x_2) \cos \theta$, o período da onda (T), segundo o observador O , é dado por

$$T = t_2 - t_1 = \left(\frac{x_1 - x_2}{v} \right) \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

ou seja,

$$T = T_F \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e a relação entre as respectivas frequências é dada por

$$\nu = \nu_F \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

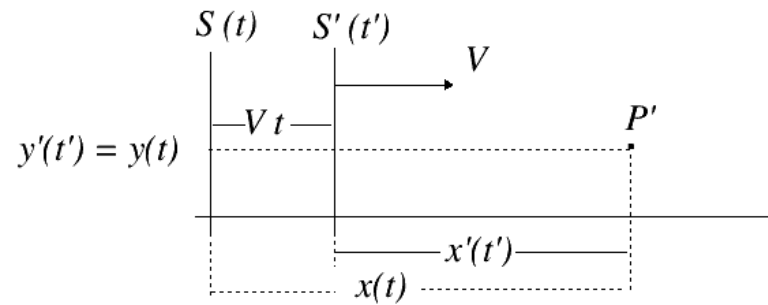
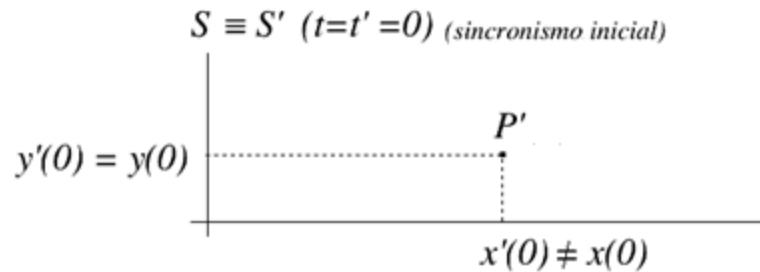
Efeito Doppler

A equação (6.18) generaliza todos os casos para o efeito Doppler.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0 \text{ rad} \quad (\text{fonte se aproximando}) & \Rightarrow \quad \nu = \nu_F \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ \theta = \pi \text{ rad} \quad (\text{fonte se afastando}) & \Rightarrow \quad \nu = \nu_F \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ \theta = \pi/2 \text{ rad} \quad (\text{Doppler transversal}) & \Rightarrow \quad \nu = \nu_F \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{array} \right.$$

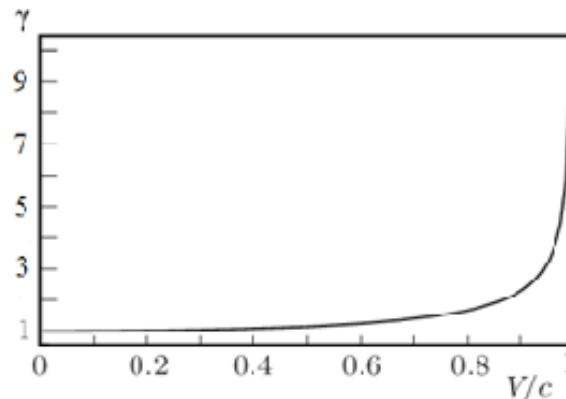
Transformações de Lorentz

Boost de Lorentz na direção +x



$$\left\{ \begin{array}{l} x - Vt = \underbrace{\frac{x'}{\gamma}}_{\text{contração}} \Rightarrow \boxed{x' = \gamma(x - Vt)} \Rightarrow \boxed{x = \gamma(x' + Vt')} \\ \boxed{y' = y} \\ \boxed{z' = z} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \boxed{t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)} \Rightarrow \boxed{t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right)} \end{array}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Fórmula de Einstein para velocidade

Para um boost de Lorentz na direção +x

$$\left\{ \begin{array}{l} dt' = \gamma dt \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) \\ dx' = \gamma dt (v_x - V) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt'} = v'_x = \frac{v_x - V}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \\ \frac{dy'}{dt'} = v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \\ \frac{dz'}{dt'} = v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \end{array}$$

$$v_y = v_z = 0 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v - V}{\left(1 - \frac{vV}{c^2} \right)} \quad (v, v' \parallel V) \quad (\text{Einstein} - 1905)$$

$$v = c \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{c - V}{\left(1 - \frac{V}{c} \right)} = c \quad (\text{invariância da velocidade da luz no vácuo})$$

Equações de movimento da partícula

Segundo Planck, as equações de movimento de uma partícula podem ser escritas de forma análoga à equação de movimento de Newton, utilizada pela Eletrodinâmica de Lorentz,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

se o *momentum* ($\vec{p}$) de uma partícula de massa m , que se desloca com velocidade $\vec{v}$, for definido como

$$\vec{p} = \gamma(v)m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para campos uniformes a equação de movimento pode ser imediatamente integrada, obtendo-se

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0) + \int_0^t \vec{F}(t') dt'$$

Para uma força constante ou crescente com o tempo, implica que o momentum cresce indefinidamente.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \rightarrow \infty$$

Equações de movimento da partícula

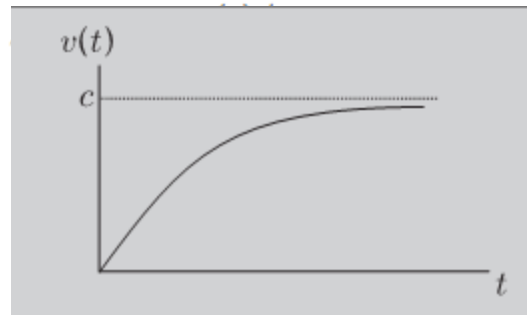
Apesar do momentum poder crescer indefinidamente, a equação de movimento relativística estabelece um limite igual a velocidade da luz no vácuo (c) para a velocidade de uma partícula massiva.

Uma vez que

$$\vec{p}(t) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \left(\frac{p}{m}\right)^2 (1 - v^2/c^2)$$

implica que

$$v(t) = \frac{p(t)/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}}$$



ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \rightarrow c \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) \rightarrow 0$$

Limite para velocidade de uma partícula massiva

Equações de movimento da partícula

Multiplicando (escalarmente) a equação de movimento pela velocidade,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \vec{F}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = m \left[\frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad m \left[\frac{d\gamma}{dt} v^2 + \gamma \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

e notando-se que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \gamma \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{c^2}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

obtém-se

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Forças conservativas: $\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi$

$$d(\gamma m c^2) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -\vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = -d\phi \quad \Longrightarrow \quad d(\gamma m c^2 + \phi) = 0$$

Energia :

$$\boxed{\epsilon = \gamma m c^2 + \phi}$$

Partícula livre :

$$\boxed{\epsilon = \gamma m c^2}$$

expressão relativística para a **energia de uma partícula livre**.

Energia e momentum: relações de Einstein

As definições relativísticas do momentum e da energia, resulta que a relação entre essas grandezas pode ser expressa como

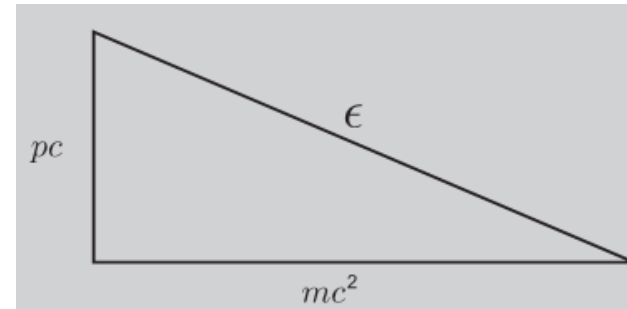
$$\begin{array}{l} \vec{p} = \gamma m \vec{v} \\ \epsilon = \gamma m c^2 \end{array} \longrightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{\epsilon}{c^2} \vec{v}} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Alternativamente, utilizando as expressões para o quadrado do momentum e da energia, obtém-se

$$\begin{array}{l} \epsilon^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \\ p^2 c^2 = \epsilon^2 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2} \end{array} \longrightarrow \epsilon^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \underbrace{\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_1$$

ou seja,

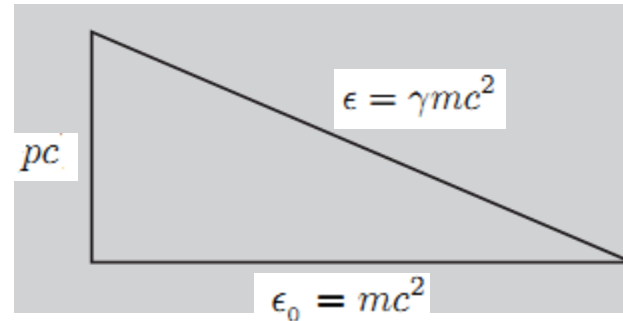
$$\boxed{\epsilon^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$



Relações de Einstein

Energia de repouso

$$\epsilon^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$



A energia de uma partícula livre não é apenas cinética, possui uma componente devida ao movimento (pc) e outra componente denominada energia de repouso (ϵ_0)

$$\epsilon_0 = mc^2$$

$$m = \left(\frac{\epsilon}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > 0 \quad (v < c)$$

Somente partículas sem massa podem se deslocar com a velocidade da luz

$$v = c \longrightarrow m = 0 \longrightarrow \epsilon = pc$$

Limites clássico e semi-relativístico

Limite clássico

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \gamma(v) \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \vec{p} = m\vec{v}$$

Limite semi-relativístico

$$\lim_{v \ll c} \gamma = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2\right) \\ \epsilon = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Equações de movimento de Einstein

De acordo com as equações de movimento relativísticas,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) &= \vec{F} \\ \frac{d}{dt}(\gamma m c^2) &= \vec{F} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v})$$

utilizando-se as componentes paralela e transversal,

$$\gamma m \left[\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\parallel} + \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\perp} \right] = \vec{F}_{\parallel} \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{1/\gamma^2} + \vec{F}_{\perp}$$

obtêm-se as equações de Einstein, equação (6.33),

$$\begin{cases} \gamma^3 m \vec{a}_{\parallel} = \vec{F}_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \gamma m \vec{a}_{\perp} = \vec{F}_{\perp} = e \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \end{cases}$$

Dinâmica Relativística

Algumas consequências das equações de Einstein

a) Movimento em um campo elétrico uniforme

Para uma partícula de massa m e carga elétrica e , inicialmente em repouso, em um campo elétrico uniforme independente do tempo (E_0),

$$F = eE_0 \quad \Rightarrow \quad p(t) = eE_0 t$$

donde

$$v(t) = \frac{(eE_0/m)t}{\sqrt{1 + (eE_0 t/mc)^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \rightarrow c$$

$$a(t) = \frac{eE_0/m}{[1 + (eE_0 t/mc)^2]^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) \rightarrow 0$$

$$x(t) = \frac{c}{(eE_0/mc)} \left[\sqrt{1 + (eE_0 t/mc)^2} - 1 \right] \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow ct$$

No limite clássico ($c \rightarrow \infty$)

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \begin{cases} v(t) = \frac{eE_0}{m} t \\ a(t) = \frac{eE_0}{m} = a(0) \\ x(t) = \frac{1}{2} \frac{eE_0}{m} t^2 \end{cases}$$

Dinâmica Relativística

b) Movimento em um campo magnético uniforme

Para uma partícula de massa m e carga elétrica $-e$, que se desloca sob ação de um campo magnético uniforme independente do tempo $\vec{B}_0$, a força de Lorentz

$$\vec{F} = -e \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 \implies \vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \implies \frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = 0 \implies v = \text{constante}$$

implica que o movimento é circular e uniforme.

Por outro lado,

$$v = \text{constante} \implies \gamma = \text{constante} \implies \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \implies \gamma m a_c = e \frac{v}{c}$$

uma vez que a aceleração centrípeta a_c é igual a v^2/r , obtêm-se

$$\gamma m v = p = \frac{r e B_0}{c}$$

e

$$r = \gamma \underbrace{\left(\frac{mc v}{e B_0} \right)}_{r_0} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{mc^2}{e B_0} \quad (r > r_0) \quad (6.46)$$

onde r_0 é o raio clássico da trajetória, determinado pela Eletrodinâmica Clássica.

Transformações de energia e momentum

De acordo com as transformações de Lorentz, os fatores de Lorentz associados às velocidades v , v' e V estão relacionados por

$$\gamma(v') = \gamma(v)\gamma(V)\left(1 - v_x V/c^2\right) \quad \text{onde}$$
$$\gamma(v') = \left(1 - v'^2/c^2\right)^{-1/2}$$
$$\gamma(v) = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$
$$\gamma(V) = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2}$$

Assim, as relações entre os momenta e as energias de uma partícula de massa m , para um boost de Lorentz na direção $+x$, são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon' = \gamma(v')mc^2 = \gamma(V)\left[\gamma(v)mc^2 - \gamma(v)mv_x V\right] = \gamma(V)(\epsilon - p_x V) \\ p'_x = \gamma(v')mv'_x = \gamma(V)\left[\gamma(v)mv_x - \gamma(v)mV\right] = \gamma(V)(p_x - \epsilon V/c^2) \\ p'_y = \gamma(v')mv'_y = \gamma(v)mv_y = p_y \\ p'_z = \gamma(v')mv'_z = \gamma(v)mv_z = p_z \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \epsilon' = \gamma(V)(\epsilon - \vec{p} \cdot \vec{V}) \\ \vec{p}'_{\parallel} = \gamma(V)(\vec{p}_{\parallel} - \epsilon \vec{V}/c^2) \\ \vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \end{array} \right.$$

ou seja, obedecem às transformações de Lorentz.

Quadrivetores de Minkowski

As transformações de Lorentz implicam que as expressões

$$(\epsilon'/c)^2 - p_x'^2 - p_y'^2 - p_z'^2 = (\epsilon/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2$$

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \rightarrow \text{invariante}$$

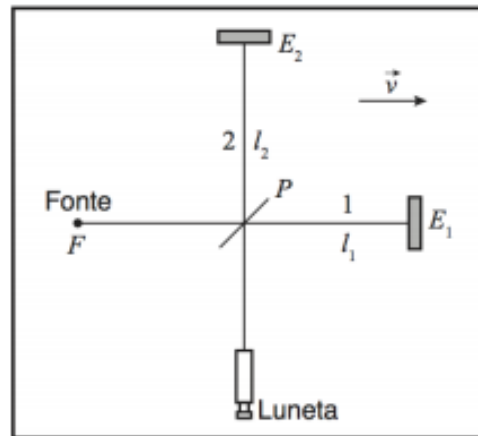
são invariantes segundo referenciais inerciais.

Essas expressões são definidas como módulo dos chamados **quadrivetores de Minkowski**

$$(ct, x, y, z)$$

$$(\epsilon/c, p_x, p_y, p_z)$$

Experimentos de Michelson–Morley

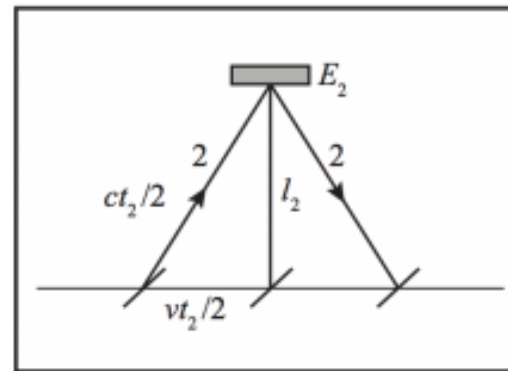


Os experimentos de 1881 a 1887 foram baseados na mesma concepção, de acordo com o esquema da Figura 6.2, no qual um raio luminoso, de comprimento de onda (λ) na faixa do amarelo ($5,89 \times 10^{-7}$ m), emitido por uma fonte F , é dividido em duas partes (1 e 2), por transmissão e reflexão, ao incidir sobre uma lâmina de vidro P , sobre a qual se deposita uma fina camada de prata. Os raios 1 e 2 são refletidos nos espelhos E_1 e E_2 e retornam à placa P ; devido à diferença de marcha dos raios, podem-se observar franjas de interferência em uma luneta. A localização exata das franjas depende da diferença dos comprimentos l_1 e l_2 .

Suponha que o aparato, juntamente com a Terra, se mova com velocidade $v \simeq 30$ km/s ($v \ll c$) em relação ao éter. Ao longo do braço de comprimento l_1 , para um observador em repouso em relação ao éter, o intervalo de tempo (t_1) gasto pelo raio 1 para percorrer a distância $\overline{PE_1}$ e depois $\overline{E_1P}$, segundo as transformações de Galileu (Seção 6.4.1), é dado por

$$t_1 = l_1 \left[\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right] = \frac{2l_1/c}{1-v^2/c^2} \simeq 2\frac{l_1}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (6.1)$$

Experimentos de Michelson–Morley



Durante o intervalo de tempo (t_2) que o raio 2 leva para retornar à lâmina P , percorrendo uma distância ct_2 , o aparato se desloca de uma distância vt_2 (Figura 6.3), tal que

$$(ct_2/2)^2 = (vt_2/2)^2 + l_2^2$$

Assim, o intervalo de tempo t_2 é dado por

$$t_2 = \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq 2\frac{l_2}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (6.2)$$

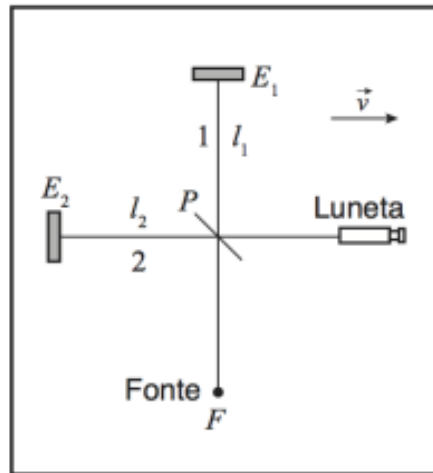
Devido às supostas invariâncias do intervalo de tempo e da distância, t_1 e t_2 são iguais aos intervalos atribuídos por um observador na Terra.

Quando interferem nos vários pontos da luneta, a diferença de tempo, $\Delta t = t_1 - t_2$, implica diferenças de marcha entre os raios 1 e 2 determinadas por

$$\delta = c\Delta t = 2(l_1 - l_2) + (2l_1 - l_2) \frac{v^2}{c^2} \quad (6.3)$$

Experimentos de Michelson–Morley

Se o aparato for girado em 90° no sentido anti-horário (Figura 6.4), os tempos (t_1^* e t_2^*) gastos, respectivamente, pelos os raios 1 e 2 para retornarem à lâmina P são dados por



$$t_1^* = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq 2\frac{l_1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (6.4)$$

$$t_2^* = \frac{2l_2/c}{1 - v^2/c^2} \simeq 2\frac{l_2}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

A diferença de tempo, $\Delta t^* = t_1^* - t_2^*$, implica diferenças de marcha dos raios 1 e 2 determinadas por

$$\delta^* = c\Delta t^* = 2(l_1 - l_2) + (l_1 - 2l_2) \frac{v^2}{c^2} \quad (6.6)$$

Desse modo, esperava-se que, com a rotação do aparato, as franjas de interferência nas duas situações se deslocassem de uma quantidade da ordem de

$$\frac{\delta - \delta^*}{\lambda} = \frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad (6.7)$$

Experimentos de Michelson–Morley

Nos experimentos de 1881, os comprimentos dos braços eram praticamente iguais a 1,2 m, o que corresponderia a um deslocamento $\delta - \delta^* = 0,04$ franjas. Como o deslocamento observado foi da ordem de 0,02 franjas, o resultado não foi conclusivo.

Ao repetir os experimentos com Morley, em 1887, o comprimento efetivo dos braços, por meio de múltiplas reflexões, foi estendido para cerca de 11 m, o que corresponderia a um deslocamento da ordem de 0,4 franjas. Dessa vez, o deslocamento observado foi de apenas 0,01 franjas, e, portanto, o resultado da experiência de Michelson-Morley foi negativo: *nenhum efeito foi observado*. Logo, o resultado da experiência não confirmou a existência do vento de éter.

Cabe ressaltar que a análise de Michelson supõe que a luz seria alguma coisa cuja velocidade se compusesse segundo a fórmula de adição de velocidades derivada das transformações de Galileu.

Lorentz e o físico irlandês George Fitzgerald chegaram a propor que todo objeto sofreria uma contração em seu comprimento ao longo da direção de seu movimento. Após outras tentativas de Larmor, do próprio Lorentz, e do matemático francês Jules Henri Poincaré, o resultado nulo no experimento de Michelson-Morley pôde ser compreendido, em 1905, com o artigo intitulado “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”, no qual Einstein estabelece que a hipótese de um *éter* luminífero é supérflua para a validade