Espaços Lineares

$\mathbb{R}$ → reais (reta)

$\mathbb{C}$ → complexos (plano)

$C_{(a,b)}$ → funções contínuas ou analíticas no intervalo (a,b)

$L^2_{(a,b)}$ → funções de quadrado somável no intervalo (a,b)

R^3 – vetores geométricos no espaço ordinário tri-dimensional

V^N – matrizes colunas $(N\times 1)$ ou linhas $(1\times N)$

$M^{N\times N}$ – matrizes quadradas $(N\times N)$

P_n – polinômios em uma variável real ou complexa de grau menor ou igual a $(n-1)$

$Ly=0$ – soluções de uma equação linear homogênea

espaço linear: $V=\{u, v, w, ---\}$ vetores $\qquad C=\{\alpha, \beta, \gamma, --\}$ (escalares) nos reais ou complexos

operações fechadas $\begin{cases} u+v \in V \\ \alpha u \in V \end{cases}$

$$\begin{cases} u+v = v+u & \text{(comutatividade)} \\ u+(v+w) = (u+v)+w & \text{(associatividade)} \\ \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v & \text{(distributividade)} \\ u+0 = u & \text{(neutro - vetor nulo)} \\ u+(-u) = 0 & \text{(simétrico)} \end{cases}$$

funções definidas em um espaço linear

- vetor $\longrightarrow$ vetor (operadores)
- vetor $\longrightarrow$ escalar (funcionais)

operadores

- projeção de q.q. vetor do espaço no plano
- rotação de q.q. vetor de R^3 em torno de um eixo
- matriz real $N \times N$ em $\mathbb{R}^N$
- derivação em $C_{(a,b)}$: $D f(x) = f'(x)$
- integração indefinida de uma função real : $\int f(x)\, dx = Lf = h(x)$

funcionais

- integral definida em um intervalo (a,b) : $\int_a^b x(t)\, dt = I(x)$
- determinante de uma matriz : $\det A$
- traço de uma matriz : $\operatorname{tr} A$
- produto escalar de funções complexas em um intervalo (a,b): $(x,y) = \int_a^b x^*(t)\, y(t)\, dt$

Operadores e funcionais lineares

- a álgebra linear é construída a partir dos operadores e funcionais lineares..

$f(x)$ - analítica $\Rightarrow$ $\begin{cases} a \dfrac{d^2 f}{dx^2} = h(x) \text{ (analítica)} \\ b \dfrac{df}{dx} = g(x) \text{ (analítica)} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $a \dfrac{d^2 f}{dx^2} + b \dfrac{df}{dx} = \underbrace{h(x) + g(x)}_{w(x)}$ (analítica)

linearidade $\Rightarrow$ $a \dfrac{d^2 f}{dx^2} + b \dfrac{df}{dx} = \left(\underbrace{a \dfrac{d^2}{dx^2} + b \dfrac{d}{dx}}_{} \right) f = w(x)$

soma de operadores lineares é um operador linear

- O conjunto dos operadores e funcionais lineares definidos em um espaço linear V também constitui um espaço linear.

- o espaço linear associado aos funcionais lineares definidos em um espaço linear V é denominado <u>espaço dual</u> (V^*).

Notação de Dirac

- correspondência entre um dado espaço linear (V) e seu dual (V^*)

$$|v\rangle \in V \quad (\text{ket}) \qquad \langle v| \in V^* \quad (\text{bra})$$

tal que o produto escalar pode ser expresso como

$$\langle w|v\rangle = (w, v)$$

e as operações lineares correspondentes como

$$\begin{cases} \alpha|v\rangle \longrightarrow \langle v|\alpha^* \\ A|v\rangle \longrightarrow \langle v|A^\dagger \end{cases}$$

$$\langle v|\big(A|w\rangle\big) = \begin{cases} (v, Aw) = (A^\dagger v, w) = \big(\langle v|A\big)|w\rangle \\ (Aw, v)^* = \big[\big(\langle w|A^\dagger\big)|v\rangle\big]^* = (Aw, v)^* = (w, A^\dagger v)^* = \big[\langle w|\big(A^\dagger|v\rangle\big)\big]^* \end{cases}$$

$$\boxed{\langle v|A|w\rangle = \langle w|A^\dagger|v\rangle^*} \quad \underset{(A^\dagger = A)}{\xRightarrow{\text{hermitiano}}} \quad \langle v|A|w\rangle = \langle w|A|v\rangle^*$$

Projetores

- $(\varphi_i, \varphi_i) = \langle \varphi_i | \varphi_i \rangle = 1 \implies \underset{\text{projeção na direção de } \varphi_i}{(\varphi_i, \psi)\varphi_i} = \varphi_i (\varphi_i, \psi) = \underbrace{|\varphi_i\rangle \langle \varphi_i}_{P_i \text{ (projetor)}} | \psi \rangle$

$$\boxed{P_i = |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|} \implies P_i^2 = P_i \text{ (idempotente)}$$

- $\{ |\varphi_i\rangle, \ i = 1, 2, \cdots N \}$ sistema ortonormal completo (base discreta)

$$\boxed{P_N = \sum_{i=1}^{N} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| = 1}$$

$$\psi = \sum_i (\varphi_i, \psi)\varphi_i = \sum_i \varphi_i (\varphi_i, \psi) \implies |\psi\rangle = \underbrace{\sum_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|}_{1} \psi \rangle$$

- representação espectral de um operador

$$A|\varphi_i\rangle = a_i |\varphi_i\rangle \implies A \underbrace{\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{1} = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \implies \boxed{A = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}$$

- $\{ |x\rangle, \ x \in \mathbb{R} \}$ sistema ortonormal completo (base contínua)

$$\boxed{\int |x\rangle \langle x| \, dx = 1}$$

bases contínuas e representações

$|x\rangle$ e $|p\rangle$ constituem bases contínuas

$$\begin{cases} x|x\rangle = x|x\rangle \\ p|p\rangle = p|p\rangle \end{cases}$$

$$|\psi\rangle = \int dx'\, |x'\rangle\langle x'|\psi\rangle \Longrightarrow \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} = \int dx'\, \langle x|x'\rangle \langle x'|\psi\rangle \quad \Rightarrow \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$$

$$\psi(x) = \int dx'\, \delta(x-x')\, \psi(x')$$

↳ representação de $|\psi\rangle$ na base $|x\rangle$

$$|\psi\rangle = \int dp'\, |p'\rangle\langle p'|\psi\rangle \Longrightarrow \underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\psi(p)} = \int dp'\, \langle p|p'\rangle \langle p'|\psi\rangle \quad \Rightarrow \langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$$

$$\psi(p) = \int dp'\, \delta(p-p')\, \psi(p')$$

↳ representação de $|\psi\rangle$ na base $|p\rangle$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int dp\, e^{i\frac{p}{\hbar}x}\, \psi(p) \Longrightarrow \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} = \langle x| \int dp\, |p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int dp\, \langle x|p\rangle \underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\psi(p)}$$

$$\boxed{\langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\, e^{i\frac{p}{\hbar}x}}$$