Introdução à QCD Perturbativa

Mauro Anselmino

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Torino

Francisco Caruso

Laboratório de Física Experimental de Altas Energias
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

José Roberto Mahon

Vitor Oguri

Instituto de Física Armando Dias Tavares
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Sumário

Capítulo 1

Espectroscopia hadrônica e quarks

Este primeiro capítulo apresenta uma breve introdução à espectroscopia hadrônica, com ênfase em fatos e características que deram origem ao conceito de *quark* como constituinte fundamental dos hádrons, a partir de princípios de invariância associados ao grupo de simetria $SU(3)_c$; introduz o conceito de cor.

Os *quarks*, ainda, com os *glúons*, são os ingredientes fundamentais da Cromodinâmica Quântica (QCD).

A QCD[1] é a teoria desenvolvida, no início dos anos 1970, para descrever as interações fortes, como resultado do trabalho coletivo de físicos teóricos e experimentais, em vários países, desde os anos 1930. Foi elaborada após o sucesso da formulação da teoria de unificação eletrofraca nos anos 1960, por Glashow, Weinberg e Salam, a partir do mesmo princípio de simetria (*princípio de gauge*), implícito na formulação da teoria que descreve as interações eletromagnéticas no domínio quântico-relativístico, a QED.[2]

[1] *Quantum Chromodynamics.*
[2] *Quantum Electrodynamics.*

As interações eletromagnéticas se manifestam, entre partículas com carga elétrica, pela troca de fótons. Para a QCD, as interações fortes se manifestam entre os *quarks*, pela troca de *glúons*. Diferentemente da QED, tanto os *quarks* quanto os *glúons* são dotados de uma nova espécie de carga, denominada *cor*. Daí o nome de Cromodinâmica Quântica.

Os *quarks* e os *léptons* são as partículas elementares do Modelo Padrão da Física de Partículas ou Física de Altas Energias.

1.1. Espectroscopia hadrônica e isospin

• **Núcleons** (p, n)**: isospin** $\mathbf{I = 1/2}$

Uma vez que prótons e nêutrons possuem o mesmo *spin* ($J = 1/2$, considerando $\hbar = 1$), e as interações "fortes" entre eles no interior do núcleo, aparentemente, não dependem nem de suas massas nem de suas cargas elétricas, W. Heisenberg, ainda em 1932, logo após a descoberta do nêutron por J. Chadwick no laboratório Cavendish de Cambridge, considera que ambos[3] constituem autoestados degenerados do hamiltoniano que descreve essas interações fortes. No domínio dessas interações fortes, prótons e nêutrons seriam genericamente conhecidos como *núcleons*, e só seriam revelados pelas interações eletromagnéticas, as quais são sensíveis à carga elétrica, ou pelas interações fracas, como no decaimento β do nêutron.

As interações no interior do núcleo são denominadas interações fortes residuais ou nucleares, uma vez que elas se manifestam diretamente entre os constituintes dos núcleos e têm a mesma intensidade para qualquer par de núcleons, próton-próton, próton-nêutron ou nêutron-nêutron.

---

[3]O próton foi identificado por E. Rutherford, no Laboratório Cavendish, em 1919, e o nêutron é uma partícula instável, de vida média $\tau = 885{,}7$ s, que decai em próton, elétron e antineutrino do elétron por interação fraca (decaimento β).

Heisenberg associa prótons e nêutrons aos autoestados de uma grandeza análoga ao *spin* ($s = 1/2$) do elétron, denominada *isospin* ($I = 1/2$), cujas componentes obedecem às mesmas propriedades algébricas do *spin* eletrônico,[4]

$$I_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \qquad I_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 \qquad I_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

Assim, o próton (p) e o nêutron (n) constituiriam um dubleto de autoestados simultâneos dos operadores

---

[4] Para um elétron (*spin* s=1/2) não relativístico, as componentes de *spin* (S_x, S_y, S_z) são representadas por matrizes associadas às matrizes de Pauli,

$$S_x = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \tfrac{1}{2}\sigma_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \tfrac{1}{2}\sigma_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e os autoestados simultâneos de S^2 e da componente S_z, por matrizes colunas do tipo 2×1,

$$|1/2, +1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

denominadas espinores, tal que

$$S^2|1/2, \pm 1/2\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} + 1\right)|1/2, \pm 1/2\rangle \qquad S_z|1/2, \pm 1/2\rangle = \pm\tfrac{1}{2}|1/2, \pm 1/2\rangle$$

As matrizes de Pauli obedecem às seguintes propriedades

$$\sigma_k^2 = \mathrm{I}_2 \qquad \mathrm{tr}\ \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{kj} \qquad \left[\sigma_i, \sigma_j\right] = 2\mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k \qquad \left\{\sigma_i, \sigma_j\right\} = 2\delta_{ij} I_2$$

em que I_2 é a matriz identidade 2×2.

I^2 e I_3, representando um núcleon de *isospin* $I = 1/2$ e paridade $P = +1$, com as seguintes propriedades[5]

	I_3	dubleto	carga (Q)	massa (MeV)
núcleon $(I = 1/2)$	$+1/2$	$p = \|1/2, 1/2\rangle$	1	938,3
	$-1/2$	$n = \|1/2, -1/2\rangle$	0	939,5

O operador *isospin* comutaria com o hamiltoniano das interações fortes,

$$\left[H_{\text{forte}}, I^2\right] = \left[H_{\text{forte}}, I_3\right] = 0$$

mas não com os hamiltonianos das interações eletromagnéticas e fracas entre os núcleons:

$$\left[H_{\text{em}}, I^2\right] \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \left[H_{\text{fraca}}, I_3\right] \neq 0$$

De acordo com a Mecânica Quântica, o *isospin* seria uma grandeza conservada nas interações fortes, ou seja, as interações fortes não distinguem os membros de um mesmo grupo de *isospin*.

Do mesmo modo que a lei de conservação de *spin* está associada à simetria ou invariância do hamiltoniano de um sistema isolado com relação às rotações próprias do sistema no espaço dos espinores, diz-se, analogamente, que a lei de conservação de *isospin* está associada à simetria ou invariância do hamiltoniano de um sistema de núcleons em interações fortes com relação às rotações do sistema em um espaço linear abstrato de dimensão 2, algumas vezes chamado *espaço dos isospinores*.

[5] A carga elétrica (Q) é expressa como múltiplo do módulo da carga do elétron (e).

Essa propriedade das interações fortes residuais é chamada simplesmente de *simetria de isospin*. Tanto as interações fracas como as eletromagnéticas não exibem a simetria de *isospin*; entretanto, como em baixas energias as interações fracas são bem menos intensas (cerca de $0{,}001\%$) do que as interações eletromagnéticas, e essas, por sua vez, bem menos intensas (cerca de 1%) do que as interações fortes, considera-se a simetria de *isospin* uma *simetria aproximada* da natureza.

As partículas sujeitas às interações fortes residuais são coletivamente denominadas *hádrons*. Além disso, aqueles de *spin* semi-inteiro denominam-se *bárions*, e os de *spin* inteiro são chamados *mésons*.

• **Píons** $(\pi^{\pm}, \pi^{\circ})$ **: isospin** $\mathbf{I = 1}$

Com a descoberta dos píons carregados $(\pi^{\pm})$ em 1947, por C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini e C.F. Powell, em Bristol, a partir de observações de reações de raios cósmicos em emulsões fotográficas,[6] e dos píons neutros (π°), em 1950,[7] a simetria de *isospin* foi estendida aos mésons de *spin* $J = 0$. Os píons

[6]Os píons, previstos por H. Yukawa, em 1935, como mediadores das interações fortes, decaem $99{,}9\%$ das vezes em múons e neutrinos $(\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu_{\mu})$ em $2{,}6 \times 10^{-8}$ s, por interações fracas.

[7]No Sincrocíclotron de Berkeley, que acelerava prótons até 350 MeV. Os píons neutros decaem $98{,}8\%$ das vezes em 2 fótons $(\pi^{\circ} \to 2\gamma)$, em $8{,}4 \times 10^{-17}$ s, por interações eletromagnéticas.

estariam associados a um tripleto de *isospin* $I = 1$ e paridade $P = -1$, segundo o esquema a seguir.

	I_3	tripleto	carga (Q)	massa (MeV)
	$+1$	$\pi^+ = \|1, +1\rangle$	1	139,6
píon $(I = 1)$	0	$\pi^\circ = \|1, 0\rangle$	0	135
	-1	$\pi^- = \|1, -1\rangle$	-1	139,6

• **Partículas estranhas: káons (K^+, K°) e lambda (Λ°)**

Logo após a descoberta dos píons carregados, ainda em 1947 foram observadas, por G.D. Rochester e C.C. Butler, em Manchester, reações de raios cósmicos em câmaras de nuvens que produziam uma partícula neutra[8] (K°) de massa $m_{K^\circ} = 497{,}6$ MeV que decaía em um par de píons $(\pi^+$ e $\pi^-)$.[9]

Após as análises de Y. Nambu, K. Nishijima e Y. Yamaguchi, em 1951, e de A. Pais, em 1952, dos experimentos realizados no Cosmotron de Brookhaven,[10] estabeleceu-se que essas partículas eram produzidas aos pares por interações fortes, em intervalos de tempo da ordem de 10^{-23} s, mas com tempos de decaimento muito menores, da ordem de 10^{-10} s, por interações fracas. Essas partículas, posteriormente identificadas como mésons de *spin* $J = 0$ (K°) e bárions de *spin* $J = 1/2$ (Λ°), eletricamente neutros, foram denominadas *partículas estranhas*.[11]

---

[8] Inicialmente chamada partícula V.

[9] Outra partícula neutra (Λ°) de massa $m_{\Lambda^\circ} = 1115{,}68$ MeV, que decaía em p e π^- foi observada por C. Anderson, em 1950, na câmara de nuvens construída por ele e por R.A. Millikan, no Caltech.

[10] O primeiro acelerador da era moderna da Física de Partículas, que acelerava prótons até 2,2 GeV.

[11] O méson estranho eletricamente positivo K^+ foi detectado por Powell, em 1949, a partir do decaimento $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$.

Por exemplo, a partir da reação $\pi^- + p \to \Lambda^\circ + K^\circ$, por interações fortes,[12] observaram-se os decaimentos $\Lambda^\circ \to p + \pi^-$ e $K^\circ \to \pi^+ + \pi^-$, por interações fracas.

---

[12] As reações $\pi^- + p \to \Lambda^\circ$ e $\pi^- + p \to K^\circ$ nunca foram observadas isoladamente.

- **Ressonâncias: deltas ($\Delta^{++}, \Delta^{\pm}, \Delta^{\circ}$) e rôs ($\rho^{\pm}, \rho^{\circ}$)**

Ainda nos anos 1950, com a construção de aceleradores de partículas mais potentes, inicia-se também a chamada *espectroscopia hadrônica*, com a observação de novas partículas, denominadas *ressonâncias hadrônicas*, que são produzidas e decaem por interações fortes, em intervalos de tempo da ordem de 10^{-23} s.

Em 1951, E. Fermi e colaboradores, a partir do espalhamento píon-núcleon no Cíclotron da Universidade de Chicago, observam a primeira ressonância hadrônica, identificada posteriormente, em 1956, como o bárion $\Delta(1232)$, por J. Ashkin *et al.* A ressonância mesônica de *spin* $J = 1$, o méson ρ° (previsto por Nambu), foi observada por A.R. Erwin *et al.*, em 1961, no Cosmotron de Brookhaven.

Com a inauguração, em 1953, do Bevatron do Lawrence Laboratory de Berkeley, que acelerava prótons a $6{,}5$ GeV, foram descobertas também as antipartículas pesadas, ou seja, os *antibárions*, como o *antipróton* ($\overline{p}$) por O. Chamberlein *et al.*, em 1955, e o *antinêutron* ($\overline{n}$) por Cork *et al.*, em 1956.

- **Estranheza**

Do ponto de vista teórico, M. Gell-Mann, T. Nakano e Nishijima, desde 1953, baseando-se na hipótese de produção aos pares de Pais, já propunham um novo número quântico aditivo, denominado *estranheza* (S), para explicar a não ocorrência de algumas reações envolvendo as *partículas estranhas*. Desse modo, novas regras de seleção foram impostas aos processos dos quais participavam as partículas estranhas, de tal modo que a estranheza seria conservada nas interações fortes e eletromagnéticas, e se alteraria de mais ou menos uma unidade nas interações fracas, ou seja,

$$\begin{cases} \Delta S = 0 & \text{(interações fortes e eletromagnéticas)} \\ \\ \left|\Delta S\right| = 1 & \text{(interações fracas na presença de partículas estranhas)} \end{cases}$$

Aos núcleons (p, n) e píons $(\pi^{\pm}, \pi^{\circ})$ foi associada estranheza nula $(S = 0)$, aos káons (K°, K^{+}), estranheza $S = 1$, e ao lambda (Λ°) e aos sigmas $(\Sigma^{\pm}, \Sigma^{\circ})$, o valor $S = -1$.

As antipartículas teriam estranhezas opostas às das partículas.

Desse modo, explicava-se por que a reação forte

$$\pi^{-} + p \to K^{+} + \Sigma^{-} \qquad (\Delta S = 0)$$

poderia ocorrer, e as reações

$$\begin{cases} \pi^{-} + p \to K^{\circ} + n & (\Delta S = 1) \\ \pi^{-} + p \to K^{-} + \Sigma^{+} & (\Delta S = -2) \\ \pi^{-} + p \to \pi^{-} + \Sigma^{+} & (\Delta S = -1), \end{cases}$$

apesar de não violarem a lei de conservação de carga, não ocorreriam.

Do mesmo modo, os decaimentos fracos

$$\begin{cases} \Lambda^{\circ} \to p + \pi^{-} & (\Delta S = 1) \\ K^{\circ} \to \pi^{+} + \pi^{-} & (\Delta S = -1) \end{cases}$$

são permitidos, pois obedecem às regras de seleção de estranheza.

Por volta de 1960, com a descoberta de novas partículas estranhas e ressonâncias hadrônicas, os hádrons conhecidos, além do próton (p), do nêutron (n), dos píons $(\pi^{\pm}, \pi^{\circ})$ e do lambda (Λ°), eram os bárions de *spin* $J = 3/2$ (Δ^{++}, $\Delta^{\pm}$, Δ°) e $J = 1/2$ ($\Sigma^{\pm}$, Σ^{-}, Σ°, Ξ^{-}, Ξ°), e os mésons de *spin* $J = 1$ ($\rho^{\pm}$, ρ°) e $J = 0$ (K^{+}, K°), e suas respectivas antipartículas.

• Multipletos de isospin

Esses hádrons, desde 1954, foram sendo classificados por Gell-Mann segundo a simetria de *isospin*, ou seja, representados como *multipletos de isospin*. Além do dubleto ($I = 1/2$) de núcleons (p, n) e do tripleto ($I = 1$) dos píons $(\pi^{+}, \pi^{\circ}, \pi^{-})$, os outros hádrons foram classificados do seguinte modo:

▷ quadrupleto ($I = 3/2$): $(\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{\circ}, \Delta^{-})$ – bárions

▷ tripletos ($I = 1$): $(\Sigma^{+}, \Sigma^{\circ}, \Sigma^{-})$ – bárions , $(\rho^{+}, \rho^{\circ}, \rho^{-})$ – mésons

▷ dubletos ($I = 1/2$): (Ξ°, Ξ^{-}) – bárions , (K^{+}, K°) – mésons

▷ singleto ($I = 0$): (Λ°) – bárion

A relação entre o *isospin* e a estranheza é expressa pela chamada fórmula de Gell-Mann-Nishijima,

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{1.1}$$

em que Q é a carga do hádron, $Y = B + S$, a hipercarga e B, o número bariônico ($B = 1$ para os bárions, $B = -1$ para os antibárions e $B = 0$ para os mésons).[13]

[13] Para os mésons, $Y = S$.

O *número bariônico* é um número quântico aditivo que expressa uma outra lei de conservação universal, como a da carga e do *momentum*, isto é, uma regra de seleção segundo a qual em todas as reações que ocorrem na natureza o número de bárions menos o número de antibárions permanece constante. Desse modo, de acordo com fórmula de Gell-Mann-Nishijima, diz-se que as interações fortes, além da carga, do *isospin*, da estranheza e do número bariônico, conservam também a *hipercarga*.

Excetuando-se o próton, todos os outros bárions são instáveis, e ao final de todas as reações das quais participam resulta um próton, que aparentemente é estável. A lei de conservação do número bariônico expressa esse fato: pela conservação da carga elétrica, o decaimento de um próton em um pósitron e um píon neutro ($p \to e^+ + \pi^\circ$) não seria proibido, mas como o número bariônico do píon e do pósitron é nulo, a reação violaria a conservação do número bariônico.

O sucesso da organização dos hádrons em multipletos de *isospin* pode ser ilustrado na previsão do dubleto dos bárions estranhos (Ξ°, Ξ^-).

De fato, em 1954, apenas o Ξ^- era conhecido, e sua estranheza $S = -2$ foi estabelecida a partir do decaimento fraco $\Xi^- \to \Lambda^\circ + \pi^-$ $(\Delta S = -1)$. Gell-Mann, então, prevê que deveria haver um parceiro Ξ° de carga neutra para satisfazer a relação entre carga, *isospin* e estranheza, e completar o dubleto (Ξ°, Ξ^-). O bárion Ξ° foi observado em 1959, por um grupo liderado por L. Alvarez, já utilizando a câmara de bolhas de D. Glaser, no Bevatron de Berkeley.

Exercício 1.1 Identifique, dentre as reações aquelas que não podem ocorrer, destacando as leis de conservação que impedem que elas sejam observadas na natureza.

- $\pi^- + p \to \Sigma^- + K^\circ + \pi^\circ$
- $K^- + p \to \Sigma^- + K^+$
- $p + \overline{p} \to \overline{\Sigma}^+ + \Lambda^\circ + \pi^+$
- $p + \overline{p} \to \overline{\Lambda}^\circ + \Lambda^\circ$
- $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^- + \pi^\circ$
- $p + \overline{p} \to \overline{K}^\circ + K^+ + \pi^- + \pi^\circ$
- $\overline{p} + \pi^+ \to \overline{\Lambda}^\circ + K^\circ$
- $\pi^- + p \to \Xi^- + K^+$
- $n \to p + \pi^-$

Exercício 1.2 Identifique as interações (forte, fraca ou eletromagnética) pelas quais os decaimentos e reações podem ocorrer.

- $\Sigma^\circ \to \Lambda^\circ + \gamma$
- $\Lambda \to p + \pi^-$
- $\Sigma^- \to n + \pi^-$
- $\Sigma^\circ \to \Lambda + \pi^\circ$
- $K^- + p \to \Sigma^\circ$
- $K^- + p \to K^+\Xi^-$
- $n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$
- $\Lambda^\circ \to p + e^- + \overline{\nu}_e$
- $\pi^\circ \to \mu^+ + e^- + \overline{\nu}_e$

1.2. O grupo $SU(2)$

A síntese de vários resultados associados ao comportamento do *spin* do elétron ou do *isospin* de um hádron pode ser apresentada de modo mais sistemático, a partir de suas propriedades algébricas.

• Representações matriciais

De acordo com a álgebra do *momentum* angular, as propriedades das regras de composição (multiplicação) que resultam no produto de *spins*, de *isospins* ou de matrizes quadradas definem uma estrutura algébrica de *grupo*.[14]

Um exemplo típico é o grupo das rotações (próprias) no espaço ordinário de dimensão 3. Enquanto os vetores podem ser representados por matrizes colunas 3×1, as rotações dos vetores (ou do sistema base de coordenadas) são operações que podem ser representadas por matrizes quadradas 3×3. Nesse caso, a composição de duas rotações sucessivas corresponde ao produto das matrizes que representam cada uma das rotações.

Assim como as rotações, todo elemento de um grupo $\{a, b, c, \ldots\}$ pode ser representado por uma matriz

[14]Formalmente, um grupo é qualquer conjunto de objetos $\{a, b, c, d, e, \ldots, a^{-1}, b^{-1}, \ldots\}$ no qual é definido uma operação $(\cdot)$ tal que:

$$\begin{cases} a \cdot b = c & \text{(fechamento)} \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \text{(associatividade)} \\ e \cdot a = a & \text{(identidade)} \\ a^{-1} \cdot a = e & \text{(inverso)} \end{cases}$$

$\{A, B, C, \ldots\}$ tal que as propriedades algébricas do grupo permaneçam preservadas, ou seja,

$$\begin{cases} a \to A \\ b \to B \\ c \to C \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a \cdot b = c \to AB = C$$

Uma característica essencial do grupo das rotações é o fato de que o resultado de qualquer rotação pode ser expresso pelo produto de três rotações simples sucessivas, ou seja, pela combinação de rotações em torno de três ângulos.[15] Nesse sentido, diz-se que o grupo da rotações possui três ângulos como parâmetros.

Uma representação matricial fundamental do grupo das rotações é a chamada representação unitária ou espinorial $SU(2)$ de matrizes unitárias 2×2 e determinantes igual a 1, denotada genericamente por[16]

$$U = e^{\mathrm{i}\,\theta_\alpha\, G_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

em que θ_α representa os (três) parâmetros do grupo, e G_α são os chamados *geradores do grupo*.

Além do caráter hermitiano dos geradores, uma característica importante dos geradores da representação espinorial são as chamadas *relações de comutação*,

$$\left[G_\alpha, G_\beta\right] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma$$

[15] Por exemplo, os chamados ângulos de Euler.

[16] Segundo a convenção de somatório de Einstein, $\sum_{\alpha=1}^{3} \theta_\alpha G_\alpha \equiv \theta_\alpha G_\alpha$.

as quais são idênticas às das componentes cartesianas do operador de *spin* 1/2,

$$\big[S_\alpha, S_\beta\big] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma$$

Assim, diz-se que os operadores S_x, S_y e S_z ou, equivalentemente, as matrizes de Pauli, são os geradores da representação unitária fundamental do grupo $SU(2)$.

• Composição de representações

A partir da composição de estados de *spins* 1/2, podem-se obter outros com *spins* de qualquer valor ($j = 0, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$). Por exemplo, a partir da composição dos autoestados $\big|1/2, +1/2\big\rangle_1$ e $\big|1/2, -1/2\big\rangle_1$, associados a um *spin* $j_1 = 1/2$, e dos autoestados $\big|1/2, +1/2\big\rangle_2$ e $\big|1/2, -1/2\big\rangle_2$, associados a um outro *spin* $j_2 = 1/2$, obtêm-se os seguintes estados compostos:[17]

$$\text{tripleto} \begin{cases} \big|1, +1\big\rangle = \big|1/2, +1/2\big\rangle_1 \big|1/2, +1/2\big\rangle_2 \\[2ex] \big|1, 0\big\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[\big|1/2, +1/2\big\rangle_1 \big|1/2, -1/2\big\rangle_2 + \big|1/2, -1/2\big\rangle_1 \big|1/2, +1/2\big\rangle_2\Big] \\[2ex] \big|1, -1\big\rangle = \big|1/2, -1/2\big\rangle_1 \big|1/2, -1/2\big\rangle_2 \end{cases}$$

e

$$\text{singleto} \left\{ \big|0, 0\big\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[\big|1/2, +1/2\big\rangle_1 \big|1/2, -1/2\big\rangle_2 - \big|1/2, -1/2\big\rangle_1 \big|1/2, +1/2\big\rangle_2\Big] \right.$$

Essas composições são expressas simbolicamente como

[17] Os coeficientes dessas combinações são os chamados *coeficientes de Clebsch-Gordon*.

$$1/2 \otimes 1/2 = 1 \oplus 0 \quad \text{ou} \quad 2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

na qual a primeira expressão indica que a composição de estados de *spins* 1/2 pode ser expressa pela soma direta de estados de *spins* 1 e 0, e a segunda indica a relação entre as ordens das respectivas representações.[18]

De maneira análoga, obtêm-se outras composições e suas respectivas decomposições em termos de somas diretas:[19]

$$\begin{cases} 1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2 \quad \text{ou} \quad 3 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \\[2ex] 3/2 \otimes 1 = 5/2 \oplus 3/2 \oplus 1/2 \quad \text{ou} \quad 4 \otimes 3 = 6 \oplus 4 \oplus 2 \\[2ex] 1/2 \otimes 1/2 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2 \oplus 1/2 \quad \text{ou} \quad 2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2 \end{cases}$$

Portanto, os autoestados simultâneos de S^2 e S_z são os estados fundamentais da representação fundamental do grupo $SU(2)$, a partir dos quais todos os outros estados, associados a representações de ordens superiores, podem ser construídos.

• **Espalhamento píon-núcleon**

O resultado dos experimentos de espalhamento píon-núcleon, realizados por Fermi e colaboradores, foi analisado por K.A. Brueckner com base nas propriedades do grupo $SU(2)$ de *isospin*. A partir da composição de *isospin* do píon ($I_\pi = 1$) e do núcleon ($I_N = 1/2$), podem resultar os seguintes estados de *isospin* 3/2 e

[18] Essa segunda expressão deveria ser escrita como $2 \times 2 = 3 + 1$, pois trata-se de uma relação entre as ordens de representações; portanto, uma relação entre os números que correspondem às ordens dos multipletos.

[19] De acordo com a Mecânica Quântica, os termos da decomposição em soma direta, a partir de dois *spins* j_1 e j_2, são obtidos como: $j_1 + j_2$, $j_1 + j_2 - 1$, ..., $|j_1 - j_2|$.

1/2:[20]

$$
\begin{cases}
\big|3/2,+3/2\big\rangle = \pi^+ p \\
\big|3/2,+1/2\big\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\;\pi^+ n \;+\; \sqrt{\frac{2}{3}}\;\pi^\circ p \\
\big|3/2,-1/2\big\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\;\pi^- p \;+\; \sqrt{\frac{2}{3}}\;\pi^\circ n \\
\big|3/2,-3/2\big\rangle = \pi^- n \\
\big|1/2,+1/2\big\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\;\pi^+ n \;-\; \sqrt{\frac{1}{3}}\;\pi^\circ p \\
\big|1/2,-1/2\big\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\;\pi^- p \;+\; \sqrt{\frac{1}{3}}\;\pi^\circ n
\end{cases}
$$

De modo recíproco, podem-se representar também as combinações píon-núcleon em termos desses estados,

[20] Com os coeficientes de Clebsch-Gordon adequados.

como:

combinações	estados
$\pi^+ p$	$\vert 1,+1\rangle \vert 1/2,+1/2\rangle = \vert 3/2,+3/2\rangle$
$\pi^- n$	$\vert 1,-1\rangle \vert 1/2,-1/2\rangle = \vert 3/2,-3/2\rangle$
$\pi^+ n$	$\vert 1,+1\rangle \vert 1/2,-1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\vert 3/2,+1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\vert 1/2,+1/2\rangle$
$\pi^- p$	$\vert 1,-1\rangle \vert 1/2,+1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\vert 3/2,-1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\vert 1/2,-1/2\rangle$
$\pi^\circ p$	$\vert 1,0\rangle \vert 1/2,+1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\vert 3/2,+1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\vert 1/2,+1/2\rangle$
$\pi^\circ n$	$\vert 1,0\rangle \vert 1/2,-1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\vert 3/2,-1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\vert 1/2,-1/2\rangle$

Supondo que o estado de *isospin* 3/2 seja uma ressonância (o bárion Δ) que domine as reações

$$\begin{cases} \pi^+ p \to \pi^+ p \\ \pi^- p \to \pi^\circ n \\ \pi^- p \to \pi^- p \end{cases}$$

Brueckner sugeriu que as respectivas taxas de produção[21] seriam proporcionais a $\left|\langle \pi^+ p | \pi^+ p\rangle\right|^2 = 1$, $\left|\langle \pi^\circ n | \pi^- p\rangle\right|^2 =$

[21] Ou: as respectivas seções de choque (Seção 2.2).

$2/9$ e $\left|\langle\pi^- p|\pi^- p\rangle\right|^2 = 1/9$. Ou seja, na proporção $9:2:1$, compatível com os resultados da equipe de Fermi.

Exercício 1.3: Sabendo que o dêuteron (D) tem *isospin* $I=0$, mostre que a razão entre as taxas de produção entre as reações $pp \to \pi^+ D$ e $np \to \pi^\circ D$ é igual a 2.

Exercício 1.4 Usando a invariância de isospin das interações fortes, e os estados π-núcleon definidos na tabela anterior, mostre que os elementos de matriz S, que descrevem todas as transições possíveis entre os estados πN, se reduzem a apenas dois elementos de matriz independentes.

Exercício 1.5 Considere o estado ressonante N^{*+} que pode decair em $\pi^\circ p$ ou $\pi^+ n$. Os dois possíveis estados de N^{*+} são $I=1/2$ e $I=3/2$, já definidos no texto.
Mostre que

$$\frac{\Gamma(N^{*+} \to \pi^\circ p)}{\Gamma(N^{*+} \to \pi^+ n)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se} \quad I = \frac{1}{2} \\ 2 & \text{se} \quad I = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- **O modelo de Sakata**

O fato de que estados associados a uma partícula poderiam ser obtidos a partir de estados associados a outras partículas leva o físico japonês Shoichi Sakata, em 1956, à ideia de que deveria haver partículas elementares e fundamentais que constituiriam as outras partículas nãoelementares. Sakata, então, propõe a hipótese de que, a partir do tripleto (p, n, Λ°) e do tripleto conjugado $(\overline{p}, \overline{n}, \overline{\Lambda}^\circ)$, constituído pelas respectivas antipartículas, todos os hádrons poderiam ser obtidos.

Segundo Sakata, prótons, nêutrons e lambdas seriam as partículas fundamentais e elementares da natureza. Os mésons seriam constituídos por duas partículas (uma partícula e uma antipartícula), e os outros bárions, por três partículas (2 partículas e 1 antipartícula, ou 1 partícula e 2 antipartículas).

Na linguagem da teoria de grupos, o próton, o nêutron e o lambda seriam as partículas elementares associadas ao tripleto fundamental do grupo $SU(3)$, enquanto os demais hádrons seriam os multipletos da composição dos estados associados ao tripleto fundamental.

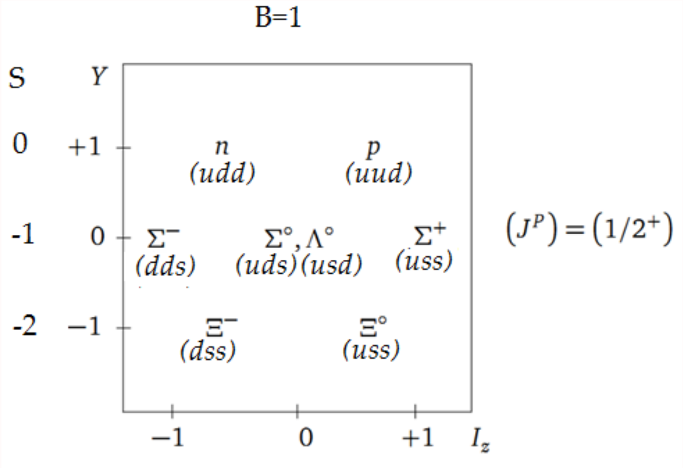
O *modelo de Sakata* não conseguiu, no entanto, prever corretamente muitas das propriedades dos hádrons conhecidos naquela época.

1.3. O grupo $SU(3)$ de sabor e os quarks

A ideia de Sakata, de que em vez de multipletos associados ao grupo SU(2) de *isospin* a classificação dos hádrons poderia ser baseada no grupo $SU(3)$, foi retomada por Gell-Mann, Y. Ne'eman e G. Zweig, no início dos anos 1960.

• **O octeto dos bárions e dos mésons de Gell-Mann**

Inicialmente, Gell-Mann e Ne'eman organizam os bárions mais leves como um octeto de *spins* $J = 1/2$ e paridade $P = +1$, em um diagrama de hipercarga $(Y) \times$ *isospin* (I_3).



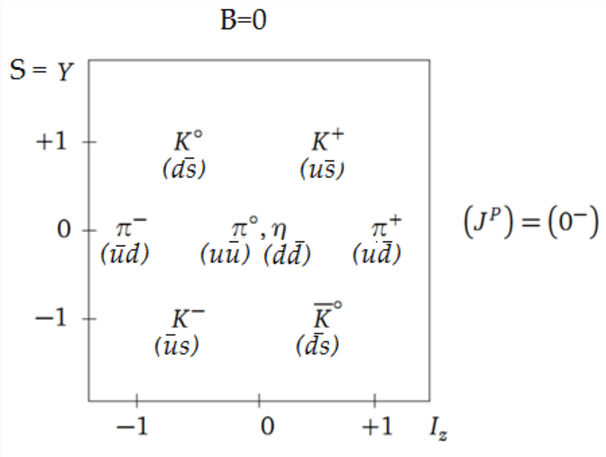
Para este octeto bariônio $(1/2)^+$, Gell-Mann, em 1961, estabeleceu a seguinte relação entre as massas de alguns de seus constituintes:

$$2(m_N + m_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma$$

em que m_Ξ é o valor médio das massas de Ξ^- e Ξ° e assim por diante.

Esse é um caso particular da chamada *fórmula de massa de Gell-Mann-Okubo*. Substituindo-se os valores (todos em MeV) $m_N = 940$, $m_\Sigma = 1190$ e $m_\Xi = 1320$, prevê-se, para Λ, a massa $m_\Lambda = 1110$ MeV, a ser comparada com o valor experimental de 1115 MeV.

Ao organizar os mésons de *spin* $J = 0$ do mesmo modo, faltava um méson que corresponderia ao estado de *isospin* $I = 0$ (singleto). Esse méson de *spin* $J = 0$, denominado η, e bem mais pesado (547,8 MeV) que o π°, foi encontrado em 1961, por A. Pevsner *et al.*, no Lawrence Laboratory. Desse modo, pode-se organizar o chamado octeto de mésons de *spin* $J = 0$ e paridade $P = -1$.



A massa do méson η° pode ser prevista também pela fórmula de Gell-Mann-Okubo para o octeto mesônico pseudoescalar, ou seja,

$$4m_K = 3m_{\eta^\circ} + m_\pi$$

da qual resulta a predição $m_{\eta^\circ} = 615$ MeV, a ser confrontada com o valor $m_{\eta^\circ} = 549$ MeV, obtido por Pevsner e colaboradores. A solução para essa discrepância, inspirada em uma ideia originalmente apontada por R.P. Feynman, foi encontrada substituindo-se na equação acima todos os termos de massa por seus respectivos quadrados, ou seja, usando-se a equação

$$4m_K^2 = 3m_{\eta^\circ}^2 + m_\pi^2$$

Exercício 1.6 Mostre que, com a equação anterior, a massa prevista para η° tem valor de 567 MeV.

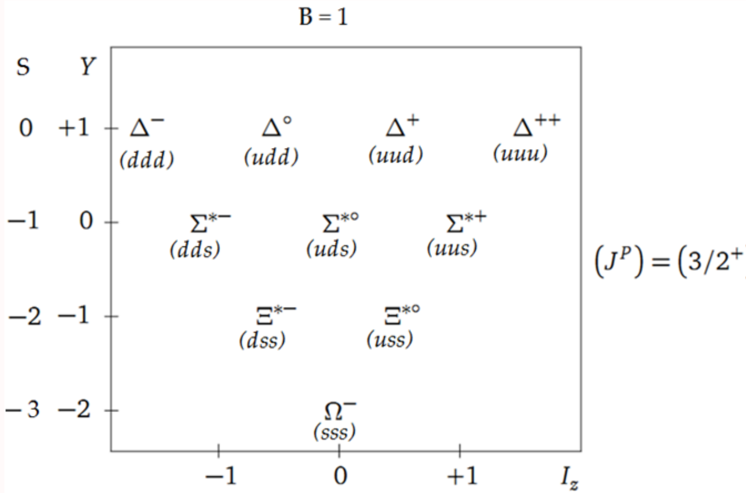
Exercício 1.7 Um dos problemas para o *Eightfold Way* refere-se ao enquadramentos dos mésons pseudovetoriais ω e ϕ. Para o grupo desses mésons, a fórmula de Gell-Mann-Okubo é

$$4m_{K^*}^2 = 3m_{\omega_1}^2 + m_\rho^2$$

Estime a massa do estado singleto puro ω_1 e compare com as massas de ω e ϕ. Discuta uma possível solução para este problema.

• O decupleto dos bárions de Gell-Mann

A partir do octeto dos bárions, Gell-Mann postula que a composição de 2 octetos poderia resultar em multipletos que representariam os outros bárions. Desse modo, os bárions *spin* $J = 3/2$ foram organizados em um decupleto de ressonâncias.



Cabe lembrar que o singleto de *isospin* do decupleto dos bárions, ou seja, o bárion Ω^- de estranheza -3, não era conhecido na época do modelo denominado "Caminho Óctuplo" (*The Eightfold Way*) de classificação dos hádrons. O bárion Ω^-, previsto por Gell-Mann,[22] só foi encontrado em 1964, na câmara de bolhas de Brookhaven, por V.G. Barnes *et al.*, e se constituiu em mais um dos exemplos de triunfo de colaboração entre

[22] Considerando que a diferença de massa entre os membros do decupleto seria praticamente constante, $\underbrace{m_{\Sigma^*}}_{1385 \text{ MeV}} - - \underbrace{m_{\Delta}}_{1232 \text{ MeV}} \simeq \underbrace{m_{\Xi^*}}_{1530 \text{ MeV}} - - \underbrace{m_{\Sigma^*}}_{1385 \text{ MeV}} \simeq \underbrace{m_{\Omega^-}}_{1672 \text{ MeV}} - \underbrace{m_{\Xi^*}}_{1530 \text{ MeV}}$, Gell-Mann, além da previsão de existência do Ω^-, estimou também sua massa.

físicos teóricos e experimentais.

- **Quarks: grupo $\mathbf{SU(3)_f}$**

O Caminho Óctuplo foi esclarecido quando Gell-Mann e Zweig propuseram que os hádrons estariam associados às representações irredutíveis de um grupo $SU(3)_f$ de sabor,[23] cujos estados fundamentais seriam associados a três férmions de *spin* 1/2, genericamente denominados *quarks*, e denotados como u (up), d (*down*) e s (*strange*).

A representação fundamental desse grupo matemático de 8 parâmetros $\{\alpha_k | k = 1, 2, \ldots, 8\}$ é expressa como

$$U = \exp\left\{ \mathrm{i}\alpha_k \frac{\lambda_k}{2} \right\}$$

na qual os geradores λ_k são as oito matrizes de Gell-Mann.

[23] Os *quarks* de Gell-Mann, os geradores que constituem os hádrons, se apresentam em três sabores distintos.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

As matrizes de Gell-Mann satisfazem as relações

$$\mathrm{tr}\ \lambda_k \lambda_j = 2\delta_{kj} \qquad \left[\lambda_i, \lambda_j\right] = 2\mathrm{i}\, \mathrm{f}_{\mathrm{ijk}}\, \lambda_{\mathrm{k}}$$

e as chamadas constantes de estrutura do grupo são quantidades antissimétricas com relação à troca de quaisquer pares de índices, cujos valores não nulos podem ser obtidos a partir dos seguintes termos:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{f}_{123} = 1 & \mathrm{f}_{147} = 1/2 & \mathrm{f}_{156} = -1/2 \\ \mathrm{f}_{246} = 1/2 & \mathrm{f}_{257} = 1/2 & \mathrm{f}_{345} = 1/2 \\ \mathrm{f}_{367} = -1/2 & \mathrm{f}_{458} = \sqrt{3}/2 & \mathrm{f}_{678} = \sqrt{3}/2 \end{array}$$

Segundo Gell-Mann, de modo análogo ao modelo de Sakata, os bárions seriam obtidos pela combinação de 3 *quarks*, e os *mésons*, pela combinação de um *quark* e um *antiquark*.

Essas representações corresponderiam às seguintes decomposições do grupo $SU(3)$:

$$\begin{cases} 3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1 \qquad (\text{mésons}) \\ \\ 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \qquad (\text{bárions}) \end{cases}$$

em que $\overline{3}$ corresponde ao tripleto dos *antiquarks* $(\overline{u}, \overline{d}, \overline{s})$, denominada representação conjugada do tripleto (u, d, s) dos *quarks* fundamentais do grupo $SU(3)_f$ de sabor.[24]

De acordo com as propriedades estabelecidas para os hádrons, os *quarks* (u, d, s) e os *antiquarks* $(\overline{u}, \overline{d}, \overline{s})$ estariam permanentemente confinados nos hádrons, e teriam as seguintes propriedades:[25]

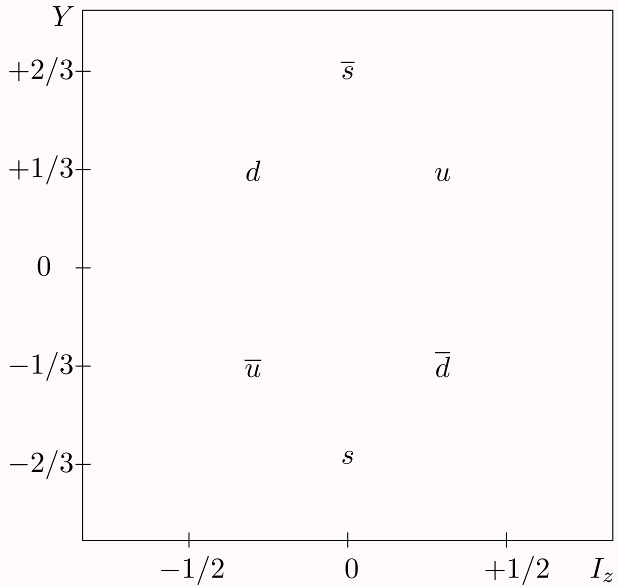
---

[24] A decomposição em representações irredutíveis das composições de representações fundamentais dos grupos $SU(N)$ pode ser obtida pelos chamados diagramas de Young. Assim, além do octeto de mésons de *spin* $J = 0$ e paridade $P = -1$, a decomposição do grupo $SU(3)$ mostra que o grupo possui também um outro singleto estranho, posteriormente identificado com o méson η'.

[25] Uma vez fixados o número bariônico, a estranheza e o *isospin* dos *quarks* u, d e s, a carga é determinada pela fórmula de Gell-Mann-Nishijima.

	quarks			*antiquarks*		
	u	d	s	$\overline{u}$	$\overline{d}$	$\overline{s}$
carga (Q)	+ 2/3	$-1/3$	$-1/3$	$-2/3$	$+1/3$	$+1/3$
n° bariônico (B)	+ 1/3	+ 1/3	+ 1/3	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
estranheza (S)	0	0	-1	0	0	+1
isospin (I_3)	+ 1/2	$-1/2$	0	$-1/2$	+ 1/2	0
hipercarga (Y)	+ 1/3	$+1/3$	$-2/3$	$-1/3$	$-1/3$	+ 2/3

Em um diagrama hipercarga (Y) $\times$ *isospin* (I_3) os *quarks* podem ser representados como



Com a hipótese dos *quarks*, as interações entre os hádrons seriam resultantes das interações fortes entre esses objetos fundamentais.

Cabe notar que o modelo de *quarks* introduz a hipótese revolucionária de que eles possuiriam cargas elétricas e números bariônicos fracionários, o que levou o próprio Gell-Mann a duvidar, inicialmente, do conteúdo físico do modelo de *quarks*. Sobre isso vale a pena citar um rascunho de Gell-Mann com F. Bello (*apud* Zweig, 2010):

> *Como parecia provável, desde o início, o modelo de* quark *pode ser nada mais do que uma construção matemática útil: os hádrons conhecidos – incluindo dezenas ainda não descobertos quando o modelo foi concebido – se comportam 'como se' fossem compostos de* quarks. Quarks *em si podem não ter existência independente.*

Como os *quarks* não se manifestam livremente, suas massas não são univocamente definidas. De modo análogo à massa efetiva de um elétron no interior de uma rede cristalina, a massa de um *quark* depende do processo no qual os *quarks* interagem. Desse modo, a massa atribuída a um *quark* a partir da observação de uma ressonância é diferente daquela resultante de um processo de decaimento fraco. De qualquer modo, uma vez que os *quarks* estão confinados por interações fortes, as chamadas massas de corrente dos *quarks* u e d, da ordem de 3 MeV, são bem menores que suas massas efetivas ($\sim 1/3$ da massa do próton), e do que a massa de valência do *quark* s ($m_s \simeq 100 \times m_u$).

• Composições básicas dos bárions e dos mésons

As composições básicas do decupleto e do octeto dos bárions são dadas por

decupleto dos bárions				I	S
$\Delta^{++}(uuu)$	$\Delta^{+}(uud)$	$\Delta^{\circ}(udd)$	$\Delta^{-}(ddd)$	$3/2$	0
$\Sigma^{*+}(uus)$	$\Sigma^{*\circ}(uds)$	$\Sigma^{*-}(dds)$		1	-1
$\Xi^{*\circ}(uss)$	$\Xi^{*-}(dss)$			$1/2$	-2
$\Omega^{-}(sss)$				0	-3

octeto dos bárions	I	S
$p(uud)$ $n(udd)$	$1/2$	0
$\Sigma^+(uus)$ $\Sigma^\circ(uds)$ $\Sigma^-(dds)$	1	-1
$\Xi^\circ(uss)$ $\Xi^-(dss)$	$1/2$	-2
$\Delta^\circ(uds)$	0	-1

Para os mésons, de acordo com a decomposição $3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1$, além do octeto existe um singleto (η'),

noneto dos mésons	I	S
$K^+(u\overline{s})$ $K^\circ(d\overline{s})$	$1/2$	$+1$
$\pi^+(u\overline{d})$ $\pi^\circ(u\overline{u}, d\overline{d})$ $\pi^-(\overline{u}d)$	1	0
$\overline{K}^\circ(\overline{d}s)$ $K^-(\overline{u}s)$	$1/2$	-1
$\eta(u\overline{u}, d\overline{d}, s\overline{s})$	0	0
$\eta'(u\overline{u}, d\overline{d}, s\overline{s})$	0	0

• **Momentos magnéticos do próton e do nêutron**

O grande sucesso do modelo estático dos *quarks* talvez tenha sido estabelecer a relação entre os momentos magnéticos do próton e do nêutron.

Exercício 1.8 Determine o momento magnético de um sistema de partículas eletricamente carregadas, de *spin* nulo, de carga q_i e massa m_i, em movimento, com velocidade $\mathrm{v_i}$. Expresse esse momento magnético em função do *momentum* angular orbital total, quando todas as partículas do sistema tiverem a mesma razão carga-massa, isto é, $q_i/m_i = e/m$.

Como o momento magnético $(\vec{\mu})$ é determinado pelo *spin*,[26] considerando que a composição básica do próton é de 2 *quarks* u e de um *quark* d (uud), os autoestados de *spin* do próton podem ser obtidos, inicialmente, fazendo-se a composição de autoestados de *spin* 1/2 de 2 *quarks* u, ou seja, a partir dos estados

$u = \vert s_1, m_1\rangle$	$u = \vert s_2, m_2\rangle$
$\vert 1/2, +1/2\rangle_1$	$\vert 1/2, +1/2\rangle_2$
$\vert 1/2, -1/2\rangle_1$	$\vert 1/2, -1/2\rangle_2$

[26] O momento magnético de uma partícula de carga q, massa m e *spin* $\vec{s}$, é dado por

$$\vec{\mu} = \left(\frac{q}{2m}\right)\vec{\sigma}$$

chega-se aos seguintes estados, e seus respectivos momentos magnéticos,

$\left\|J_{uu}, m_{uu}\right\rangle$	μ
$\left\|1, +1\right\rangle$	$2\mu_u$
$\left\|1, 0\right\rangle$	0
$\left\|1, -1\right\rangle$	$-2\mu_u$

A seguir, compondo esses estados de *spin* $J_{uu} = 1$ com os autoestados de *spin* $s_d = 1/2$ do *quark* d, os autoestados correspondentes ao *spin* $J_p = 1/2$ do próton serão dados por

$$\begin{cases} \left|J_p = 1/2, m_{J_p} = +1/2\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \left|1,1\right\rangle\ \left|1/2,-1/2\right\rangle\ -\ \sqrt{\frac{1}{3}}\ \left|1,0\right\rangle\ \left|1/2,+1/2\right\rangle \\ \\ \left|J_p = 1/2, m_{J_p} = -1/2\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\ \left|1,0\right\rangle\ \left|1/2,-1/2\right\rangle\ -\ \sqrt{\frac{2}{3}}\ \left|1,-1\right\rangle\ \left|1/2,+1/2\right\rangle \end{cases}$$

em que os coeficientes de Clebsh-Gordon determinam o peso de cada termo para o momento magnético total do próton, em um dado autoestado de *spin*.

Assim, no autoestado correspondente a $m_{J_p} = 1/2$, o momento magnético do próton é igual a

$$\mu_p = \frac{2}{3}\left(2\mu_u\ - \mu_d\right)\ +\ \frac{1}{3}\,\mu_d\ =\ \frac{1}{3}\left(4\mu_u\ - \mu_d\right)$$

Analogamente, o momento magnético total do nêutron, cuja composição básica é (udd), no autoestado correspondente a $m_{J_n} = 1/2$ é igual a

$$\mu_n = \frac{2}{3}\left(2\mu_d \ - \mu_u\right) \ + \ \frac{1}{3}\,\mu_u \ = \ \frac{1}{3}\left(4\mu_d \ - \mu_u\right)$$

Como os *quarks* u e d têm praticamente a mesma massa, e as cargas são relacionadas por $q_u = -2q_d$, implica que $\mu_u \simeq -2\mu_d$.

Desse modo, a razão esperada entre os momentos magnéticos do nêutron e do próton, dada por

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_p}\right)_{\texttt{teor}} = -\frac{2}{3} \simeq -0{,}67$$

é compatível com o valor experimental da época,[27] da ordem de

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_p}\right)_{\texttt{exp}} = -0{,}68$$

Apesar de algumas previsões para o momento magnético de certos bárions estarem em bom acordo com os resultados empíricos, outras estimativas igualmente baseadas no modelo estático de *quarks* apresentam grandes discrepâncias com relação aos valores experimentais do momento magnético de outros bárions.

Exercício 1.9 Utilizando os valores experimentais para os momentos magnéticos do p e do Λ, estime a massas dos quarks u e s.

[27] A correção para o valor do momento magnético do próton foi calculada por Schwinger, em 1948, após desenvolver métodos perturbativos para Eletrodinâmica Quântica.

Exercício 1.10 Considere que os mésons vetoriais ω e ϕ tenham o seguinte conteúdo de quarks:

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{1}{2}}(u\overline{u} + d\overline{d}); \qquad \phi \simeq s\overline{s}$$

Mostre que

$$\frac{\Gamma(\omega \to \pi^\circ \gamma)}{\Gamma(\rho \to \pi^\circ \gamma)} = \left(\frac{\mu_d - \mu_u}{\mu_d + \mu_u}\right)^2 = 9$$

1.4. O grupo $SU(3)$ de cor e as cargas fortes

Os membros do decupleto dos bárions têm *spin* $J = 3/2$ e cada *quark* tem *spin* $s = 1/2$. Considerando o hádron mais leve do decupleto, o Δ^{++}, constituído apenas por *quarks* u, em um autoestado de *spin* $m_J = +3/2$, tanto a sua composição de sabor como a de *spin* são simétricas pela troca de dois *quarks* u:

$$\Delta^{++}\left(m_J = +\frac{3}{2}\right) = (uuu)(\uparrow\uparrow\uparrow) = u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow \qquad u^\uparrow = u\left(m_j = +\frac{1}{2}\right)$$

Uma vez que em seu estado fundamental $L = 0$ e, portanto, a parte espacial de sua função de estado é também simétrica, o estado do Δ^{++} seria o produto de estados simétricos nas coordenadas espaciais, em sabor e *spin*. Como todo férmion obedece ao *princípio de exclusão de Pauli*, o estado de um bárion deve ser *antissimétrico* pela troca de dois *quarks* idênticos.

Para contornar esse problema, O.W. Greenberg, M. Han e Nambu (1964-65) sugeriram a existência de um ulterior número quântico, associado a um novo grau de liberdade para os *quarks*, denominado *cor*. Segundo Han e Nambu, as interações fortes não distinguem sabores de *quarks*, mas resultam de uma outra propriedade dos *quarks*, a *cor*.

Como o Δ^{++} é constituído por três *quarks* idênticos, para que o princípio de exclusão de Pauli continue válido torna-se necessário a existência de três tipos de cores. Desse modo, o estado de um bárion seria o produto de estados simétricos com relação às coordenadas espaciais, ao sabor e ao *spin*, e antissimétrico com relação a cor.

Assim, o decupleto dos bárions corresponderia aos seguintes 10 estados simétricos com relação ao sabor,

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{++} &= uuu \\ \Delta^{+} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(uud+udu+duu) \\ \Delta^{0} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(udd+dud+ddu) \\ \Delta^{-} &= ddd \end{aligned}\right\} \qquad I=\tfrac{3}{2} \quad S=\ 0 \quad Y=+1$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma^{*+} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(uus+usu+suu) \\ \Sigma^{*0} &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(uds+usd+dus+dsu+sud+sdu) \\ \Sigma^{*-} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(dds+dsd+sdd) \end{aligned}\right\} \qquad I=1 \quad S=-1 \quad Y=\ 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi^{*0} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(uss+sus+ssu) \\ \Xi^{*-} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(dss+sds+ssd) \end{aligned}\right\} \qquad I=\tfrac{1}{2} \quad S=-2 \quad Y=-1$$

$$\left.\Omega^{-} = sss\ \right\} \qquad I=0 \quad S=-3 \quad Y=-2$$

multiplicados pelos 10 estados simétricos análogos de *spin*.

Por exemplo, o estado combinado de sabor e de *spin* do Δ^{+}, em um autoestado de *spin* $m=-1/2$, é dado pelo produto

$$
\begin{aligned}
\Delta^{+}(\downarrow) &= \tfrac{1}{3}\,(uud + udu + duu)\,(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) \\
&= \tfrac{1}{3}\,\big(u^{\uparrow}u^{\downarrow}d^{\downarrow} \;+\; u^{\uparrow}d^{\downarrow}u^{\downarrow} \;+\; d^{\uparrow}u^{\downarrow}u^{\downarrow} \;+ \\
&\quad + u^{\downarrow}u^{\uparrow}d^{\downarrow} \;+\; u^{\downarrow}d^{\uparrow}u^{\downarrow} \;+\; d^{\downarrow}u^{\uparrow}u^{\downarrow} \;+ \\
&\quad + u^{\downarrow}u^{\downarrow}d^{\uparrow} \;+\; u^{\downarrow}d^{\downarrow}u^{\uparrow} \;+\; d^{\downarrow}u^{\downarrow}u^{\uparrow}\big)
\end{aligned}
$$

Com relação ao octeto de bárions que contém os núcleons, apesar de o estado combinado de sabor e *spin* ser simétrico, nem a parte de sabor nem a parte de *spin* são isoladamente simétricas. Por exemplo, o estado combinado de sabor e de *spin* de um próton, em um autoestado de *spin* $m = +1/2$, pode ser construído a partir do produto de estados antissimétricos de *spins* $1/2$ e sabores u e d,

$$
(ud - du)\,(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = u^{\uparrow}d^{\downarrow} \;-\; u^{\downarrow}d^{\uparrow} \;-\; d^{\uparrow}u^{\downarrow} \;+\; d^{\downarrow}u^{\uparrow}
$$

Incorporando um terceiro *quark* do tipo u, com componente de *spin* $+1/2$, obtém-se o seguinte estado de componente de *spin* $+1/2$,

$$
(u^{\uparrow}d^{\downarrow} \;-\; u^{\downarrow}d^{\uparrow} \;-\; d^{\uparrow}u^{\downarrow} \;+\; d^{\downarrow}u^{\uparrow})\,u^{\uparrow} \;=\; (udu - duu)\,(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)
$$

Apesar de a combinação resultante ser simétrica com relação à troca do primeiro *quark* u com o *quark* d, uma vez que as interações fortes não distinguem sabores de *quarks*, o estado do próton deve ser simétrico com relação à troca de qualquer par de *quarks*. A combinação totalmente simétrica em sabor e *spin* é dada por

$$
(udu - duu)\,(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \;+\; (uud - duu)\,(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \;+\; (uud - udu)\,(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)
$$

Desse modo, o estado normalizado de sabor e componente de *spin* $m = +1/2$ de um próton é dado por

$$\begin{aligned} p(\uparrow) \;=\; & \frac{1}{\sqrt{18}}\big(2u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\downarrow} \;+\; 2d^{\downarrow}u^{\uparrow}u^{\uparrow} \;+\; 2u^{\uparrow}d^{\downarrow}u^{\uparrow} \;+ \\ & -\; u^{\uparrow}u^{\downarrow}d^{\uparrow} \;-\; u^{\uparrow}d^{\uparrow}u^{\downarrow} \;-\; d^{\uparrow}u^{\uparrow}u^{\downarrow} \;+ \\ & -\; u^{\downarrow}u^{\uparrow}d^{\uparrow} \;-\; u^{\downarrow}d^{\uparrow}u^{\uparrow} \;-\; d^{\uparrow}u^{\downarrow}u^{\uparrow}\big) \end{aligned}$$

Os estados associados aos outros membros do octeto dos bárions podem ser encontrados de maneira análoga.

Exercício 1.11 Determine o estado normalizado de sabor e componente de *spin* $m = +1/2$ de um nêutron, e estime a razão entre os momentos magnéticos do nêutron e do próton.

• **Espalhamento $\mathbf{e^-e^+}$**

Um exemplo típico que mostra a necessidade de 3 números quânticos de cor é a produção de hádrons a partir de colisões e^-e^+, em altas energias. O processo decorre da aniquilação de pares e^-e^+, da subsequente criação de pares de $q\overline{q}$, e das sucessivas fragmentações dos *quarks* em hádrons.

Sabendo-se que a seção de choque (Seção 2.2) para o processo $e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$ é dada, em primeira ordem de aproximação, por (Seção 2.4)

$$\sigma\left(e^-e^+ \to \mu^+\mu^-\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

enquanto a seção de choque para o processo $e^-e^+ \to q\overline{q}$, por

$$\sigma\left(e^-e^+ \to q\overline{q}\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} e_q^2$$

na qual e_q é a carga do *quark* q, obtém-se

$$\frac{\sigma\left(e^-e^+ \to q\overline{q}\right)}{\sigma\left(e^-e^+ \to \mu^+\mu^-\right)} = e_q^2$$

Essa relação é adequada para um simples sabor de *quark* e para uma dada cor.

Para obter a produção total de hádrons é preciso somar $\sigma\left(e^-e^+ \to q\overline{q}\right)$ sobre todos os tipos de *quarks* (q) e suas cores, chegando-se à razão

$$R = \frac{\sigma\left(e^-e^+ \to \text{hádrons}\right)}{\sigma\left(e^-e^+ \to \mu^+\mu^-\right)} = \sum_{q,\,\text{cores}} e_q^2 = 3\sum_{q} e_q^2 \qquad (1.2)$$

Além do fator de cor (3), a razão R entre as seções de choque de produção de hádrons e de pares de múons depende também do número de sabores, ou seja, do número de *quarks* que participam do processo, e da energia de colisão ($\sqrt{s}$) do par e^-e^+, em relação ao centro de massa.[28]

De fato, ao grupo $SU(3)_f$ de sabor estava associada a existência de três tipos (sabores) de *quarks*. No entanto, com a descoberta de novas ressonâncias, e devido a argumentos teóricos associados aos decaimentos por interações fracas, novos *quarks* foram introduzidos na Física de Partículas, os chamados *sabores pesados*, como o *quark charm* (c) e os *quarks bottom* (b) e *top* (t), com massas, respectivamente, da ordem de $m_c \simeq 1$ GeV, $m_b \simeq 5$ GeV e $m_t \simeq 172$ GeV.

Com esses novos *quarks*, em analogia com a estranheza $S = -1$, atribuída ao *quark* s, foram introduzidos e atribuídos novos números quânticos aditivos $c = +1$ ao *quark* c, $b = -1$ ao *quark* b e *top* $t = +1$ ao *quark* t, que se conservam nas interações fortes e eletromagnéticas,[29] mas não nas interações fracas, as quais permitem a mudança de sabor.[30]

De acordo com a Equação (1.2), a Tabela 1.1 mostra que R apresenta uma variação em degrau com o aumento da energia de colisão.

Tal comportamento é visível no gráfico da razão R (Figura 1.1), em função da energia total de colisão em relação ao centro de massa ($\sqrt{s}$), em que são mostradas também diversas ressonâncias esperadas e observadas.

A descoberta de novos sabores levou os físicos teóricos, seguindo os passos de Gell-Mann, a representar os novos hádrons como multipletos dos grupos de ordem mais alta como $SU(4)$ ou $SU(6)$. Apesar do sucesso para a classificação dos hádrons, as simetrias associadas aos grupos unitários de sabor não eram simetrias exatas,

[28] No caso de colisões e^-e^+, o centro de massa está em repouso no sistema de coordenadas do laboratório.

[29] Nesse caso, a hipercarga de um *quark*, ou de um hádron, conservada nas interações fortes, é dada por $Y = B + S + c + b + t$.

[30] Somente processos de criação e aniquilação de pares associados a um mesmo sabor são permitidos nas interações fortes e eletromagnéticas.

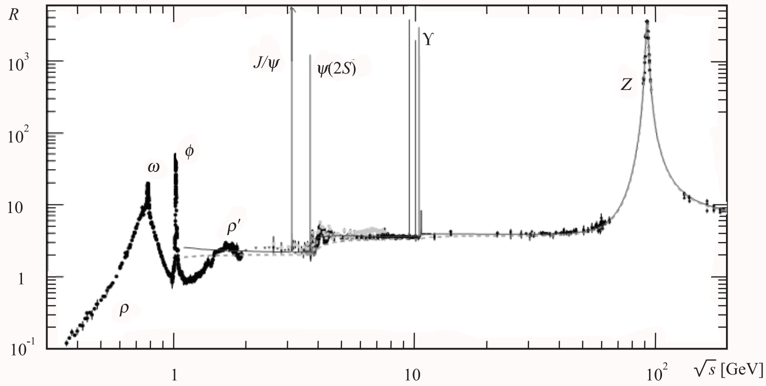


Figura 1.1 Variação de R com a energia total de colisão $(\sqrt{s})$.

Tabela 1.1 Variação da razão R com a energia de colisão ($\sqrt{s}$) e o número de sabores de *quarks*

Energia	Sabores	R
$\sqrt{s} > 2m_s \sim 1$ GeV	u, d, s	$3\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) = 2$
$\sqrt{s} > 2m_c \sim 4$ GeV	u, d, s, c	$3\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right) = 3\frac{1}{3}$
$\sqrt{s} > 2m_b \sim 10$ GeV	u, d, s, c, b	$3\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right) = 3\frac{2}{3}$
$\sqrt{s} > 2m_t \sim 350$ GeV	u, d, s, c, b, t	$3\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right) = 5$

sendo quebradas pelas interações fracas e, uma vez que os hádrons pertencentes a um mesmo multipleto têm massas e cargas elétricas diferentes, também pelas interações eletromagnéticas.

Desse modo, evidenciou-se que o grupo $SU(3)_f$ não estaria associado a uma simetria fundamental da natureza, e prevaleceu a hipótese de que as propriedades das interações fortes estariam associadas ao grupo $SU(3)_c$, ou seja, os *quarks* interagem fortemente devido à cor. A partir da aceitação dessa hipótese, Gell-Mann cunhou o termo *Cromodinâmica Quântica* para a teoria das interações fortes.

• **Cargas fortes: grupo $\mathbf{SU(3)_c}$**

Cada *quark* (q) pode existir em 3 cores diferentes, denominadas *red* (r), *green* (g) e *blue* (b). Assim como o elétron tem carga -1, e sua antipartícula, o pósitron, tem "anticarga" $+1$, os anti*quarks* estão associados a anticores, denotadas por $\overline{r}$, $\overline{g}$ e $\overline{b}$.

Ainda segundo Han e Nambu, os hádrons observados não exibiriam a propriedade de cor, isto é, seriam não coloridos ou "brancos", sendo identificados com os singletos associados a um grupo $SU(3)_c$ de cor. De modo mais preciso, diz-se que os hádrons são invariantes com relação às transformações que constituem o grupo de cor.

Como cada *quark* pode existir nas 3 cores distintas (r, g, b), e as interações fortes não distinguem sabores, os singletos de cor para os bárions e mésons seriam do tipo:

- **antissimétrico**

$$q_1 q_2 q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(r_1 b_2 g_3 - b_1 r_2 g_3 + b_1 g_2 r_3 - g_1 b_2 r_3 + g_1 r_2 b_3 - r_1 g_2 b_3\right)$$

  para os bárions;

- **simétrico**

$$q_1 \overline{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(r_1 \overline{r}_2 + g_1 \overline{g}_2 + b_1 \overline{b}_2\right)$$

  para os mésons.

A representação fundamental do grupo $SU(3)_c$ de oito parâmetros $\{\alpha_k | k = 1, 2, \ldots, 8\}$, chamados de cargas fortes, é expressa como

$$U = \exp\left\{\mathrm{i}\, g_s\, \alpha_k \frac{\lambda_k}{2}\right\}$$

em que os geradores λ_k são as matrizes de Gell-Mann e g_s é o análogo da carga elétrica para as interações fortes, ou seja, caracteriza a intensidade das interações fortes entre os *quarks*.[31]

Os parâmetros do grupo $SU(3)_c$ de cor, *i.e.*, as cargas fortes, não têm nomes específicos: são análogos aos atributos positivo e negativo, associados à carga elétrica. Assim, o modelo de *quarks* associa aos *quarks* três espécies de carga de cor (r, g, b) associadas a oito atributos, ou cargas fortes distintas.

Nesse sentido, Nambu, em 1966, foi o primeiro a considerar a possibilidade de as reações fortes resultarem da interação de um octeto de cor (Tabela 1.2), resultante da composição cor-anticor $(3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1)$, que constituiria os *glúons*, com um tripleto de cor, que representaria os *quarks*.[32]

Até aqui, viu-se como o conceito de *quark* emergiu do estudo da espectroscopia hadrônica e como atribuir a essa partícula um novo número quântico, a *cor*. Os capítulos que se seguem mostrarão, a partir da dinâmica do espalhamento lépton-núcleon, a concretização da hipótese de que as interações fortes se manifestam entre *quarks* e *glúons*, dando origem a uma nova teoria de campos, a QCD. Nesse caminho, o estudo da estrutura do próton desempenhou um papel fundamental, em processos de colisões tanto elásticas quanto inelásticas.

---

[31] Enquanto o parâmetro de acoplamento eletromagnético é definido por $\alpha = e^2/4\pi$ (no sistema de Heaviside), o parâmetro de acoplamento forte é definido analogamente pela quantidade $\alpha_s = g_s^2/4\pi$.

[32] Tanto os estados $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r\bar{r}-g\bar{g}\right)$ e $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(r\bar{r}+g\bar{g}-2b\bar{b}\right)$ como o singleto $\left(r\bar{r}+g\bar{g}+b\bar{b}\right)$ não têm carga efetiva de cor; no entanto, apenas o singleto é invariante sob uma transformação do tipo $U = \exp\left\{\mathrm{i}\, g_s\, \alpha_k \frac{\lambda_k}{2}\right\}$ e, portanto, não pode representar uma partícula que interage fortemente.

Tabela 1.2 Composição de cores do octeto dos glúons

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r\,\overline{g} \;+\; g\,\overline{r}\right)$
$\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(r\,\overline{g} \;-\; g\,\overline{r}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r\,\overline{r} \;-\; g\,\overline{g}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r\,\overline{b} \;+\; b\,\overline{r}\right)$
$\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(r\,\overline{b} \;-\; b\,\overline{r}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(g\,\overline{b} \;+\; b\,\overline{g}\right)$
$\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(g\,\overline{b} \;-\; b\,\overline{g}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(r\,\overline{r} \;+\; g\,\overline{g} \;-\; 2b\,\overline{b}\right)$

1.5. Fontes primárias

Alvarez, L.W.; Eberhard, Ph.; Good, M.L.; Graziano, W.; Ticho, H.K. & Wojcicki, S.G. 1959. Neutral Cascade Hyperon Events. *Physical Review Letters* **2**, n. 5, p. 215-219.

Ashkin, J.; Blaser, J.P; Feiner, F. & Stern, M.O. 1956. Pion Proton Scattering at 150 and 170 MeV. *Physical Review* **101**, n. 3, p. 1149-1158.

Barnes, V.E. 1952. Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three. *Physical Review Letters* **12**, n. 8, p. 204-206.

Brueckner, K.A. 1952. Meson-Nucleon Scattering and Nucleon Isobars. *Physical Review* **86**, n. 1, p. 106-109.

Chamberlain, O.; Segrè, E.; Wiegand, C. & Ypsilantis, T. 1955. Observation of Antiprotons. *Physical Review* **100**, n. 3, p. 947-950.

Cork, B.; Lambertson, G.R.; Piccioni, O. & Wenzel, W.A. 1957. Antineutros Produced from Antiprotons in Charge Exchange Collisions. *Physical Review* **104**, n. 4, p. 1193-1197.

Erwin, A.R.; March, R.; Walker, W.D. & West, E. 1961. Evidence for $\pi - \pi$ Resonance in the $I = 1$, $J = 1$ State. *Physical Review Letters* **6**, n. 11, p. 628-630.

Fermi, E. 1951. Angular Distribution of the Pions Produced in High Energy Nuclear Collisions. *Physical Review* **81**, n. 5, p. 683-687.

Fermi, E. 1953. Multiple Productions of Pions in Nucleon-Nucleon Collisions at Cosmotron Energies. *Physical Review* **92**, n. 2, p. 452-453.

Gell-Mann, M. 1956. The Interpretation of the New Particles as Displaced Charged Multiplets, *Nuovo Cimento* **4**, n. 32, p. 848-866.

Gell-Mann, M. 1962a. The Eightfold Way: A theory of strong interaction symmetry. *CALTECH Report* **CTSL-20**. Republicado em *The Eightfold Way*. Perseus Publishing ed. 2000. p. 11.

Gell-Mann, M. 1962b. Symmetries of Baryons and Mesons. *Physical Review D* **125**, n. 3, p. 1067-1084.

Gell-Mann, M. 1964a. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Physics Letters* **8**, n. 3, p. 214-215.

Gell-Mann, M. 1964b. The Symmetry Group of Vector and Axial Vector Currents. *Physics* **1**, p. 63-75.

Greenberg, O.W. 1964. Spin and Unitary-Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons. *Physical Review Letters* **13**, n. 20, p. 598-602.

Han, M. & Nambu, Y. 1965. Three-Triplet Model with Double $SU(3)$ Symmetry. *Physical Review* **139**, n. 4B, p. B1006-B1010.

Lattes, C.M.G.; Muirhead, H.; Occhialini, G.P.S. & Powell, C.F. 1947. Processes Involving Charged Mesons. *Nature* **159**, n. 4047, p. 694-697.

Nakano, T. & Nishijima, K. 1953. Charge Independence for V-Particles. *Progress of Theoretical Physics* **10**, n. 5, p. 581-582.

Nambu, Y.; Nishijima, K. & Yamaguchi, Y. 1951a. On the Nature of V-Particles, I. *Progress of Theoretical Physics* **6**, n. 4, p. 615-619.

Nambu, Y.; Nishijima, K. & Yamaguchi, Y. 1951b. On the Nature of V-Particles, II. *Progress of Theoretical Physics* **6**, n. 4, p. 619-622.

Ne'emann, Y. 1961. Derivation of strong interactions from gauge invariance. *Nuclear Physics* **26** (2), p. 222. Republicado em *The Eightfold Way*. Perseus Publishing ed. 2000, p. 58.

Nishijima, K. 1955. Charge Independence Theory of V Particles. *Progress of Theoretical Physics* **13**, n. 3, p. 285-304.

Okubo, S. 1962. Note on Unitary Symmetry in Strong Interaction. I. *Progress of Theoretical Physics* **27**, n. 5, p. 949-966. Disponível em: http://ptp.ipap.jp/link?PTP/27/949/. On the Full Symmetry in Sakata Model. *Progress of Theoretical Physics* **27**, n. 6, p. 1221-1232. Note on Unitary Symmetry in Strong Interaction. II. *Progress of Theoretical Physics* **28**, n. 1, p. 24-32.

Pais, A. *et al.* 1952. Some Remarks on the V-Particles. *Physical Review* **86**, n. 5, p. 663-672.

Pevsner, A. *et al.* 1961. Evidence for a Three-Pion Resonance Near 550 MeV. *Physical Review Letters* **7**, n. 11, p. 421-423.

Rochester, G.D. & Butler, C.C. 1947. Evidence for the Existence of New Unstable Elementary Particles. *Nature* (Kyoto) **160**, p. 855-857.

Sakata, S. 1956. On a Composite Model for the New Particles. *Progress on Theoretical Physics* (Kyoto) **16**, n. 6, p. 686-688.

Yukawa, H. 1935. On the Interaction of Elementary Particles. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* **17** p. 48-57. Reproduzido em Beyer, R.T. (Ed.), *Selected Papers in Foundations of Nuclear Physics*. New York: Dover (1949).

Zweig, G. 1964a. An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking. I. *CERN Report* **No. 8182/TH 401** (January, 17). Republicado em *Symmetries in Elementary Particle Physics*, New York: Academic Press, 1965, p. 192 ou em http://cdsweb.cern.ch/record/352337?ln:en.

Zweig, G. 1964b. An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking. II. *CERN Report* **No. 8419/TH 412** (February, 21). Republicado em *Symmetries in Elementary Particle Physics*, New York: Academic Press, 1965, p. 192 ou em http://cdsweb.cern.ch/record/570209?ln=en.

1.6. Outras referências e sugestões de leitura

Bassalo, J.M.F. 1994. Partículas Elementares: do Átomo Grego à Supercorda. In: Caruso, F. & Santoro, A. (Eds.), *Do Átomo Grego à Física das Interações Fundamentais*. Rio de Janeiro: CBPF.

Bassalo, J.M.F. & Cattani, M.S.D. 2008. *Teoria de Grupos*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Bransden, B.H. & Moorhouse, R.G. 1973. *The Pion-Nucleon System*. Princeton: University Press.

Brown, L.M.; Dresde, M. & Hoddeson, L. (Eds.) 1989. *Pions to Quarks*. Cambridge: University Press.

Cahn, R.N. & Goldhaber, G. 1989. *The Experimental Foundations of Particle Physics*. Cambridge: University Press. Apresentação cronológica e compilação de publicações de vários experimentos fundamentais da Física de Partículas. A maioria dos experimentos citados no texto pode ser encontrada nesse livro.

Close, F.E. 1979a. *An Introduction to Quarks and Partons*. New York: Academic Press.

Close, F.E. 1979b. The New Particles and Their Significance. *Contemporary Physics* **20**, n. 3, p. 293-313.

Gell-Mann, M. 1982. Strangeness. In: Comptes Rendus du Colloque International sur l'Histoire de la Physique de Particules, Paris: Les Éditions de Physique. *Journal de Physique* **43**, Colloque C-8, supplément au n. 12, dezembro de 1982, p. (C8)395-408.

Gell-Mann, M. 1987. Particle Theory from S-Matriz to Quarks. In: *Symmetries in Physics (1600-1980), Proceedings of the First International Meeting on the History of Scientific Ideas*, **25**, editado por M.G. Doncel, A. Hermann, L. Michel & A. Pais, Barcelona: Bellaterra, p. 474-497.

Gell-Mann, M. 1989. Progress in Elementary Particle Theory, 1950-1964. In: Brown, Dresden & Hoddson, *op.cit.*, p. 694-711. *International Journal of Modern Physics A*, **25**, n. 20, p. 3857-3861.

Gell-Mann, M. 2010. Some Lessons from Sixty Years of Theorizing. *International Journal of Modern Physics A*, **25**, n. 20, p. 3857-3861.

Gell-Mann, M. & Ne'eman, Y. 1964. *The Eightfold Way*. Perseus Publishing ed. 2000. Livro que reproduz os principais artigos sobre o que se convencionou chamar de *The Eightfold Way*.

Gottfried, K. & Weisskopf, V.F. 1984. *Concepts of Particle Physics*. Vol. 1, Oxford: University Press.

Greiner, W. & Müller, B. 1992. *Quantum Mechanics: Symmetries*. 2nd. ed., Berlin: Springer.

Kemmer, N. 1982. Isospin. In: Comptes Rendus du Colloque International sur l'Histoire de la Physique de Particules, Paris: Les Éditions de Physique. *Journal de Physique* **43**, Colloque C-8, supplément au n. 12, dezembro de 1982, p. (C8)359-393.

Lichtenberg, D.B. 1970. *Unitary Symmetry and Elementary Particles*. New York: Academic Press.

Lichtenberg, D.B. & Rosen, S.P. 1980. *Developments in the Quark Theory of Hadrons*. A Reprint Collection, vol. I: 1964-1978. Nonantum, MA: Hadronic Press.

Lipkin, H.J. 2007. From Sakata Model to Goldberg-Ne'eman Quarks and Nambu QCD Phenomenology and "Right" and "Wrong" Experiments. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **167**, p. 155-162.

Matveev, V.A. & Tavkhelidze, A.N. 2006. Color Quantum Number, Colored Quarks, and QCD. *Physics of Particles and Nuclei* **37**, n. 3, p. 307-316.

Nguyen-Khac, U. & Six, J. 1965. *Applications des Principes d'Invariances en Physique de Particules Elementaires.* Strasbourg & Belgrade. École Internationale de La Physique de Particules Elementaires Herceg Novi (Youguslavia).

Okun, L.B. 2007. The Impact of the Sakata Model. *Progress on Theoretical Physics Supplement* **167**, p. 163-174. arXiv:hep-ph/0611298.

Pais, A. 1988. *Inward Bounds of Matter and Forces in the Physical World.* Oxford: University Press.

Peeples, M.S. 2004. *Isospin: An Approximate Symmetry on the Quark Level.* http://web.mit.edu/molly/Public/8.06/final.pdf.

Pickering, A. 1984. *Constructing Quarks: A Sociological History of Particle Physics.* Chicago: University Press.

Rosner, J.L. 2002. The Eightfold Way. http://hep.uchicago.edu/~rosner/eight.pdf.

Sakurai, J.J. 1964. *Invariance Principles and Elementary Particles.* Princeton: University Press.

Salmeron, A.R. 2011. Quarks: Como Chegamos a Eles? In: Caruso; F., Oguri, V.; Santoro, A. (Eds.), *O que são Quarks, Glúons, Higgs, Buracos Negros e Outras Coisas Estranhas?* São Paulo: Livraria da Física.

Segrè, E. 2007. *From X-Rays to Quarks: Modern Physicists and Their Discoveries.* New York: Dover.

Stefanovich, E.V. 2010. Sakata Model of Hadrons Revisited, arXiv:1010.0458v1.

Watson, A. 2004. *The Quantum Quark.* Cambridge: University Press.

Zweig, G. 1980. Origins of the Quark Model. In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Baryon Resonances*, ed. N. Isgur, University of Toronto, Canada, p. 439-479.

Zweig, G. 2010. Memories of Murray and the Quark Model. Palestra apresentada em *Conference in Honor of Murray Gell-Mann's 80th Birthday*, Nanyang Technical University, Singapore. http://authors.library.caltech.ed/22350/1/memories.pdf. Publicado também em *International Journal of Modern Physics A* **25**, n. 20, p. 3863-3877.

Capítulo 2

A Eletrodinâmica Quântica

O capítulo anterior, baseando-se em propriedades dos grupos de simetria, mostrou como números quânticos atribuídos aos *quarks* explicam a espectroscopia hadrônica. Por outro lado, como já foi adiantado, a partir do estudo de certas colisões entre partículas, os *quarks* serão vistos como partículas reais, constituintes elementares dos hádrons.

Neste capítulo, serão apresentados a cinemática das colisões em física de altas energias, o espaço de fase invariante de Lorentz e, ainda, o cálculo de seções de choque de processos puramente eletromagnéticos, como a colisão elétron-múon, ou seja, algumas técnicas de cálculo de QED que serão úteis nos cálculos perturbativos de QCD.

Espera-se que os hádrons (bárions e mésons) sejam constituídos de *quarks* e *glúons*. Evidências dinâmicas em favor dessa concepção serão apresentadas, nos Capítulos 3 e 4, corroborando a ideia de que os hádrons têm constituintes (pártons) que, por exemplo, no chamado espalhamento profundamente inelástico elétron-próton (ep), se comportam no interior do próton como partículas livres. Este é o ponto de partida para o desenvolvimento da teoria para as interações fortes: a QCD.

Em princípio, a QCD deveria descrever o comportamento dos hádrons tanto em baixas energias como também em altas energias. No entanto, por ser uma teoria de *gauge* não abeliana e, portanto, não linear (Capítulo ??), implica uma complexidade matemática que torna muito difícil prever o comportamento experimental de fenômenos que envolvem as interações fortes em baixas energias. Por exemplo, a descrição de estados ligados de *quarks*.

Por outro lado, para energias muito maiores que dezenas de GeV, no domínio das altas energias, a intensidade das interações fortes entre os *quarks* torna-se comparável à intensidade das interações eletromagnéticas. Desse modo, a partir de diagramas de Feynman correspondentes a vários processos análogos aos eletromagnéticos, cálculos que utilizam os métodos perturbativos desenvolvidos na QED podem ser aplicados com pequenas alterações à parte "dura" da interação descrita pela QCD, que parece se fatorizar da parte "mole" (*soft*) da interação forte, que tem a ver com o fenômeno de hadronização, como se verá mais adiante.

A QED, teoria quântico-relativística que descreve as interações eletromagnéticas entre partículas eletricamente carregadas como os elétrons e os múons é uma das teorias mais bem estabelecidas na Física das Partículas Elementares. Resultado de trabalhos teóricos e experimentais iniciados em 1927, com a equação de Dirac, e culminando com os trabalhos de J. Schwinger, R. Feynman, S. Tomonaga e F. Dyson, em 1947, serviu como modelo sobre o qual a QCD foi construída. Assim, o entendimento das interações entre léptons e fótons facilita a compreensão da QCD, o que justifica apresentar aqui alguns aspectos formais da QED.

Do ponto de vista experimental, o estudo das interações entre as partículas elementares, como os *léptons* e os *quarks*, é realizado pela análise de espalhamentos resultantes de suas colisões. Nesses experimentos, os resultados podem ser expressos pela chamada seção de choque diferencial, que caracteriza a distribuição angular das partículas espalhadas. Desse modo, torna-se possível comparar as previsões teóricas com os resultados experimentais.

Tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista experimental, em qualquer processo em altas energias é conveniente separar a parte puramente cinemática (Seção 2.1), decorrente das *leis de conservação de energia* e *momentum*, da parte dinâmica (Seção 2.2), resultante das interações específicas entre as partículas.

2.1. A cinemática das colisões em altas energias

A aceitação da hipótese de que um pequeno número de partículas são os constituintes básicos da matéria implica admitir que suas ações mútuas, ou interações, são caracterizadas também por poucos modos de acoplamento.

Segundo o Modelo Padrão da Física de Partículas, os constituintes fundamentais da matéria, os *quarks* e os *léptons*, estão sujeitos apenas às chamadas interações fundamentais: gravitacional, eletromagnética, fraca e forte.

A magnitude dessas interações, além da distância mútua entre as partículas, depende de outras características intrínsecas como a massa, a carga elétrica, o *spin* e a cor. Essas propriedades, a rigor, só são propriamente definidas pelas observações de suas interações, isto é, pelo comportamento exibido pelas partículas ao interagirem.

Apesar das transformações complexas que essas interações provocam, como a dispersão por sistemas alvos, a criação de novas partículas, a desintegração de núcleos atômicos e os decaimentos de partículas, algumas leis de caráter geral regem todos os processos, independentemente da complexidade, e são chamadas *leis de conservação*. Essas leis podem se referir tanto às propriedades gerais de um sistema quanto às propriedades individuais das partículas que participam de um processo, como a massa, a carga, a energia ou o *momentum*.

Em última análise, do ponto de vista teórico, as leis de conservação refletem as propriedades espaço-temporais que regulam o comportamento das partículas, sendo decorrentes das operações de simetria associadas às interações fundamentais.

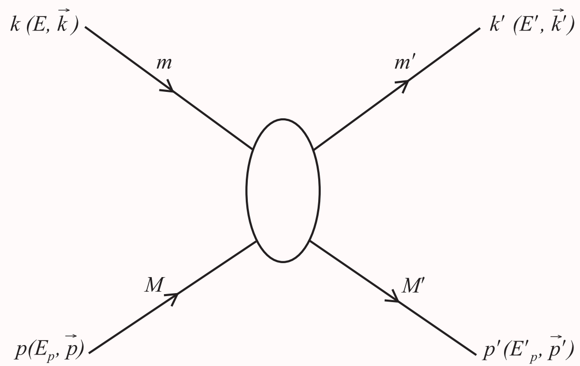


Figura 2.1 Esquema de colisão entre duas partículas, da qual também resultam duas partículas $(2 \to 2)$.

Segundo o esquema básico de colisão envolvida em um espalhamento do tipo $2 \to 2$, entre duas partículas pontuais de massas m e M (Figura 2.1), com *quadrimomenta* iniciais, $k = (E, \vec{k})$ e $p = (E_p, \vec{p})$, que resulta também em duas partículas, não necessariamente idênticas às iniciais, com *quadrimomenta* $k' = (E', \vec{k}\,')$ e $p' = (E'_p, \vec{p}\,')$, respectivamente, a lei de conservação de *momentum*-energia é expressa como

$$k + p = k' + p'$$

Define-se o *quadrimomentum* transferido no processo por

$$\boxed{q = k - k' = p' - p = (\nu, \vec{q})} \tag{2.1}$$

em que $\nu = E - E'$ e $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$.

Em um espalhamento do tipo $2 \to 2$, nem todos os possíveis produtos escalares[1] invariantes com relação às transformações de Lorentz, associados às grandezas envolvidas no processo, são independentes.

---

[1] O produto escalar de dois quadrivetores $a = (a_\mu) = (a_0, \vec{a}) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_\mu) = (b_0, \vec{b}) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ é definido por

$$a \cdot b = a_\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a_\mu b_\nu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

em que

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Logo, para uma partícula de massa m e *quadrimomentum* $p = (E, \vec{p})$, pode-se escrever

$$p.p = p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\underbrace{k \cdot k}_{m^2} & k \cdot k' & k \cdot q & k \cdot p & k \cdot p' \\
 & \underbrace{k' \cdot k'}_{m'^2} & k' \cdot q & k' \cdot p & k' \cdot p' \\
 & & \underbrace{q \cdot q}_{q^2} & q \cdot p & q \cdot p' \\
 & & & \underbrace{p \cdot p}_{M^2} & p \cdot p' \\
 & & & & \underbrace{p' \cdot p'}_{M'^2}
\end{array}
$$

• **Colisões elásticas**

Para colisões elásticas ($m' = m$ e $M' = M$) não há a criação de novas partículas, e, de acordo com a definição do *quadrimomentum* transferido, pode-se escrever

$$
\begin{cases}
q = k - k' \quad \Rightarrow \quad q^2 = m^2 + m'^2 - 2k \cdot k' \quad \Rightarrow \quad k \cdot k' = C_1 - q^2/2 \\
q = p' - p \quad \Rightarrow \quad q^2 = M'^2 + M^2 - 2p' \cdot p \quad \Rightarrow \quad p \cdot p' = C_2 - q^2/2
\end{cases}
$$

em que C_1 e C_2 são constantes, e, portanto, $k \cdot k'$ e $p \cdot p'$ são funções de q^2.

Analogamente,

$$\begin{cases} k\cdot q = m^2 - k\cdot k' = C_3 + q^2/2 \\ q\cdot p = p\cdot p' - M^2 = C_4 - q^2/2 \\ k'\cdot q = k\cdot k' - m'^2 = C_5 - q^2/2 \\ q\cdot p' = M'^2 - p\cdot p' = C_6 - q^2/2 \\ k + p = k' + p' \quad \Rightarrow \quad m^2 + 2k\cdot p + M^2 = m'^2 + 2k'\cdot p' + M'^2 \\ k\cdot p' = k\cdot p + m^2 - k\cdot k' \\ k'\cdot p = k\cdot p - q\cdot p \end{cases}$$

em que C_3, C_4, C_5 e C_6 são constantes, e, portanto, $k\cdot q$, $q\cdot p$, $k'\cdot q$ e $q\cdot p'$ são funções de q^2.

Uma vez que $k\cdot p$ é uma constante definida pelas condições iniciais da colisão, ou seja, pelos estados iniciais das partículas de massas m e M, $k'\cdot p'$ é constante também. Assim, os produtos escalares $k\cdot p'$ e $k'\cdot p$ podem ser igualmente expressos como funções de q^2.

Experimentalmente, o *quadrimomentum* transferido está associado ao ângulo de espalhamento θ, como indicado na Figura 2.2.

De acordo com a Figura 2.2, em altas energias ($|\vec{k}| \simeq E, |\vec{k}'| \simeq E'$), pode-se escrever

$$|\vec{q}|^2 = \underbrace{|\vec{k}|^2}_{E^2} + \underbrace{|\vec{k}'|^2}_{E'^2} - 2\,\underbrace{|\vec{k}|}_{E} \cdot \underbrace{|\vec{k}'|}_{E'} \cos\theta$$

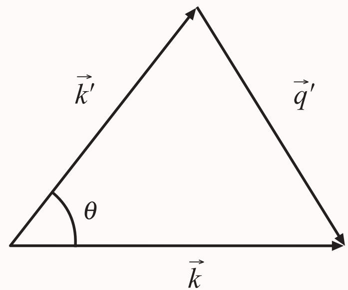


Figura 2.2 Esquema de *momentum* transferido ($\vec{q}$) em uma colisão e sua relação com o ângulo de espalhamento.

Uma vez que

$$\nu = E - E' \quad \Rightarrow \quad \nu^2 = E^2 + E'^2 - 2EE'$$

obtém-se

$$\boxed{q^2 = \nu^2 - |\vec{q}|^2 = -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE' \operatorname{sen}^2\theta/2} \tag{2.2}$$

Para colisões elásticas, nas quais a energia (E) da partícula de massa m é muito menor do que a energia de repouso da partícula de massa M ($E \ll M$),

$$E' \simeq E \quad \Rightarrow \quad q^2 \simeq -|\vec{q}|^2 \tag{2.3}$$

À medida que a energia da partícula de massa m aumenta, deve-se considerar o recuo da partícula de massa M. Nesse caso, $E'(\theta) < E$ é função do ângulo de espalhamento (Seção 3.1).

Em qualquer dos casos de colisão elástica, q^2 é função apenas do ângulo de espalhamento θ.

Exercício 2.1 Mostre que, para espalhamentos do tipo $2 \to 2$, em altas energias:

$$|\vec{k}| = |\vec{k}'| = |\vec{p}| = |\vec{p}'|$$

• **Colisões inelásticas**

Para colisões inelásticas, em que apenas a partícula de massa M não é mais pontual, e a partícula de massa m não é aniquilada, enquanto $m' = m$, $M' \neq M$ é uma quantidade variável. Assim, $p \cdot p'$ e $q \cdot p$ são funções de M' e q^2.

De modo alternativo, pode-se considerar M' como função de $q \cdot p$ e q^2, ou seja, $M' = f[(q \cdot p), q^2]$, e expressar $p \cdot p' = f_1(M') - q^2/2 = f_2[(q \cdot p), q^2]$. Consequentemente, para colisões não elásticas, $q \cdot p$ e q^2 podem ser escolhidos como os *únicos* invariantes de Lorentz independentes.

Esse foi o caso dos experimentos de espalhamento profundamente inelástico de elétrons com energias da ordem de 10 GeV, por prótons, realizados em Stanford, nos anos 1960.

Nessas circunstâncias, considerando que o estado inicial do próton é o repouso, ou seja, $p = (M, \vec{0})$, $q \cdot p$ é função de E', e pode-se utilizar, alternativamente, como quantidades independentes os invariantes de Lorentz

$$q^2 \qquad \text{e} \qquad \nu = \frac{q \cdot p}{M} = E - E' \tag{2.4}$$

Do ponto de vista teórico, uma escolha conveniente para quantidades independentes, em espalhamentos inelásticos, são os invariantes

$$\begin{cases} x = -\dfrac{q^2}{2(q \cdot p)} = -\dfrac{q^2}{2M\nu} & (0 < x < 1) \\[2ex] y = \dfrac{q \cdot p}{k \cdot p} = \dfrac{\nu}{E} & (0 < y < 1) \end{cases} \tag{2.5}$$

Exercício 2.2 Mostre que, para colisões elásticas, em altas energias:

$$x\Big|_{\text{elástica}} = -\frac{q^2}{2(q \cdot p)}\Bigg|_{\text{elástica}} = 1$$

e, que

$$x\Big|_{\text{inelástica}} = -\frac{q^2}{2(q \cdot p)}\Bigg|_{\text{inelástica}} < 1$$

para colisões inelásticas, para as quais $M' > M$.

- **As variáveis de Mandelstam**

De acordo com o esquema do espalhamento $2 \to 2$ (Figura 2.1), pode-se também definir os seguintes invariantes de Lorentz,

$$\begin{cases} s = (k+p)^2 = (k'+p')^2 \\ \\ t = (k-k')^2 = (p-p')^2 \\ \\ u = (k-p')^2 = (k'-p)^2 \end{cases} \tag{2.6}$$

denominados *variáveis de Mandelstam*.[2]

Fisicamente, s representa o quadrado da energia das partículas, no referencial do centro de massa (C.M.), e t é o quadrado do *quadrimomentum* transferido, que, no sistema de Breit,[3] é igual ao quadrado do *momentum* transferido.

---

[2] Esses invariantes foram definidos por Stanley Mandelstam para descrever as amplitudes de espalhamento de processos que envolviam interações fortes residuais entre mésons e bárions.

[3] No referencial de Breit,

$$\vec{k} + \vec{k}' = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E'$$

Exercício 2.3 Mostre que, para um espalhamento $2 \to 2$, em altas energias,

$$\begin{cases} (t/s)^2 = \left(\dfrac{1-\cos\theta}{2}\right)^2 \\ \\ (u/s)^2 = \left(\dfrac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 \end{cases}$$

em que θ é o ângulo de espalhamento entre as partículas 1 e 3, no referencial do centro de massa.

2.2. Seções de choque

Além dos vínculos cinemáticos, a distribuição angular das partículas espalhadas só é apropriadamente caracterizada ao serem levadas em conta as interações dinâmicas entre as partículas. A quantidade calculada, tanto pela QED, como pela QCD, ou qualquer outra teoria quântica, é a probabilidade de que um determinado grupo de partículas, ou eventos do tipo j, seja produzido (como partículas espalhadas) em torno da região onde ocorreu a colisão (Figura 2.3).

Experimentalmente, as partículas incidentes, após serem aceleradas, constituem um feixe quase homogêneo de partículas de mesma espécie e, praticamente, com mesma energia. Por sua vez, as partículas espalhadas,

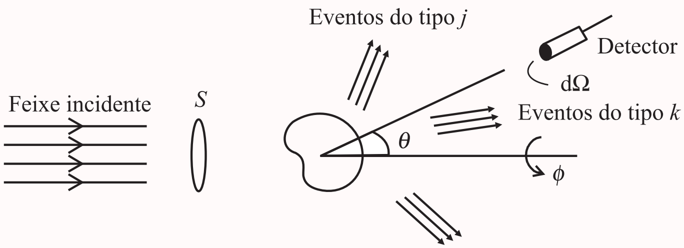


Figura 2.3 Esquema de espalhamento produzido por colisões do tipo $2 \to N$.

resultantes das colisões com algum sistema de alvos, ou outro feixe de partículas interceptado pelo feixe incidente, são registradas em torno da região de colisão por detectores que cobrem quase todo o intervalo de ângulo sólido (Ω) em torno da região de interação, durante um dado intervalo de tempo (Figura 2.3).

Em geral, registra-se a taxa temporal de partículas incidentes em uma superfície de área S, igual à seção reta do feixe incidente, ou à seção reta do sistema de alvos ou ainda de um outro feixe de partículas interceptado pelo feixe incidente, que se define como fluxo incidente (ϕ_{inc}),

$$\phi_{\text{inc}} = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}N_{\text{inc}}}{\mathrm{d}t} \tag{2.7}$$

em que N_{inc} é o número de partículas incidentes por unidade de tempo (t) sobre a superfície de área S.

Com relação às partículas espalhadas, os detectores registram a taxa temporal de partículas, por exemplo, associadas a eventos do tipo j, por unidade de ângulo sólido (Ω),

$$\frac{\mathrm{d}n^j}{\mathrm{d}\Omega}$$

na qual n^j é o número de partículas do tipo j espalhadas por unidade de tempo.

Supondo que as partículas incidentes que cruzam a superfície de área S colidam com N_a partículas de um sistema alvo, ou de um outro feixe de partículas, a razão

$$\frac{\text{taxa temporal de eventos do tipo } j/\text{ângulo sólido}}{\text{fluxo incidente} \times \text{número de alvos}}$$

é chamada *seção de choque diferencial do espalhamento* e pode ser expressa como

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma^j}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{N_\mathrm{a}\phi_\mathrm{inc}}\frac{\mathrm{d}n^j}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}n^j}{\mathrm{d}\Omega}} \tag{2.8}$$

A quantidade $L = N_\mathrm{a}\phi_\mathrm{inc}$ é denominada *luminosidade*.

De modo alternativo, o fluxo de partículas incidentes perpendicularmente sobre a superfície de um sistema de alvos (Figura 2.4) pode ser expresso como

$$\boxed{\phi_\mathrm{inc} = \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{inc}|\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{inc} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{a}|}{S|\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{inc} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{a}|\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V}\right)_\mathrm{inc}|\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{inc} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{a}| = \rho_\mathrm{inc}|\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{inc} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{a}|} \tag{2.9}$$

em que$V$ é o volume que contém as partículas incidentes que colidirão com os alvos, ρ_inc é a densidade de partículas incidentes e $(\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{inc} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{a})$ é a diferença entre as velocidades das partículas incidentes e do sistema de alvos.

Da integração da seção de choque diferencial sobre os ângulos azimutal (φ) e polar de espalhamento (θ), associada a eventos do tipo j, resulta a seção de choque de produção de eventos desse tipo:

$$\sigma^j = \int \left(\frac{\mathrm{d}\sigma^j}{\mathrm{d}\Omega}\right)\mathrm{d}\Omega$$

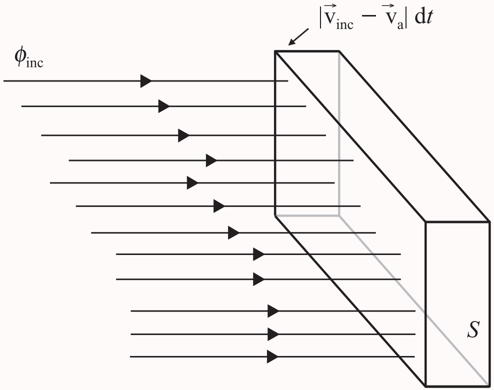


Figura 2.4 Representação esquemática do fluxo incidente em um espalhamento.

Desse modo, a taxa temporal de produção de eventos do tipo j pode ser estimada por

$$n^j = \frac{\mathrm{d}N^j}{\mathrm{d}t} \simeq L\,\sigma^j$$

e, portanto, o número de partículas do tipo j produzidas ao longo de um intervalo de tempo τ pode ser estimado por

$$\boxed{N^j \simeq \left(\int_0^\tau L\mathrm{d}t\right)\,\sigma^j = \mathcal{L}\,\sigma^j} \tag{2.10}$$

em que $\mathcal{L} = \displaystyle\int_0^\tau L\,\mathrm{d}t$ é a *luminosidade integrada* no período τ.[4]

Para colisões de dois feixes (1 e 2) acelerados em pacotes que contêm, respectivamente, N_1 e N_2 partículas, e se deslocam em sentidos opostos em anéis circulares, nos chamados aceleradores do tipo colisores, a luminosidade é um parâmetro característico dos feixes dado por

$$\boxed{L = \frac{N_1 N_2}{S_{\text{feixe}}}\,f} \tag{2.11}$$

na qual f é a taxa de cruzamento dos pacotes (*crossing rate*) e S_{feixe} é a área efetiva da seção reta dos feixes.

[4] Experimentalmente, o número estimado de partículas produzidas ao longo de um tempo que corresponde a uma luminosidade integrada $\mathcal{L}$ é dado por

$$N^j_{\text{exp}} \simeq \mathcal{L}\,\sigma^j\,\epsilon$$

em que $0 \leq \epsilon \leq 1$ é a eficiência do processo de detecção das partículas.

Por exemplo, no *Large Hadron Collider* (LHC) do CERN,[5] onde feixes de seção reta igual a 10^{-5}cm^2 em pacotes de 10^{11} prótons ($N_1 = N_2 = 10^{11}$) colidem a uma taxa de 3×10^7 Hz, a luminosidade estimada é da ordem de

$$L = \frac{10^{11} \times 10^{11}}{10^{-5}} \times 3 \times 10^7 \simeq 10^{34}\,\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Desse modo, ao longo de um ano ($\sim 10^7$ s) de operação dos feixes, espera-se que a luminosidade integrada do LHC alcance um valor da ordem de

$$\mathcal{L} \simeq 10^{34} \times 10^7 = 10^{41}\text{cm}^{-2} = 10^2\,\text{fb}^{-1}$$

Uma vez que a seção de choque de produção do bóson de Higgs é da ordem de 100 fb, pode-se estimar que

$$\sigma_{\text{Higgs}} \simeq 100\,\text{fb} \quad \Rightarrow \quad N_{\text{Higgs}} \leq 10^4/\text{ano}\ (30/\text{dia})$$

As partículas espalhadas podem ser de mesma natureza das partículas incidentes, como no caso de colisões elásticas, ou de natureza distinta, como nas colisões inelásticas.

Em geral, em um espalhamento resultante da interação de muitas partículas, ocorrem tanto colisões elásticas como inelásticas. Desse modo, a seção de choque total do espalhamento é expressa como

$$\sigma_{\text{T}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{nel}} = \sigma_{\text{el}} + \sum_j \sigma^j$$

[5] Originalmente “Centre Européen de Recherches Nucléaires”, o grande laboratório europeu de Física de Partículas, em Genebra.

em que a última soma engloba todas as seções de choque parciais de cada processo de colisão que envolve a absorção de energia das partículas incidentes, como a criação de outros tipos de partículas (distintas das incidentes), ou a excitação de um sistema composto como os bárions e mésons.

Do ponto de vista teórico, a taxa temporal de eventos do tipo j é dada pela taxa de probabilidade de ocorrência desses eventos, resultantes da interação de uma partícula incidente com uma outra partícula (de um sistema alvo, ou de um outro feixe). Essa taxa de probabilidade é expressa, usualmente, pela chamada *regra de ouro de Fermi*, Equação (2.22), como o produto do quadrado do módulo da amplitude de probabilidade invariante M_{fi}^{j} (Seção 2.4) pelo número de estados finais (n_f) do processo de colisão, além de um fator que expressa a lei de conservação de *momentum*.

$$\boxed{\mathrm{d}w_{fi}^{j} = (2\pi)^4\, \delta(p_i - p_f)\ |M_{fi}^{j}|^2\, n_f} \qquad \text{(regra de ouro nº 2 de Fermi)} \tag{2.12}$$

em que p_i é o *quadrimomentum* inicial total das partículas que colidem e p_f é o *quadrimomentum* final total das partículas espalhadas resultantes.

De acordo com a normalização dos estados livres de férmions, como *léptons* e *quarks* (Seção 2.4), o número de estados finais em uma região do espaço de fase, de volume espacialmente unitário, é dado por

$$n_f = \prod_l \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_l^{\,\prime}}{(2\pi)^3(2E_l^{\prime})}$$

em que $l = 1, 2, \ldots, N_f^j$ (número de partículas finais no evento j).

Portanto, a seção de choque de produção de eventos do tipo j resultantes da colisão de duas partículas

$(2 \to N_f^j)$ é teoricamente calculada por

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma^j\Big|^{2\to N_f^j} = \frac{1}{F}\mathrm{d}w_{fi}^j = \frac{1}{F}(2\pi)^4\delta(p_i - p_f)|M_{fi}^j|^2 \prod_l \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_l'}{(2\pi)^3(2E_l')}} \tag{2.13}$$

em que $F = (2E_1)(2E_2)|\vec{\mathrm{v}}_1 - \vec{\mathrm{v}}_2|$ é também um fator invariante de Lorentz, associado ao fluxo das partículas incidentes do feixe 1 e ao número de partículas do feixe ou alvo 2, e $(\vec{\mathrm{v}}_1 - \vec{\mathrm{v}}_2)$ é a diferença entre as respectivas velocidades.

Exercício 2.4 Mostre que, para colisões de feixes colineares, o fator de fluxo pode ser expresso de modo manifestamente covariante como

$$F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

ou, em altas energias $(s \to \infty)$, como

$$\lim_{s\to\infty} F = 2s$$

A expressão para a seção de choque é, usualmente, escrita de maneira compacta, em termos de fatores invariantes de Lorentz, como

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma^j = \frac{|M_{fi}^j|^2}{F}\,\mathrm{dLips}} \tag{2.14}$$

em que $\mathrm{dLips} = (2\pi)^4\, \delta(p_i - p_f) \displaystyle\prod_l \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_l'}{(2\pi)^3(2E_l')}$, deriva de *Lorentz invariant phase space*.

• **Espalhamentos do tipo $2 \to 2$**

Para espalhamentos do tipo $2 \to 2$ (Figura 2.1), a seção de choque diferencial associada à distribuição de qualquer uma das partículas pode ser expressa de uma forma geral válida para qualquer que seja o tipo de interação (eletromagnética, forte ou fraca) entre as partículas.

Nesse caso, o fator de fluxo é dado por

$$F = (2E)(2E_p)|\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{p}}|$$

e o fator dLips, por

$$\mathrm{dLips} = (2\pi)^4\, \delta\big(p + k - p' - k'\big)\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^3(2E')}\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}\,'}{(2\pi)^3(2E'_p)}$$

Considerando que, em altas energias,

$$\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{2E'} = \frac{|\vec{k}\,'|^2}{2E'}\,\mathrm{d}|\vec{k}\,'|\,\mathrm{d}\Omega \simeq \frac{E'}{2}\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\Omega$$

e que, integrando sobre p',

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}\,'}{2E'_p}\,\delta\big(p + q - p'\big) \;&= \int \underbrace{\mathrm{d}^3\vec{p}\,'\,\mathrm{d}p'_0}_{\mathrm{d}p'}\;\delta\big(p + q - p'\big)\,\theta(p'_0)\;\delta\big(\underbrace{p'^2_0 - E'^2_p}_{p'^2 - M'^2}\big)\\
&= \delta\big[\big(p + q\big)^2 - M'^2\big]\\
&= \delta\big[\big(M + \nu\big)^2 - |\vec{q}|^2 - M^2\big]\\
&= \delta\big(2M\nu + q^2\big) = \frac{1}{2M}\;\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)
\end{aligned}$$

resulta que, para colisões elásticas nas quais $M' = M$ e a partícula de massa M está inicialmente em repouso em relação ao laboratório ($E_p = M, \vec{p} = 0$), o *quadrimomentum* transferido obedece à relação

$$q^2 = -4EE' \operatorname{sen}^2\theta/2 = -2M\nu = -2M(E - E') \tag{2.15}$$

Assim, a energia da partícula espalhada, como função do ângulo de espalhamento e da energia incidente, é dada por [6]

$$\boxed{E'(\theta) = \frac{E}{1 + 2\,\dfrac{E}{M}\,\mathrm{sen}^2\theta/2}} \tag{2.16}$$

e a expressão para a seção de choque, apropriada para colisões inelásticas, por

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E'}\right|_{\text{lab}}^{2\to 2} = \frac{|M_{fi}|^2}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{4M^2}\,\frac{E'}{E}\,\delta\!\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)} \tag{2.17}$$

Integrando-se, finalmente, sobre a energia E', obtém-se a expressão

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{elast. lab}}^{2\to 2} = \frac{|M_{fi}|^2}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{4M^2}\,\frac{E'}{E}} \tag{2.18}$$

para a seção de choque diferencial de um espalhamento elástico do tipo $2 \to 2$, em termos de variáveis determinadas no sistema do laboratório.

Se a partícula alvo de massa M for relativamente pesada, tal que $E \ll M$, como no caso do espalhamento de elétrons por prótons a energia menores que 100 MeV, pode-se considerá-la um alvo fixo e $E' \simeq E$. Nesse caso, a seção de choque pode ser expressa, simplesmente, como

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{elast. lab}}^{\text{alvo fixo}} = \frac{|M_{fi}|^2}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{4M^2} \qquad (E \ll M)} \tag{2.19}$$

[6] Essa mesma relação pode ser obtida de modo puramente cinemático (Seção 3.1).

Exercício 2.5 Mostre que, para o espalhamento em altas energias, que resulta de colisões entre duas partículas, e cujo estado final também apresenta duas partículas ($2 \to 2$), a seção de choque diferencial, em termos de variáveis determinadas no sistema do centro de massa (C.M.) das partículas, é dada por

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{CM}}^{2\to 2} = \frac{|M_{fi}|^2}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{4s} \qquad \big(\text{altas energias}\big) \tag{2.20}$$

em que $s = E_i^2$, e E_i é a soma das energias iniciais de cada partícula com relação ao CM, ou, em termos de invariantes de Lorentz, como

$$-\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right|^{2\to 2} = \frac{1}{\lambda(s, m^2, M^2)}\,\frac{|M_{fi}(s,t)|^2}{16\pi}$$

em que $t = (k - k')^2$, $\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + xz)$, e $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda(s, m^2, M^2) = s^2$.

• Seção de choque de Rutherford

No caso não relativístico, para uma partícula de massa m, sob a ação de um potencial externo V, a evolução da partícula é dada pela equação de Schrödinger,

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\big|\Psi(t)\big\rangle}{\mathrm{d}t} = H\big|\Psi(t)\big\rangle \tag{2.21}$$

na qual $H = H_\circ + V$, e $H_\circ$ é o operador hamiltoniano para estados livres (quando $V = 0$).

Logo, pode-se escrever

$$\Big(\underbrace{\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - H_\circ}_{L_\circ}\Big)\big|\Psi(t)\big\rangle = L_\circ\big|\Psi(t)\big\rangle = V\,\big|\Psi(t)\big\rangle$$

Admitindo-se que a solução, em um dado instante t, pode ser expressa como

$$\big|\Psi(t)\big\rangle = \big|\Psi_i(t)\big\rangle - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\,G_\circ(t-t')\,V\,\big|\Psi(t')\big\rangle$$

em que $\big|\Psi_i(t)\big\rangle = e^{-\mathrm{i}E_i t}\,\big|i\big\rangle$ é a solução que representa estados iniciais assintoticamente livres com energia E_i, ou seja,

$$L_\circ\,\big|\Psi_i(t)\big\rangle = 0$$

e $G_\circ(t-t')$ é a chamada *função de Green* associada à equação de Schrödinger.

Uma vez que a expressão

$$L_\circ\big|\Psi(t)\big\rangle = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\,\big[L_\circ G_\circ(t-t')\big]\,V\,\big|\Psi(t')\big\rangle = V\,\big|\Psi(t)\big\rangle$$

deve ser satisfeita, a função de Green deve satisfazer a equação

$$L_\circ\,G_\circ(t-t') = \mathrm{i}\,\delta(t-t')$$

Desse modo, resulta que

$$G_\circ(t) = \theta(t)\,e^{-\mathrm{i}H_\circ t}$$

em que $\theta(t)$ é a função degrau unitário de Heaviside.

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > t' \\ \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

Exercício 2.6 Verifique que a função de Green

$$G_\circ(t) = \theta(t)\, e^{-\mathrm{i}H_\circ t}$$

satisfaz a equação

$$L_\circ\, G_\circ(t-t') = \mathrm{i}\,\delta(t-t')$$

Admitindo-se ainda que, em 1ª ordem, o potencial externo é suficientemente pequeno tal que a solução pode ser aproximada por

$$\big|\Psi(t)\big\rangle = \big|\Psi_i(t)\big\rangle - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, G_\circ(t-t')\, V\, \big|\Psi_i(t')\big\rangle$$

a amplitude de probabilidade de transição (a_{fi}) para um outro estado final assintoticamente livre $\big|\Psi_f(t)\big\rangle =$

$e^{-\mathrm{i}E_f t}\left|f\right\rangle$ com energia $E_f \neq E_i$, devido ao potencial de interação V, é dada por

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} a_{fi} &= \left\langle \Psi_f(t) \middle| \Psi(t) \right\rangle = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \left\langle \Psi_f(t) \right| G_\circ(t-t')\, V \left| \Psi_i(t') \right\rangle \\
&= -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, e^{-\mathrm{i}(E_i - E_f)t} \left\langle f \right| V \left| i \right\rangle \\
&= -\mathrm{i}\,(2\pi)\,\delta(E_i - E_f)\, M_{fi}
\end{aligned}$$

Explicitando os estados livres inicial e final, $\psi_i = e^{\mathrm{i}\vec{p}_i\cdot\vec{x}}$ com *momentum* $\vec{p}_i$ e $\psi_f = e^{\mathrm{i}\vec{p}_f\cdot\vec{x}}$ com *momentum* $\vec{p}_f$,[7] em termos de coordenadas espaciais, resulta que a amplitude invariante M_{fi} é a transformada de Fourier do potencial, ou seja,

$$\begin{aligned}
M_{fi} &= \langle f|V|i\rangle = \left(\psi_f, V\psi_i\right) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \psi_f^*(\vec{x})\, V(\vec{x})\, \psi_i(\vec{x}) \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{-\mathrm{i}(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\cdot\vec{x}}\, V(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}}\, V(\vec{x}) = V(\vec{q})
\end{aligned}$$

em que $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ é o elemento espacial de volume, $\vec{x} = (x, y, z)$ descreve as coordenadas espaciais da partícula, e $\vec{q} = (\vec{p}_i - \vec{p}_f)$ é o *momentum* transferido.

Uma vez que os estados livres são normalizados em um volume unitário ($V = 1$), o número de estados

[7] Os estados inicial e final são normalizados em um volume unitário.

livres finais em uma região ($V\,\mathrm{d}^3\vec{p}_f = \mathrm{d}^3\vec{p}_f$) do espaço de fase é dado por

$$\left.\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{h^3}\right|_{V=1} = \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3\hbar^3} = \left.\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3}\right|_{\hbar=1}$$

Assim, a taxa de probabilidade de transição é dada por

$$\mathrm{d}w_{fi} = \left(\lim_{T\to\infty}\frac{|a_{fi}|^2}{T}\right)\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3}$$

O cálculo de

$$\lim_{T\to\infty}\frac{|a_{fi}|^2}{T} = \lim_{T\to\infty}\Big[(2\pi)\,\delta(E_i - E_f)\Big]^2\,|M_{fi}|^2$$

pode ser feito utilizando-se o chamado *truque de Fermi*, expressando o quadrado da função delta de Dirac como

$$\Big[(2\pi)\,\delta(E_i - E_f)\Big]^2 = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\,e^{\mathrm{i}(E_i-E_f)t}\,(2\pi)\,\delta(E_i - E_f)$$

Tendo-se em conta que

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\,e^{\mathrm{i}\overbrace{(E_i - E_f)}^{\omega}t} &= \frac{e^{\mathrm{i}\omega T/2} - e^{-\mathrm{i}\omega T/2}}{\mathrm{i}\omega}\\ &= \frac{2\mathrm{sen}\omega T/2}{\omega}\to T \quad (\omega\to 0)\end{aligned}$$

obtém-se

$$\lim_{T\to\infty} \frac{|a_{fi}|^2}{T} = (2\pi)\,\delta(E_i - E_f)\,|M_{fi}|^2$$

e, portanto, a chamada *regra de ouro de Fermi* para a taxa de probabilidade de colisões

$$\boxed{\mathrm{d}w_{fi} = (2\pi)\,\delta(E_i - E_f)\,|M_{fi}|^2\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3}} \tag{2.22}$$

Para um potencial de interação devido a uma outra partícula de carga Ze,

$$V(\vec{x}) = -\frac{Ze^2}{|\vec{x}|} = -\frac{Ze^2}{r}$$

uma vez que o potencial satisfaz a equação de Poisson,

$$\nabla^2 V = -4\pi Z e^2\,\delta(\vec{r})$$

de acordo com as propriedades da transformada de Fourier (T.F.),

$$\begin{cases} \mathrm{T.F.}\left(\nabla^2 V\right) = -|\vec{q}|^2\,V(\vec{q}) \\ \\ \mathrm{T.F.}\left[\delta(\vec{r})\right] = 1 \end{cases}$$

a transformada de Fourier do potencial é dada por

$$V(\vec{q}) = -4\pi\,\frac{Ze^2}{|\vec{q}|^2} \quad \Rightarrow \quad |M_{fi}|^2 = (4\pi)^2\,\frac{Z^2e^4}{|\vec{q}|^4}$$

A seção de choque no caso de colisão elástica não relativística, para a qual $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|, E_i = E_f = E$, é dada

$$\mathrm{d}\sigma\Big|_{\text{elast.}} = (2\pi)\,\delta(E_i - E_f)\,\frac{|M_{fi}|^2}{|\vec{\mathrm{v}}_i|}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3}$$

Uma vez que os estados livres são normalizados em um volume unitário, $\rho_{\text{inc}} = 1$ e $|\vec{\mathrm{v}}_i| = \dfrac{|\vec{p}_i|}{m}$ é igual ao fluxo incidente (ϕ_{inc}).

Tendo-se em conta que

$$\begin{cases} \mathrm{d}^3\vec{p}_f = |\vec{p}_f|^2\,\mathrm{d}|\vec{p}_f|\,\mathrm{d}\Omega \\ \\ |\vec{p}_f|^2 = 2mE_f \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_f|\,\mathrm{d}|\vec{p}_f| = m\,\mathrm{d}E_f \end{cases}$$

e, considerando-se a Figura 2.2 para colisões elásticas não relativísticas, tem-se que

$$\frac{|\vec{q}|}{2} = |\vec{p}_i|\,\mathrm{sen}\theta/2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{q}|^4 = 4 \times 16m^2E^2\,\mathrm{sen}^4\theta/2$$

obtém-se a *seção de choque de Rutherford*:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big|_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2e^4}{16E^2\,\mathrm{sen}^4\theta/2}} \tag{2.23}$$

A seção de choque de Rutherford descreve a distribuição angular de partículas pontuais no sistema do laboratório, devido a colisões elásticas coulombianas com um alvo fixo (pesado), também pontual, no regime não relativístico.

Para um potencial de interação devido a uma distribuição contínua de partículas carregadas, com carga total Ze, que satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -4\pi Z e^2 \, \rho(\vec{r})$$

em que $\rho(\vec{r})$ é a distribuição normalizada das partículas carregadas, a transformada de Fourier do potencial é dada por

$$V(\vec{q}) = -\frac{4\pi Z e^2}{|\vec{q}|^2} \, F(\vec{q})$$

na qual a transformada de Fourier $F(\vec{q})$ da distribuição de cargas é denominada *fator de forma* da distribuição de partículas.

Assim, a seção de choque para o espalhamento de partículas pontuais por um alvo fixo não pontual, devido a colisões elásticas no regime não relativístico, é então dada por

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{elast. lab}}^{\text{alvo fixo não pontual}} = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Rutherford}} \left|F(\vec{q})\right|^2} \tag{2.24}$$

2.3. A equação de Dirac

No caso relativístico, a evolução de uma partícula de massa m, carga e, e *spin* $s = 1/2$, em interação com um campo eletromagnético, descrito por um potencial quadridimensional (A_μ), em uma região do espaço-tempo cujas coordenadas são $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z)$, é dada pela equação de Dirac

$$\boxed{\left(\mathrm{i}\,\gamma_\mu \partial_\mu - m\right) \Psi(x) = -e\gamma_\mu A_\mu(x)\, \Psi(x) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)} \tag{2.25}$$

em que $(\partial_\mu) = (\partial_{x_0}, -\partial_{x_1}, -\partial_{x_2}, -\partial_{x_3}) = (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3) = (\partial_0, -\vec{\nabla})$ e as matrizes $(\gamma_\mu) = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, que, na representação de Dirac, são expressas como

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou, em termos das matrizes de Pauli, como

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

em que a matriz identidade 2×2, I_2, e as matrizes de Pauli são dadas por

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A equação de Dirac foi obtida, em 1928, na tentativa de se estabelecer uma equação para uma teoria quântica relativística, ou seja, uma teoria dinâmica das interações eletromagnéticas que fosse invariante com relação às transformações de Lorentz.

Exercício 2.7 A partir das propriedades das matrizes de Pauli e da matriz identidade I_2,

$$\sigma_k^2 = I_2 \qquad \big[\sigma_k, \sigma_l\big] = 2\mathrm{i}\,\epsilon_{klj}\,\sigma_j \qquad \big\{\sigma_k, \sigma_l\big\} = 2\delta_{kj} I_2$$

Mostre que:

a) $$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0^2 = I_4 \\ \\ \gamma_k^2 = -I_4 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_\mu \gamma_\mu = 4 I_4$$

em que I_4 é a matriz identidade 4×4.

b) $$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0^\dagger = -\gamma_0 \\ \\ \gamma_k^\dagger = -\gamma_k \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$$

c) $\big\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\big\} = 2 g_{\mu\nu} I_4 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{tr}\,\gamma_\mu \gamma_\nu = 4 g_{\mu\nu}$

d) $\mathrm{tr}\,\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu = 4\big(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}\big)$

em que $k = 1, 2, 3$ (índices latinos) e $\mu = 0, 1, 2, 3$ (índices gregos).

As soluções da equação de Dirac para estados livres de uma partícula de massa m, *quadrimomentum*

$p = (E, p_x, p_y, p_z)$ e *spin* s (1/2) são dadas pelo campo espinorial de ordem 1

$$\Psi(x) = u_p \, e^{-\mathrm{i}p \cdot x}$$

em que u_p é o espinor que descreve os estados de *spin* ($s_z = \pm 1/2$),

$$u_p(s_z = +1/2) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/(E+m) \\ p_+/(E+m) \end{pmatrix}$$

ou

$$u_p(s_z = -1/2) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p_-/(E+m) \\ -p_z/(E+m) \end{pmatrix}$$

e $p_\pm = p_x \pm \mathrm{i}\, p_y$.

Os espinores livres para estados com mesma projeção de *spin* (s_z) são normalizados, em um volume unitário, segundo

$$\boxed{u_p^\dagger u_p = 2E} \tag{2.26}$$

e satisfazem a equação

$$\boxed{(\gamma_\mu p_\mu - m)u_p = 0} \tag{2.27}$$

Exercício 2.8 Mostre explicitamente que:

a) para estados de mesma projeção de *spin*

$$u_p^\dagger(1/2)u_p(1/2) = u_p^\dagger(-1/2)u_p(-1/2) = 2E$$

b) para estados de projeções distintas de *spin*

$$u_p^\dagger(1/2)u_p(-1/2) = u_p^\dagger(-1/2)u_p(1/2) = 0$$

c) os espinores livres satisfazem a equação

$$\gamma_\mu p_\mu u_p = m u_p$$

d) $\overline{u}_p u_p = 2m$, em que $\overline{u}_p = u_p^\dagger \gamma_0$

- **Amplitude invariante em QED**

No caso relativístico, a amplitude de probabilidade (a_{fi}) associada a uma partícula do tipo I, em uma transição de estados livres iniciais com *quadrimomentum* p_1, para estados livres finais com *quadrimomentum* p_3, é dada por (Seção 1.4)

$$
\begin{aligned}
a_{fi} &= \int \mathrm{d}x\, \overline{\Psi}_3(x) \left[\mathrm{i}\, e\gamma_\mu A_\mu(x)\right] \Psi_1(x) \\
&= (\overline{u}_3 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_1) \underbrace{\int \mathrm{d}x\, e^{-\mathrm{i}(p_1-p_3)\cdot x}\, A_\mu(x)}_{A_\mu(q)} = -\mathrm{i}\left[\underbrace{\overline{u}_3(-e)\gamma_\mu u_1}_{j_\mu^I}\right] A_\mu(q) \\
&= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}x\, \underbrace{\left[\overline{u}_3(-e)\gamma_\mu u_1\right] e^{-\mathrm{i}(p_1-p_3)\cdot x}}_{J_\mu^I(x)} A_\mu(x) \\
&= -\mathrm{i}\, j_\mu^I A_\mu(q) = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}x\, J_\mu^I(x)\, A_\mu(x)
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

em que $\overline{\Psi}_3 = \Psi_3^\dagger \gamma_\circ$ é o adjunto relativístico de Ψ_3, $J_\mu^I(x)$ é a densidade de corrente associada aos estados livres da partícula I, $q = p_1 - p_3$, e $A_\mu(q)$ é a transformada de Fourier quadridimensional do potencial.[8]

Se a transição resulta da interação eletromagnética com uma outra partícula de mesma carga elétrica, ou seja, de uma densidade de corrente $J_\mu^{II}(x) = \overline{u}_4\, (\mathrm{i}\, e\gamma_\mu)\, u_2\, e^{-\mathrm{i}(p_2-p_4)\cdot x}$, associada a uma transição de estados livres iniciais com *quadrimomentum* p_2 para estados livres com *quadrimomentum* p_4, o potencial satisfaz a equação[9]

$$\Box\, A_\mu(x) = J_\mu^{II}(x)$$

[8] Portanto, a amplitude de probabilidade é proporcional à energia de interação da partícula com o potencial.

[9] $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador d'alembertiano.

o que implica

$$A_\mu(q) = -\frac{1}{q^2}\left(\overline{u}_4 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_2\right)(2\pi)^4\,\delta(q+p_2-p_4)$$

Logo, a amplitude de probabilidade a_{fi} pode ser expressa como

$$\begin{aligned} a_{fi} &= -i\,(2\pi)^4\,\delta(p_i-p_f)\,\underbrace{\left(\overline{u}_3 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_1\right)\left(\frac{-\mathrm{i}}{q^2}\right)\left(\overline{u}_4 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_2\right)}_{M_{fi}} \\ &= -\mathrm{i}\,(2\pi)^4\,\delta(p_i-p_f)\,M_{fi} \end{aligned}$$

em que $p_i = p_1 + p_2$ e $p_f = p_3 + p_4$ são os *quadrimomenta* inicial e final, e M_{fi} é a amplitude invariante do processo.

De acordo com a normalização dos espinores, a taxa de probabilidade de colisões é dada então por

$$\mathrm{d}w_{fi} = \left(\lim_{T\to\infty}\frac{|a_{fi}|^2}{T}\right)\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3(2E_3)}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3(2E_4)}$$

De modo análogo, o cálculo de

$$\lim_{T\to\infty}\frac{|a_{fi}|^2}{T} = \lim_{T\to\infty}\left[(2\pi)^4\,\delta(p_i-p_f)\right]^2|M_{fi}|^2$$

pode ser feito utilizando-se o *truque de Fermi*, expressando o quadrado da função delta de Dirac como

$$\lim_{T\to\infty}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\,e^{\mathrm{i}(E_i-E_f)t}}_{T}\,\underbrace{\left[\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}t\,e^{\mathrm{i}(p_{x_i}-p_{x_f})x}\right]^3}_{L^3=V=1}(2\pi)^4\,\delta^4(p_i-p_f)$$

e obtendo-se

$$\lim_{T\to\infty} \frac{|a_{fi}|^2}{T} = (2\pi)^4\,\delta(p_i - p_f)\,|M_{fi}|^2$$

Portanto, a taxa de probabilidade de colisões é dada por

$$\boxed{\mathrm{d}w_{fi} = (2\pi)^4\,\delta(p_i - p_f)\,|M_{fi}|^2\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3(2E_3)}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3(2E_4)}} \tag{2.29}$$

Dessa forma, a seção de choque, no contexto da QED, para um espalhamento do tipo $2 \to 2$, é dada pela expressão previamente apresentada na Seção 2.2.

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma(2\to 2) = \frac{1}{F}(2\pi)^4\delta(p_i - p_f)|M_{fi}|^2\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3(2E_3)}\,\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3(2E_4)}} \tag{2.30}$$

em que $F = 4\sqrt{(p_1.p_2) - m_1^2 m_2^2}$.

• **Notação *slash* de Feynman**

Usualmente, a equação de Dirac é expressa segundo a notação *slash* de Feynman para a representação espinorial dos quadrivetores.

$$\begin{cases} p = (p_\mu) = (E, \vec{p}) & \text{(quadrivetor)} \\ \qquad\Downarrow & \\ \not{p} = \gamma\cdot p = g_{\mu\nu}\gamma_\mu p_\nu & \text{(espinor de ordem 2)} \\ \quad = \gamma_\mu p_\mu = \gamma_0 E - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} & \end{cases}$$

Explicitamente,

$$\not{p} = \begin{pmatrix} E & 0 & -p_z & -p_- \\ 0 & E & -p_+ & p_z \\ p_z & p_- & -E & 0 \\ p_+ & -p_z & 0 & -E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E \end{pmatrix}$$

Para o operador diferencial $(\partial_\mu) = (\partial_0, -\vec{\nabla})$, obtém-se

$$\not{\partial} = g_{\mu\nu}\gamma_\mu\partial_\nu = \gamma_\mu\partial_\mu = \gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3$$

Portanto, a equação de Dirac para uma partícula de massa m e carga e, sob a ação de um campo eletromagnético A_μ, pode ser expressa de forma explicitamente covariante como

$$\boxed{\left(\mathrm{i}\,\not{\partial} - m\right)\Psi(x) = \mathrm{i}\,e\,\not{A}\Psi(x)} \tag{2.31}$$

2.4. Diagramas de Feynman e QED

Uma colisão do tipo $2 \to 2$, devido à interação eletromagnética entre dois férmions de *spin* 1/2, pode ser representada como na Figura 2.5.

Praticamente, no entanto, utilizam-se de modo quase canônico os chamados *diagramas de Feynman*, os quais, a partir das chamadas *regras de Feynman*, estabelecidas na QED, permitem uma generalização que engloba todos os processos resultantes das interações físicas fundamentais (eletromagnética, forte e fraca) para se determinar a amplitude invariante M_{fi}.

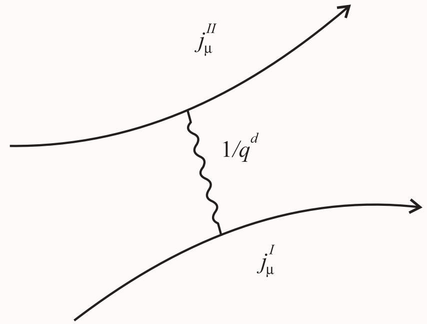


Figura 2.5 Esquema possível de representação da amplitude de probabilidade invariante $M_{fi} = \mathrm{i}\, j_\mu^I \left(1/q^2\right) j_\mu^{II}$, relativa à interação eletromagnética entre dois férmions de *spin* 1/2.

Nesse contexto, cada termo da amplitude invariante

$$M_{fi} = \left(\overline{u}_3 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_1\right) \left(\frac{-\mathrm{i}}{q^2}\right) \left(\overline{u}_4 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_2\right) \tag{2.32}$$

$$= \left(\overline{u}_3 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_1\right) \left(\frac{-\mathrm{i}\, g_{\mu\nu}}{q^2}\right) \left(\overline{u}_4 \mathrm{i}\, e\gamma_\nu u_2\right) \tag{2.33}$$

em que $q = p_1 - p_3$ é associado a um elemento de um diagrama (Figura 2.6), segundo

$$
\begin{cases}
\text{vértices } (\bullet) & \Rightarrow \quad \mathrm{i}\, e\gamma_\mu \\[2ex]
\text{linhas externas que } \left(\bullet\!\nearrow\right) \\ \text{saem de um vértice} & \Rightarrow \quad \overline{u}_p \\[2ex]
\text{linhas externas que } \left(\bullet\!\swarrow\right) \\ \text{chegam a um vértice} & \Rightarrow \quad u_p \\[2ex]
\text{linhas internas } \left(\bullet\!\sim\!\sim\!\sim\!\bullet\right) \\ \text{onduladas} & \Rightarrow \quad -\mathrm{i}/q^2 \quad \left(-\,\mathrm{i}g_{\mu\nu}/q^2\right)
\end{cases}
$$

Nesse sentido, o diagrama da Figura 2.6 representa o chamado canal t de um processo de espalhamento, em que $t = (p_1 - p_3)^2$.

Do ponto de vista da QED, diz-se que as linhas internas onduladas representam os fótons, os portadores da energia eletromagnética, ou os mediadores das interações eletromagnéticas entre partículas eletricamente carregadas. Em um diagrama de Feynman, tanto os espinores u_1 e u_3 como os espinores u_2 e u_4 não precisam estar, necessariamente, associados a uma mesma partícula. Em processos que envolvem a criação ou a aniquilação de partículas, ou mudança de sabores, esses espinores representam partículas distintas.

As soluções da equação de Dirac para estados livres de uma antipartícula de massa m, *quadrimomentum*

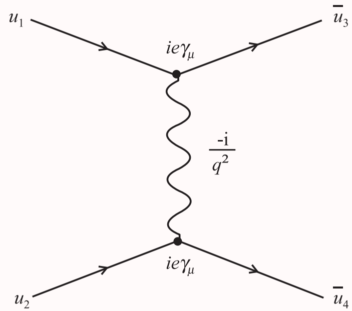


Figura 2.6 Diagrama de Feynman relativo à interação eletromagnética entre dois férmions de *spin* 1/2; u_1 e u_2 são estados iniciais livres, u_3 e u_4 são estados finais livres.

$p = (E, p_x, p_y, p_z)$ e *spin* s (1/2) são dadas pelo campo espinorial de ordem 1

$$\Psi(x) = \mathrm{v}_p\, e^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

em que v_p é o espinor que descreve os estados de *spin* $(s_z = \pm 1/2)$ da antipartícula,

$$\mathrm{v}_p(s_z = +1/2) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} p_-/(E+m) \\ -p_z/(E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathrm{v}_p(s_z = -1/2) = -\sqrt{E+m}\begin{pmatrix} p_z/(E+m) \\ p_+/(E+m) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Os espinores livres para estados de antipartículas de mesma projeção de *spin* (s_z) são normalizados em um volume unitário, segundo

$$\boxed{\mathrm{v}_p^\dagger \mathrm{v}_p = 2E} \tag{2.34}$$

e satisfazem a equação

$$\boxed{\big(\gamma_\mu p_\mu + m\big)\mathrm{v}_p = 0} \tag{2.35}$$

Exercício 2.9 Mostre explicitamente que:

a) para estados de antipartículas de mesma projeção de *spin*

$$\begin{cases} \mathrm{v}_p^\dagger(1/2)\,\mathrm{v}_p(1/2) = 2E \\ \\ \mathrm{v}_p^\dagger(-1/2)\,\mathrm{v}_p(-1/2) = 2E \end{cases}$$

b) para estados de antipartículas de projeções distintas de *spin*

$$\begin{cases} \mathrm{v}_p^\dagger(1/2)\,\mathrm{v}_p(-1/2) = 0 \\ \\ \mathrm{v}_p^\dagger(-1/2)\,\mathrm{v}_p(1/2) = 0 \end{cases}$$

c) os espinores livres para antipartículas satisfazem a equação

$$\gamma_\mu p_\mu \mathrm{v}_p = -m\mathrm{v}_p$$

d) $\overline{\mathrm{v}}_p \mathrm{v}_p = 2m$, em que $\overline{\mathrm{v}}_p = \mathrm{v}_p^\dagger \gamma_\circ$

As regras de Feynman para antipartículas são

$$\begin{cases} \text{linhas externas que} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_p \\ \text{saem de um vértice} \\ \\ \text{linhas externas que} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{v}}_p \\ \text{chegam a um vértice} \end{cases}$$

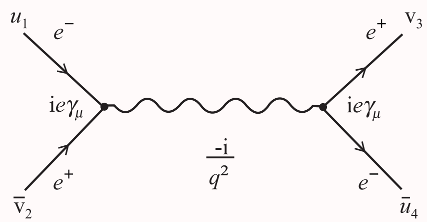


Figura 2.7 Diagrama de Feynman do canal s de um *espalhamento Bhabha* $(e^- e^+ \to e^+ e^-)$.

Por exemplo, baseando-se no diagrama de Feynman (Figura 2.7) que representa um dos possíveis canais de um espalhamento envolvendo a aniquilação e a criação de pares elétron-pósitron (*espalhamento Bhabha*), a amplitude invariante pode ser escrita como

$$M_{fi} = \left(\overline{u}_4 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu \mathrm{v}_3\right) \left(\frac{-\mathrm{i}}{q^2}\right) \left(\overline{\mathrm{v}}_2 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu u_1\right) \tag{2.36}$$

$$= \left(\overline{u}_4 \mathrm{i}\, e\gamma_\mu \mathrm{v}_3\right) \left(\frac{-\mathrm{i}\, g_{\mu\nu}}{q^2}\right) \left(\overline{\mathrm{v}}_2 \mathrm{i}\, e\gamma_\nu u_1\right) \tag{2.37}$$

em que $q = p_1 + p_2$, e o diagrama representa o chamado canal $s = (p_1 + p_2)^2$ do processo $e^- e^+ \to e^+ e^-$.

• **Propagadores**

Em primeira ordem, a expressão para a amplitude de probabilidade de transição na QED, Equação (2.28), pode ser estabelecida de modo análogo ao caso não relativístico, a partir do método da função de Green.

Expressando-se a equação de Dirac como

$$\underbrace{\left(\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/ - m\right)}_{L_\circ} \Psi(x) = \underbrace{-e\, A\!\!\!/}_{V(x)}\, \Psi(x)$$

e admitindo que a solução pode ser expressa como

$$\Psi(x) = \Psi_i(x) - \mathrm{i} \int \mathrm{d}x'\, G_\circ(x - x')\, V(x')\, \Psi_i(x')$$

na qual $\Psi_i(x) = u_i\, e^{-\mathrm{i} p_i \cdot x}$ é a solução que representa estados iniciais assintoticamente livres com *quadrimomentum* $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$, ou seja, tal que

$$L_\circ\, \Psi_i(x) = 0$$

a função de Green, $G_\circ(x - x')$, associada à equação de Dirac deve satisfazer a equação

$$L_\circ\, G_\circ(x - x') = \mathrm{i}\, \delta(x - x')$$

Desse modo, a transformada de Fourier quadridimensional da função de Green,

$$G_\circ(p) = \int \mathrm{d}x\, e^{\mathrm{i}p.x}\, G_\circ(x)$$

em que $p = (p_0, \vec{p})$, é dada por

$$\big(\not{p} - m\big)\, G_\circ(p) = \mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{G_\circ(p) = \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m} = \mathrm{i}\, \frac{\big(\not{p} + m\big)}{p^2 - m^2}}$$

e, portanto, a função de Green pode ser expressa como

$$G_\circ(x - x') = \int \frac{\mathrm{d}p}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}p\,\cdot\,(x - x')}\, \frac{\mathrm{i}\,\big(\not{p} + m\big)}{p^2 - m^2}$$

Uma vez que $p^2 - m^2 = p_0^2 - \overbrace{\left(|\vec{p}|^2 + m^2\right)}^{E^2} = (p_0 + E)\,(p_0 - E)$, a trajetória no plano complexo para a integração em p_0 deve incluir os dois polos, correspondentes às energias $+E$ e $-E$.

Fisicamente, estados livres com energia negativa, identificados por Dirac como soluções para antipartículas, foram reinterpretados por Feynman como estados livres com energia positiva, que descrevem a propagação de antipartículas em sentido temporal contrário ao das partículas.

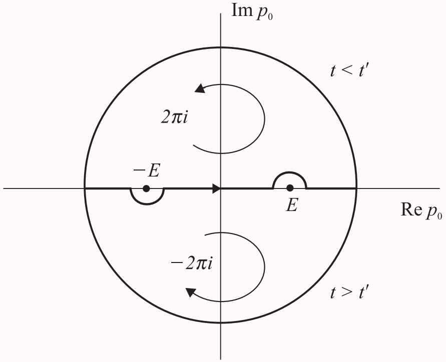


Figura 2.8 Trajetórias de Feynman para funções de Green de partículas e antipartículas.

Segundo Feynman, o contorno de integração para se determinar a função de Green associada a partículas que se propagam tal que $t > t'$ deve ser o semicírculo inferior $\left(\mathrm{Im}\; p_0 < 0\right)$ (Figura 2.8), o qual engloba o polo simples $+E$ (energia positiva),[10] ou seja,

$$G_\circ(x - x') = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{1}{(2\pi)} \int \frac{\mathrm{d}p_0\, e^{-\mathrm{i}p_0(t-t')}}{(p_0 + E)\,(p_0 - E)}\, \mathrm{i}\left(\gamma_0 p_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m\right)$$

De acordo com o teorema do resíduo de Cauchy, resulta que

$$\boxed{G_\circ(x - x') = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3(2E)}\, e^{-\mathrm{i}p.(x-x')} \left(\not{p} + m\right) \qquad (t > t')} \tag{2.38}$$

em que $p = (E, \vec{p})$.

Assim, a amplitude de probabilidade de transição (M_{fi}), de um estado inicial livre $\Psi_i = u_i\, e^{-\mathrm{i}p_i.x}$ com *quadrimomentum* $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$ para outro estado livre final $\Psi_f = u_f\, e^{-\mathrm{i}p_f.x}$ com *quadrimomentum* $p_f = (E_f, \vec{p}_f)$, é dada por

$$a_{fi} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\; \Psi_f^\dagger(x)\Psi(x) = -\mathrm{i} \int \mathrm{d}x' \underbrace{\int \mathrm{d}^3\vec{x}\; \Psi_f^\dagger(x) G_\circ(x - x')}_{\Phi(x')} V(x')\Psi_i(x') \tag{2.39}$$

[10] Para antipartículas, aquelas que se propagam tal que $t < t'$, o contorno de integração deve ser o semicírculo superior $\left(\mathrm{Im}\; p_\circ > 0\right)$, que engloba o polo simples $-E$ (energia negativa).

Levando em conta que $(\not{p}+m)/(2m) = \Big(\sum_{s=1,2} u_s\overline{u}_s\Big)/(2m) = \Lambda_+$ é o projetor sobre estados de energia positiva E, e de *spins* $1/2$ e $-1/2$, a função de Green ainda pode ser expressa como

$$\boxed{G_\circ(x-x') = \theta(t-t')\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\left(\frac{m}{E}\right)\,e^{-\mathrm{i}p.(x-x')}\,\Lambda_+} \tag{2.40}$$

De acordo com a normalização dos espinores, o termo $\Phi(x')$ corresponde a

$$\begin{aligned}
\Phi(x') &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\Big[u_f^\dagger e^{\mathrm{i}p_f.x}\Big]\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3(2E)}e^{-\mathrm{i}p.(x-x')}\Big(\sum_{s=1,2}u_s\overline{u}_s\Big)\gamma_\circ \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}\;e^{\mathrm{i}p.x'}}{(2\pi)^3(2E)}e^{-\mathrm{i}(E-E_f)t}\underbrace{\int\mathrm{d}^3\vec{x}\;e^{\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{p}_f).\vec{x}}}_{(2\pi)^3\delta\left(\vec{p}-\vec{p}_f\right)}\underbrace{\Big(\sum_{s=1,2}u_s\overline{u}_s\Big)}_{2E_f u_f^\dagger\gamma_\circ} \\
&= \underbrace{u_f^\dagger\,e^{\mathrm{i}p_f.x'}}_{\Psi_f^\dagger(x')}\,\gamma_\circ = \overline{\Psi}_f(x')
\end{aligned}$$

Exercício 2.10 Mostre que a função de Green para antipartículas pode ser expressa como

$$\boxed{G_\circ(x-x') = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3(2E)}\, e^{\mathrm{i}p.(x-x')}\,(\not{p}-m) \qquad (t<t')}$$

ou, ainda, como

$$\boxed{G_\circ(x-x') = \theta(t'-t)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\left(\frac{-m}{E}\right) e^{\mathrm{i}p.(x-x')}\,\Lambda_-}$$

em que $\Lambda_- = -\Big(\sum_{s=1,2} \mathrm{v}_s\overline{\mathrm{v}}_s\Big)/(2m) = -\Big(\not{p}-m\Big)/(2m)$ é o projetor sobre estados de energia negativa $-E$, e componentes de *spins* $1/2$ e $-1/2$.

Nesse sentido, a função de Green associada à equação de Dirac, denominada *propagador de Feynman* para férmions livres, é o operador que relaciona os estados livres de um férmion carregado de *spin* $1/2$ em duas regiões do espaço-tempo.

$$\boxed{\overline{\Psi}_f(x') = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\;\Psi_f^\dagger(x)\,G_\circ(x-x')}$$

Substituindo $\Phi(x') = \overline{\Psi}_f(x')$ na Equação (2.39), obtém-se a amplitude de probabilidade de transição, dada pela Equação (2.28),

$$\boxed{a_{fi} = \int \mathrm{d}x\, \overline{\Psi}_f(x) \left[\mathrm{i}\, e\gamma_\mu A_\mu(x)\right] \Psi_i(x)}$$

• Amplitude invariante para espalhamentos 2 → 2 não polarizados

Em geral, em um experimento que envolve a colisão de partículas, não se conhecem os estados de polarização de *spins* das partículas, ou seja, tanto os estados iniciais quanto os estados finais não são univocamente determinados.

Assim, para um espalhamento do tipo $2 \to 2$ não polarizado, o quadrado do módulo da amplitude invariante ($|M_{fi}|^2$) é dado pela superposição incoerente dos processos correspondentes aos 4 estados independentes de *spins* 1/2 das partículas iniciais e finais, ou seja, pela média sobre os estados de *spins* iniciais e finais,

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M_{fi}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L^I_{\mu\nu} L^{II}_{\mu\nu}$$

em que, de acordo com a Figura 2.1, as médias sobre os *spins* são expressas em termos dos chamados tensores eletromagnéticos, $L^I_{\mu\nu}$ e $L^{II}_{\mu\nu}$:

$$\begin{cases} L^I_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{s_{k'}\, s_k} \left(\overline{u}_{k'} \gamma_\mu u_k\right)^* \left(\overline{u}_{k'} \gamma_\nu u_k\right) = L^I_{\nu\mu} \\ \\ L^{II}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{s_{p'}\, s_p} \left(\overline{u}_{p'} \gamma_\mu u_p\right)^* \left(\overline{u}_{p'} \gamma_\nu u_p\right) = L^{II}_{\nu\mu} \end{cases} \tag{2.41}$$

Essas somas podem ser calculadas utilizando-se o chamado *truque de Casimir*, escrevendo-as em termos de traços das matrizes de Dirac e das representações espinoriais dos *quadrimomenta* das partículas.

Uma vez que a forma geral do tensor eletromagnético é dada por

$$T = \sum_{s_1 s_2} \left(\overline{u}_2 A u_1\right)^* \left(\overline{u}_2 B u_1\right)$$

em que $A = \gamma_\nu$ e $B = \gamma_\mu$, de acordo com as propriedades do produto escalar,

$$\left(\overline{u}_2 A u_1\right)^* = \left(u_2^\dagger \gamma_0 A u_1\right)^* = \left(\gamma_0 A u_1\right)^\dagger u_2$$

pode-se escrever

$$T = \sum_{s_1} \left(\gamma_0 A u_1\right)^\dagger \underbrace{\sum_{s_2} \left(u_2 \overline{u}_2\right)}_{\not{p}_2 + m_2} B u_1$$

Expressando-se o produto escalar em termos do traço $\left(u^\dagger u = \operatorname{tr} u u^\dagger\right)$,

$$T = \operatorname{tr}\left[\left(\not{p}_2 + m_2\right) \sum_{s_1} B u_1 \left(\gamma_0 A u_1\right)^\dagger\right]$$

e reescrevendo-se o termo adjunto como

$$\left(\gamma_\circ A u_1\right)^\dagger = u_1^\dagger A^\dagger \gamma_\circ = \overline{u}_1 \gamma_\circ A^\dagger \gamma_\circ = \overline{u}_1 \overline{A}$$

em que $\overline{A} = \gamma_0 A^\dagger \gamma_0$, obtém-se

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{tr}\left[(\not{p}_2 + m_2) B \sum_{s_1} (u_1 \overline{u}_1) \overline{A}\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[(\not{p}_2 + m_2) B (\not{p}_1 + m_1) \overline{A}\right] \end{aligned}$$

Como

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \gamma_\mu \\ A = \gamma_\nu \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} = \overline{\gamma}_\nu = \gamma_\nu$$

e sabendo que o traço é uma operação linear,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tr}\,(\alpha A) = \alpha(\mathrm{tr}\,A) \\ \\ \mathrm{tr}\,(A + B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B \end{array} \right.$$

e o traço de um número ímpar de matrizes de Dirac é nulo, pode-se escrever

$$T = \mathrm{tr}\left(\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu\right) + m_2 m_1 \mathrm{tr}\,\gamma_\mu \gamma_\nu$$

De acordo com as propriedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tr}\,\gamma_\mu \gamma_\nu = 4 g_{\mu\nu} \\ \\ \mathrm{tr}\,\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu = 4\big(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}\big) \end{array} \right.$$

resulta que

$$T = 4\big[p_{2\mu}p_{1\nu} - (p_2.p_1 - m_2m_1)g_{\mu\nu} + p_{2\nu}g_{1\mu}\big]$$

Desse modo, os tensores eletromagnéticos são dados por

$$\begin{cases} L^{I}_{\mu\nu} = 2\big[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - (k'.k - m'm)g_{\mu\nu}\big] \\ \\ L^{II}_{\mu\nu} = 2\big[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - (p'.p - M'M)g_{\mu\nu}\big] \end{cases} \tag{2.42}$$

A forma geral para a amplitude invariante, considerando-se qualquer possível canal de um processo eletromagnético em um espalhamento do tipo $2 \to 2$, que envolve férmions carregados de *spin* 1/2, é dada por

$$\boxed{\langle|M_{fi}|^2\rangle = \frac{e^4}{q^4}L^{I}_{\mu\nu}L^{II}_{\mu\nu}} \tag{2.43}$$

em que

$$\boxed{\begin{aligned} L^{I}_{\mu\nu}L^{II}_{\mu\nu} \;&= 8\Big[(k'\cdot p')(k\cdot p) \;+\; (k'\cdot p)(k\cdot p') - (M'M)(k'\cdot k) \;+ \\ &\qquad - m'm(p'\cdot p) \;+\; 2m'mM'M\Big] \end{aligned}} \tag{2.44}$$

Em altas energias, desprezando-se as massas das partículas, a equação fundamental da QED para a amplitude invariante pode ser expressa como

$$\boxed{\langle|M_{fi}|^2\rangle = \frac{8e^4}{q^4}\Big[\,(k'\cdot p')(k\cdot p) \;+\; (k'\cdot p)(k\cdot p')\,\Big]} \tag{2.45}$$

Utilizando-se o referencial do centro de massa, no qual

$$|\vec{k}| \simeq E_k \simeq |\vec{p}| \simeq E_p \simeq |\vec{k}'| \simeq E_{k'} \simeq |\vec{p}'| \simeq E_{p'} = p_i$$

pode-se relacionar facilmente os *quadrimomenta* com os invariantes de Mandelstam, em altas energias, como:

$$\begin{cases} s = (k+p)^2 \simeq 2k\cdot p \simeq (k'+p')^2 \simeq 2k'\cdot p' \simeq 4p_i^2 \\ t = (k-k')^2 \simeq -2k\cdot k' \simeq (p'-p')^2 \simeq -2p\cdot p' \simeq -2p_i^2(1-\cos\theta) \\ u = (k-p')^2 \simeq -2k\cdot p' \simeq (k'-p)^2 \simeq -2k'\cdot p \simeq -2p_i^2(1+\cos\theta) \end{cases} \tag{2.46}$$

Assim, em altas energias, a amplitude invariante no chamado canal t, Equação (2.45), pode ser expressa como

$$\boxed{\langle|M_{fi}|^2\rangle = 2e^4\left(\frac{s^2+u^2}{t^2}\right)} \qquad \text{(canal } t\text{)} \tag{2.47}$$

A amplitude invariante no chamado canal s pode ser obtida, a partir da Equação (2.47), pela troca $p_3 \leftrightarrow -p_2$, ou seja, $s \leftrightarrow t$,

$$\boxed{\langle|M_{fi}|^2\rangle = 2e^4\left(\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)} \qquad \text{(canal } s\text{)} \tag{2.48}$$

Isso é um exemplo prático que nos permite relacionar as amplitudes de dois processos por intermédio da conhecida *simetria de crossing*. A ideia subjacente é que a amplitude invariante de espalhamento (matriz S) para um certo processo envolvendo uma determinada partícula com *momentum* p no estado inicial é igual à matriz S para um processo quase idêntico, diferenciado do anterior apenas pelo fato de essa partícula não fazer mais parte do estado inicial e existir sua respectiva antipartícula de *quadrimomentum* $k = -p$ agora no estado final.[11] Desse modo, se o canal s da Equação (2.48) descreve o processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, a amplitude da Equação (2.47) descreve o processo $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. As relações de *crossing* são mais simples quando as amplitudes são escritas em termos das variáveis de Mandelstam. Tal propriedade será útil ao longo do livro.

[11] Em última análise, isso é uma consequência das regras de Feynman.

• O espalhamento $e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$

Como aplicação do que foi visto anteriormente, pode-se calcular explicitamente a seção de choque para o espalhamento eletromagnético $e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$ (Figura 2.9).

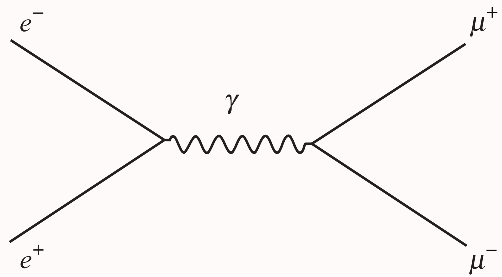


Figura 2.9 Diagrama de Feynman do espalhamento $e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$.

Esse espalhamento é descrito como um processo que ocorre no canal s. Assim, de acordo com as Equações (2.46) e (2.48), em termos das variáveis de Mandelstam, Equação (2.6), a amplitude invariante é dada por

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = e^4(1+\cos^2\theta) \tag{2.49}$$

e, segundo a equação (2.20), a seção de choque diferencial no referencial do C.M., por

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{C.M.}}^{e^-e^+\to\mu^+\mu^-} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta) \tag{2.50}$$

em que $\alpha = e^2/4\pi$ é a *constante de estrutura fina* de Sommerfeld, no sistema de Heaviside-Lorentz. Em QED, essa constante é usualmente denominada constante ou *parâmetro de acoplamento eletromagnético*.

Integrada em todas as direções, obtém-se a seção de choque total

$$\sigma\left(e^- e^+ \to \mu^+ \mu^-\right) = \frac{4\pi}{3s}\,\alpha^2 \tag{2.51}$$

Apesar de a seção de choque total estar em bom acordo com os resultados de experimentos (JADE, MARK J, PLUTO e TASSO) realizados no acelerador colisor de elétron-pósitron (PETRA) do DESY[12] (Figura 2.10) entre os anos de 1979 a 1981, a distribuição angular dos eventos (Figura 2.11) mostra algumas discrepâncias.

Os resultados desses experimentos no Laboratório DESY mostram que, para energias tal que $\sqrt{s} \sim 30$ GeV, não é possível a separação dos processos eletromagnéticos e fracos. Além do processo de aniquilação eletromagnético envolvendo um fóton (γ), deve-se levar em conta também as interações fracas, ou seja, o envolvimento do bóson Z (Figura 2.12).

Uma vez definidos o espaço de fase Lorentz invariante e as regras de Feynman da QED, as quais, como já foi dito, serão muito úteis quando se for definir as regras análogas da QCD, pode-se passar agora ao estudo das investigações experimentais que levaram à identificação dos *pártons* no interior dos *núcleons*.

[12] *Positron-Electron Tandem Ring Accelerator* do *Deutsches Elektronen-Synchrotron*, em Hamburgo.

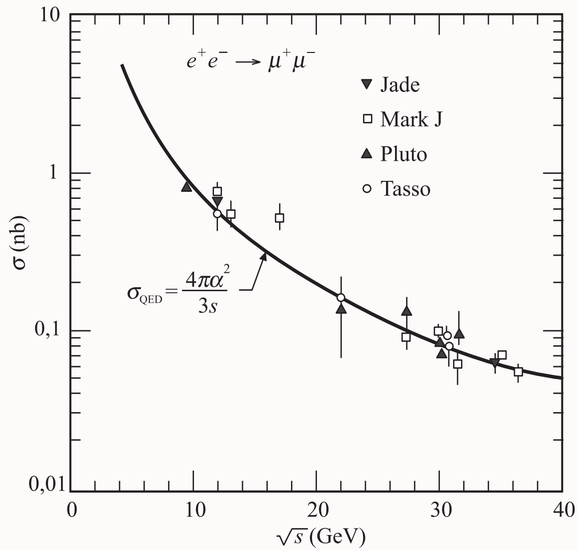


Figura 2.10 Seção de choque total $e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$, em função de s. Resultados das colaborações JADE, MARK J, PLUTO e TASSO.

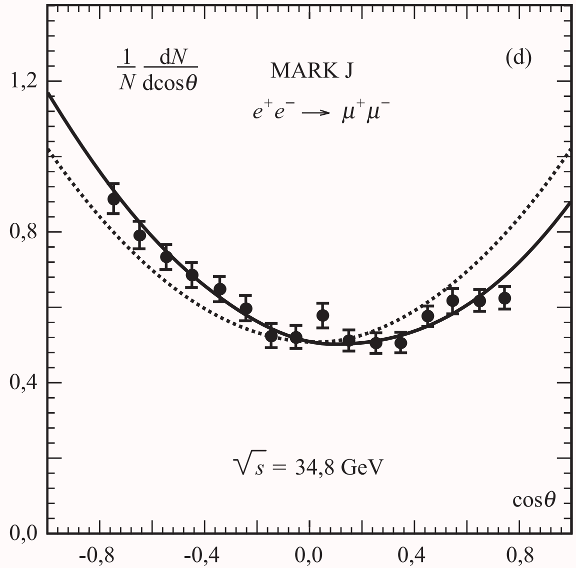


Figura 2.11 Distribuição angular de eventos do processo $e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$. A linha pontilhada é calculada apenas pela QED, e a linha cheia leva em conta também a produção de Z, ou seja, as interações fracas.

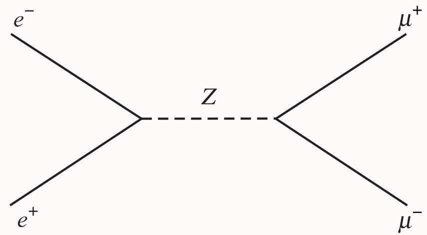


Figura 2.12 Contribuição eletrofraca, via troca de Z, ao espalhamento $e^-e^+ \to \mu^+\mu^-$.

2.5. Fontes primárias

Barber, D. *et al.* (MARK J Collaboration) 1979. Discovery of Three-Jet Events and a Test of Quantum Chromodynamics at PETRA. *Physical Review Letters* **43**, n. 12, p. 830-833.

Bartel, W. *et al.* (JADE Collaboration) 1980. Observation of planar three-jet events in e^+e^- annihilation and evidence for gluon bremsstrahlung. *Physics Letters B* **91**, n. 1, p.142-147.

Berger, C. *et al.* (PLUTO Collaboration) 1979. Evidence for gluon bremsstrahlung in e^+e^- annihilations at high energies. *Physics Letters B* **86**, n. 3-4, p. 418-425.

Brandelik, R. *et al.* (TASSO collaboration) 1979. Evidence for Planar Events in e^+e^- Annihilation at High Energies. *Physics Letters B* **86**, n. 2, p. 243-249.

Dirac, P.A.M. 1928. The Quantum Theory of Electron. *Proceedings of the Royal Society A* **117**, n. 778, p. 610-624. http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/117/778/610.

Dyson, F.J. 1948. The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. *Physical Review* **75**, n. 3, p. 486-502.

Dyson, F.J. 1949. The S-Matrix in Quantum Electrodynamics. *Physical Review* **75**, n. 11, p. 1736-1755.

Feynman, R.P. 1949a. The Theory of Positrons. *Physical Review* **76**, n. 6, p. 749-759.

Feynman, R.P. 1949b. Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. *Physical Review* **76**, n. 6, p. 769-789.

Mandelstam, S. 1958. Determination of the Pion-Nucleon Scattering Amplitude from Dispersion Relation and Unitarity General Theory. *Physical Review* **112**, n. 4, p. 1344-1360.

Schwinger, J. 1948. On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. *Physical Review* **73**, n. 4, p. 416-417.

Shrivastava, P.P. & Sudarshan, E.C.G. 1958. Multiple Production of Pions in Nuclear Collisions. *Physical Review* **110**, n. 3, p. 765-766.

Tomonaga, S. 1946. On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. *Progress of Theoretical Physics* **1**, n. 2, p. 27-42.

2.6. Outras referências e sugestões de leitura

Aitchison, I.J.R. & Hey, A.J.G. 1989. *Gauge Theories in Particle Physics.* 2nd. ed., Bristol: Adam Hilger.

Barger, V.D. & Phillips, R.J.N. 1987. *Collider Physics.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Bassalo, J.M.F. 2006. *Eletrodinâmica Quântica.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

Bjorken, J.D. & Drell, S.D. 1964. *Relativistic Quantum Mechanics.* New York: McGraw-Hill.

Byckling, E. & Kajantie, K. 1973. *Particle Kinematics.* London: John Wiley.

Collins, P.D.B. 2009. *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics.* Cambridge: University Press.

Dirac, P.M. 1930. *Quantum Mechanics.* Oxford: University Press, Fourth Revised Edition, 1967.

Dyson, F. 2007. *Advanced Quantum Mechanics.* Singapore: World Scientific.

Fermi, E. 1949. *Nuclear Physics.* Chicago: The University Press.

Feynman, R.P. 1961a. *Quantum Electrodynamics.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Feynman, R.P. 1961b. *The Theory of Fundamental Process.* Reading, Massachusetts: Benjamin/Cummings Publishing Company.

Feynman, R.P. 1988. *QED – A Estranha Teoria da Luz e da Matéria.* Lisboa: Portugal.

Greiner, W. & Reinhardt, J. 1994. *Quantum Electrodynamics.* Berlin: Springer.

Gribov, V.N. & Nyri, J. 2001. *Quantum Electrodynamics. Gribov Lectures on Theoretical Physics.* Cambridge: University Press.

Griffiths, D. 1987. *Introduction to Elementary Particles.* New York: John Wiley & Sons.

Hagedorn, R. 1963. *Relativistic Kinematics. A Guide to the Kinematic Problems of High-Energy Physics.* Reading, Massachusetts: W.A. Benjamin.

Halzen, F. & Martin, A.D. 1984. *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.* New York: John Wiley & Sons.

Leite Lopes, J. 1977. *Introducción a la Electrodinámica Cuántica.* México: Editorial Trillas.

Nachtmann, O. 1990. *Elementary Particle Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Perskin, D.H. 1987. *An Introduction to High Energy Physics.* Reading, Massachusetts: Addison Wesley, 3rd. ed.

Sakurai, J.J. 1967. *Advanced Quantum Mechanics.* Reading, Massachusetts: Adddison-Wesley.

Schweber, S.S. 1994. *QED and the Men Who Made It.* Princeton: University Press.

Schwinger, J. 1958. *Selected Papers on Quantum Electrodynamics.* New York: Dover. Coletânea dos principais artigos que deram origem à QED.

Schwinger, J. 1982. Quantum Electrodynamics – An Individual View. In: Comptes Rendus du Colloque International sur l'Histoire de la Physique de Particules, Paris: Les Éditions de Physique. *Journal de Physique* **43**, Colloque C-8, supplément au n. 12, dezembro de 1982, p. (C8)409-423.

Veltman, M. 1994. *Diagrammatica: The Path to Feynaman Diagrams.* Cambridge: University Press.

Wu, S.L. 1984. e^+e^- physics at PETRA – the first five years. *Physics Reports* **107**, p. 59-324.

Capítulo 3

A estrutura do próton e dos hádrons

A visão dinâmica da estrutura interna do próton, um dos constituintes dos núcleos atômicos, resultou do estudo do espalhamento de elétrons por prótons em altas energias, que se convencionou chamar *espalhamento profundamente inelástico*.

Neste capítulo, serão apresentados os passos históricos da descoberta da estrutura interna do próton.

Como visto no Capítulo 1, os *quarks*, postulados por Gell-Mann e Zweig, nos anos 1960, a partir de um esquema de classificação dos hádrons baseado em argumentos de simetria, abriu portas para que essas partículas fossem, com o tempo, consideradas constituintes últimos da matéria hadrônica, e envolvidos diretamente na dinâmica das interações fortes.

Do ponto de vista dinâmico, os *quarks*, como constituintes dos hádrons, começaram a emergir dos trabalhos experimentais de R. Hofstadter (Seção 3.1), nos anos 1950, no complexo de aceleradores de elétrons da

Universidade de Stanford, quando se percebe pela primeira vez que o próton tem uma subestrutura.

Finalmente, a natureza desses novos constituintes da matéria é estabelecida ao final dos anos 1960, com os experimentos de espalhamento profundamente inelástico de elétrons por prótons, também em Stanford, liderados por J.I. Friedman e H.W. Kendall do Massachusetts Institute of Technology (MIT), e R.E. Taylor de Stanford, e com os trabalhos teóricos de Feynman e J.D. Bjorken.

3.1. Os experimentos de Hofstadter

Antes de estudar a estrutura do próton, Hofstadter e colaboradores estabeleceram de modo sistemático as técnicas de determinação da distribuição de cargas no interior dos núcleos. Essas mesmas técnicas de análise foram utilizadas na determinação da estrutura do próprio próton.

• Espalhamento de elétrons por núcleos leves

Feixes de elétrons relativísticos incidentes sobre núcleos leves, com energias muito maiores que a energia de repouso ($E \gg m$), mas tais que $E \ll M_{\text{núcleo}}$, são elasticamente espalhados e distribuídos em função do ângulo polar (θ), com relação à direção incidente, de acordo com a chamada seção de choque de Mott, Equação (3.1). A fórmula de Mott pressupõe que os núcleos sejam objetos pontuais.

Esse foi o comportamento observado em 1953 pelo grupo liderado por Hofstadter ao espalhar elétrons, com energia de 25 MeV, por núcleos leves de berílio ($M = 9$ GeV), em folhas relativamente espessas, de 50 milímetros (Figura 3.1), no então recém-construído MARK III, acelerador linear de elétrons de Stanford.

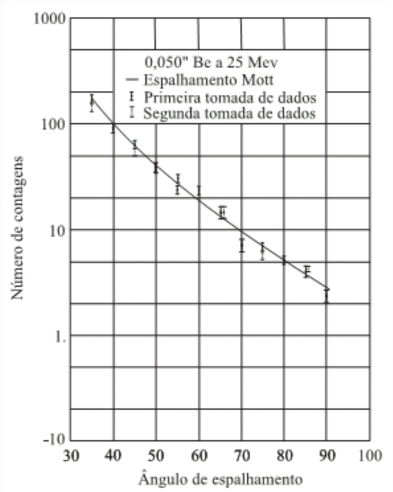


Figura 3.1 Distribuição angular de elétrons espalhados por alvos de berílio, com energia incidente (E) de 25 MeV, segundo Hofstadter (1953). A curva contínua representa a seção de choque de Mott.

• Fator de forma

No entanto, se a distribuição de cargas no núcleo fosse contínua, a força sobre os elétrons mais energéticos e com baixos parâmetros de impacto (os que têm maior probabilidade de penetrar no núcleo) seria menor do que sobre aqueles com parâmetros de impacto maiores. Desse modo, uma quantidade menor de elétrons seria espalhada elasticamente, principalmente a grandes ângulos polares (θ), no referencial do laboratório.[1] Assim, o desvio do comportamento esperado dos elétrons, determinado pela seção de choque teórica de um alvo pontual, reflete o quanto a carga elétrica nuclear é espacialmente distribuída, e não concentrada em uma região praticamente pontual.

A fórmula de Mott, para $m \ll E \ll M$,[2] é uma extensão da fórmula de Rutherford, e pode ser escrita como (Seção 3.2)

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{Mott}} = \underbrace{\left(\frac{Z^2 e^4}{16E^2 \mathrm{sen}^4\theta/2}\right)}_{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{Rutherford}}} \cos^2\theta/2 \tag{3.1}$$

Enquanto a fórmula de Rutherford caracteriza a distribuição angular do espalhamento de partículas sem *spin*, de carga elétrica $\pm e$ e energia E, por partículas pesadas, de carga $\pm Ze$, e também sem *spin*, na fórmula de Mott as partículas espalhadas têm *spin* 1/2, o que acarreta o fator $\cos^2\theta/2$.

Utilizando os chamados fatores de forma para modelar a distribuição de núcleons no interior dos núcleos, Hofstadter e colaboradores determinaram, com precisão, vários parâmetros nucleares, para núcleos leves e

[1] Segundo o referencial do laboratório, os núcleos são considerados em repouso.

[2] E e m são, respectivamente, a energia e a massa da partícula incidente, e M, a massa da partícula alvo.

pesados, como o raio nuclear e a distribuição de cargas no interior do núcleo. De acordo com os trabalhos de M.E. Rose, a fórmula que caracteriza a distribuição angular dos elétrons elasticamente espalhados com *momentum* $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = \sqrt{2mE}$ por um núcleo não pontual é dada, de maneira análoga ao fenômeno da difração por um sistema não pontual, por

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{exp}}^{ep\to ep} = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{Mott}} \left|F(\vec{q})\right|^2$$

em que $|\vec{q}| = 2\,|\vec{k}|\,\mathrm{sen}\theta/2$ é o *momentum* transferido ao núcleo (Figura 2.2), e a função

$$F(\vec{q}) = \int_{\text{núcleo}} \mathrm{dV}\,\rho(\mathrm{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i\tilde{q}.\tilde{r}}}$$

denominada *fator de forma nuclear*, caracteriza a distribuição $\rho(r)$ dos constituintes com carga elétrica no interior do núcleo. A baixos ângulos de espalhamento, quando também pouco *momentum* é transferido ao núcleo ($|\vec{q}| \to 0$), o fator de forma é dado por

$$F(\vec{q}) = \int \left[1 + i\vec{q}\cdot\vec{r} - \frac{(\vec{q}\cdot\vec{r})^2}{2} + \ldots\right]\rho(r)\ \mathrm{d}V$$

em que $\mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Omega = 2\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Como a integral que envolve o termo de primeira ordem em $\vec{q}\cdot\vec{r} = |\vec{q}|r\cos\theta$ é nula, o fator de forma só depende de $|\vec{q}|^2$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
F(|\vec{q}|^2) &= \underbrace{\int \rho(r)\,\mathrm{d}V}_{1} + \frac{|\vec{q}|^2}{2} 2\pi \int \mathrm{d}r\, r^4 \rho(r) \underbrace{\int_{0\to 1}^{\pi\to -1} \underbrace{\cos^2\theta}_{x^2}\,\mathrm{d}(\underbrace{\cos\theta}_{x})}_{-2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}} \\
&= 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{6} \underbrace{4\pi}_{\int \mathrm{d}\Omega} \int r^4 \rho(r)\,\mathrm{d}r = 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{6} \int r^2 \rho(r)\,\mathrm{d}V \\
&= 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{6} \langle r^2 \rangle
\end{aligned}
$$

Assim, o fator de forma a baixos ângulos determina o raio efetivo da distribuição de cargas.
Por exemplo, para uma distribuição exponencial normalizada, ou aproximação dipolar,

$$
\rho(r) = \frac{\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r} \Longrightarrow F(|\vec{q}|^2) = \left(1 + \frac{|\vec{q}|^2}{\alpha^2}\right)^{-2} \simeq 1 - 2\frac{|\vec{q}|^2}{\alpha^2} \qquad (|\vec{q}|^2 \to 0)
$$

o raio efetivo nuclear poderia ser estimado por $r_{\text{ef}} \simeq \sqrt{\frac{12}{\alpha^2}}$.

A aproximação dipolar, apesar de não ser a mais adequada para um ajuste à distribuição da carga nuclear, pois a carga do núcleo cai abruptamente a partir de uma certa distância, será utilizada para descrever a distribuição da carga elétrica no interior do próton.

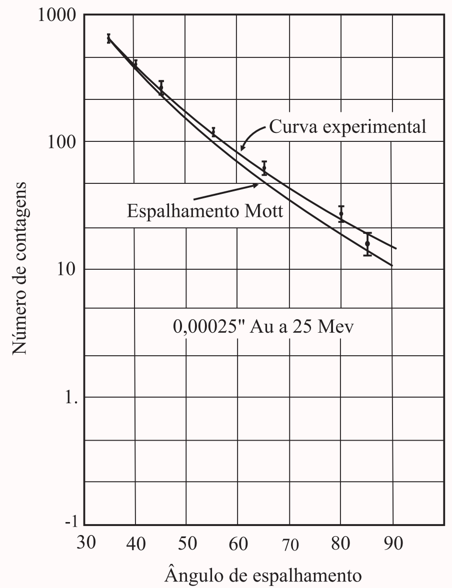


Figura 3.2 Distribuição angular de elétrons espalhados por alvos de ouro, com energia incidente (E) de 25 MeV, segundo Hofstadter (1953). A curva contínua abaixo da curva experimental é a seção de choque de Mott.

• **Espalhamento de elétrons por núcleos pesados**

Após os experimentos com núcleos em alvos espessos, ao espalhar elétrons com energia de 25 MeV por núcleos de ouro, em folhas finas ($\sim 1/4$ mm), Hofstadter constatou que o número de elétrons elasticamente espalhados a grandes ângulos ($\theta > 45°$) por núcleos pesados ($M_{\text{núcleo}} \sim 200$ GeV) se distribuía acima do previsto pela fórmula de Mott (Figura 3.2).

Esse efeito é análogo ao observado por Rutherford ao descobrir o núcleo atômico. Enquanto o físico neozeolandês evidencia o *próton*, agora um novo experimento sugere a existência de novos constituintes subnucleares.

• **A estrutura do próton**

A partir de 1955, com o *upgrade* do MARK III, o grupo de Stanford, ainda liderado por Hofstadter, inicia uma série de experimentos de colisões elásticas com elétrons a energias maiores que 180 MeV, até cerca de 550 MeV, por núcleos de hidrogênio ($M \sim 1$ GeV), ou seja, pelos próprios prótons.

• **Cinemática do espalhamento de elétrons por prótons**

Nesses experimentos, apesar de a energia dos elétrons ainda ser menor que a energia de repouso do próton ($E < M$), deve-se considerar o recuo dos prótons nas colisões elásticas com os elétrons incidentes (Figura 3.3).

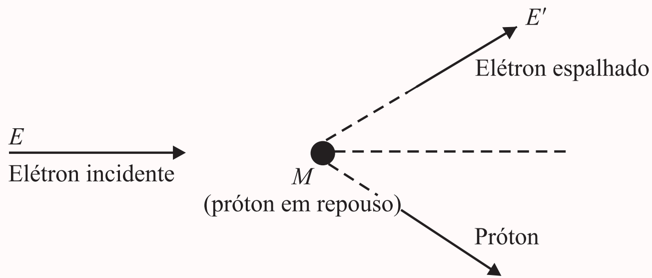


Figura 3.3 Esquema de uma colisão elástica elétron-próton no referencial do laboratório.

Desse modo, a energia (E') dos elétrons espalhados, em função do ângulo de espalhamento (θ), seria dada por [3]

[3]Com efeito, de acordo com a Figura 3.3, para colisões elásticas de um elétron relativístico ($|\vec{k}| \simeq E, |\vec{k}'| \simeq E'$) com um próton em repouso, ou seja, com *quadrimomentum* $p = (M, \vec{0})$,

$$p' = p + q \quad \Rightarrow \quad \underbrace{p'^2}_{M^2} = \underbrace{p^2}_{M^2} + 2q \cdot p + q^2$$

ou seja,

$$q^2 = -2q \cdot p = -2\nu M \quad \Rightarrow \quad \nu = -\frac{q^2}{2M}$$

$$E' = \frac{E}{1 + 2\,\frac{E}{M}\,\mathrm{sen}^2\theta/2} \tag{3.2}$$

Em geral, escreve-se a energia dos elétrons espalhados como

$$E' = \frac{E}{A} \qquad \text{em que} \quad A = 1 + 2\,\frac{E}{M}\,\mathrm{sen}^2\theta/2$$

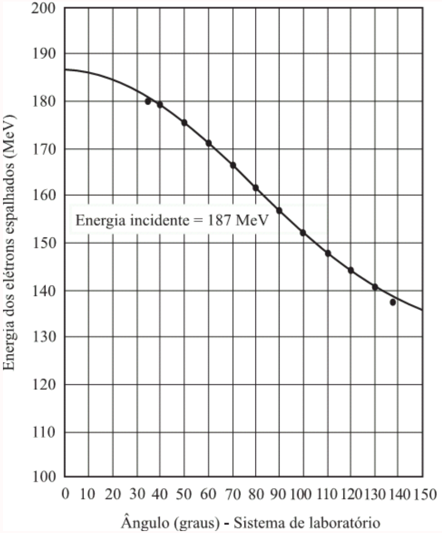
Essa fórmula foi testada, em 1956, por R.W. McAllister e Hofstadter com elétrons de energia de 187 MeV espalhados pelos prótons (núcleos de hidrogênio), indicando que as colisões elétron-próton a essa energias são elásticas (Figura 3.4).

• Fórmula de Rosenbluth

Nessa escala de energia, na qual $E/M \sim 0{,}2$, os elétrons espalhados se distribuiriam não mais segundo a fórmula de Mott, e sim de acordo com a chamada fórmula de Rosenbluth (Seção 3.3), que, além dos *spins* do elétron e do próton, considera também o momento magnético anômalo do próton, $\vec{\mu} = (e/2M)(1+K)\vec{\sigma}$.

E, de acordo com a Equação (2.2),

$$\nu = E - E' \simeq 2\,\frac{EE'}{M}\,\mathrm{sen}^2\,\theta/2 \quad \Rightarrow \quad E' = \frac{E}{1 + 2\,\frac{E}{M}\,\mathrm{sen}^2\theta/2}$$



θ	A	E' (MeV)
$40°$	1,05	178
$60°$	1,1	170
$80°$	1,165	160
$100°$	1,235	150
$120°$	1,3	144
$140°$	1,35	138

Figura 3.4 Energia dos elétrons espalhados por prótons, segundo Hofstadter (1956).

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Rosenbluth}} = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|^{*}_{\text{Mott}} \left\{\left[1+\tau K^2\right] + 2\tau\left(1+K\right)^2 \operatorname{tg}^2\theta/2\right\}} \tag{3.3}$$

em que $K = 1{,}79$, $\tau = -q^2/(4M^2)$, e

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|^{*}_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2\,\cos^2\theta/2}{4\,E^2\,\mathrm{sen}^4\theta/4}\left(\frac{1}{1+2\,\frac{E}{M}\,\mathrm{sen}^2\theta/2}\right)} \tag{3.4}$$

é a fórmula de Mott corrigida, levando em conta o recuo do núcleo (Seção 3.2).

De fato, até energias da ordem de 100 MeV, os resultados de Hofstadter concordaram com o previsto pela fórmula de Rosenbluth, Equação (3.3).[4] No entanto, para elétrons incidentes a energias de 188 MeV, os elétrons espalhados se distribuem, em função do ângulo (θ) de espalhamento, acima do previsto pela fórmula de Mott, mas abaixo do previsto pela fórmula de Rosenbluth (Figura 3.5), principalmente para grandes ângulos ($\theta > 70°$).

• Fatores de forma elétrico e magnético

O comportamento descrito evidencia, portanto, o caráter não pontual do próton. De modo análogo ao caso nuclear, D.R. Yennie, em 1956, fenomenologicamente, introduz os chamados fatores de forma de Dirac (F_1) e de Pauli (F_2), associados às distribuições de carga e de momento magnético no interior do próton, expressando

[4] Para pequenos ângulos, praticamente o mesmo que o previsto pela *fórmula de Mott.*

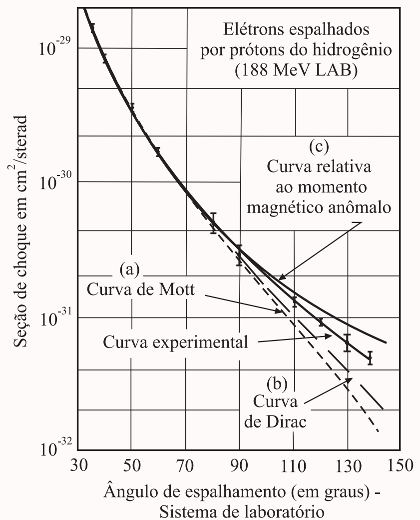


Figura 3.5 Seções de choque experimental, de Mott (a) e de Rosenbluth (c), segundo Hofstadter (1956). A seção de choque de Dirac (b) é o limite da fórmula de Rosenbluth quando não se considera o momento magnético anômalo do próton.

a seção de choque do espalhamento elástico elétron-próton (Seção 3.3) como[5]

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{elástico}}^{ep\to ep} = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Mott}}^{*} \left\{ \left[F_1^2 + \tau\,(KF_2)^2\right] + 2\tau\left(F_1 + KF_2\right)^2\,\mathrm{tg}^2\theta/2 \right\}} \tag{3.5}$$

em que $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são funções do *quadrimomentum* perdido pelos elétrons incidentes ao colidirem com os prótons.

Escrevendo-se a relação entre as seções de choque como

$$\frac{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{elástico}}^{ep\to ep}}{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Mott}}^{*}} = y = A\,\underbrace{\mathrm{tg}^2\theta/2}_{x} + B$$

em que

$$\begin{cases} A = 2\tau\left(F_1 + KF_2\right)^2 \\ \\ B = F_1^2 + \tau\,(KF_2)^2 \end{cases}$$

[5] Alternativamente, a seção de choque do espalhamento elétron-próton pode ser expressa como

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{elástico}}^{ep\to ep} = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Rutherford}} \left[E'(\theta)/E\right] \left\{ \left[F_1^2 + \tau\,(KF_2)^2\right]\cos^2\theta/2 + 2\tau\left(F_1 + KF_2\right)^2\,\mathrm{sen}^2\theta/2 \right\}$$

e definindo os chamados fatores de forma elétrico (G_E) e magnético (G_M) de Sachs,[6]

$$\begin{cases} G_E(q^2) = F_1 - \tau K F_2 \\ \\ G_M(q^2) = F_1 + K F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2\tau G_M^2 \\ \\ B = \dfrac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} \end{cases}$$

a partir de um ajuste linear (Figura 3.6), determinou-se que no limite estático ($|q^2| \to 0$),

$$\begin{cases} G_E(0) = 1 \\ \\ G_M(0) = 2{,}79 \end{cases}$$

• O raio do próton

Medidas de G_E e G_M para vários valores de q^2 mostraram que o comportamento desses fatores poderia ser

[6] A designação *elétrico* e *magnético* para os fatores de forma resulta do fato de que no limite estático, no qual $|q^2| \to 0$,

$$\begin{cases} G_E(0) = Q/e \\ \\ G_M(0) = \mu/\mu_N \end{cases}$$

em que Q e μ são, respectivamente, a carga e o momento magnético do núcleon, e μ_N é o magneton nuclear.

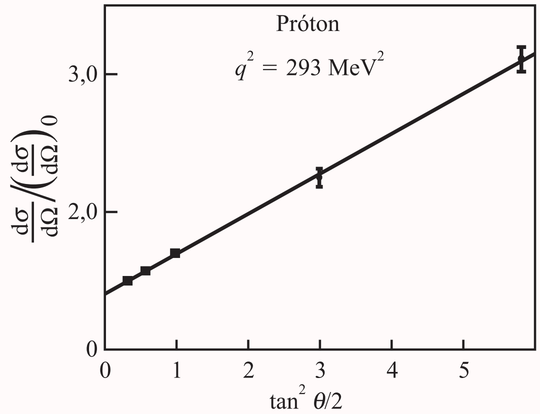


Figura 3.6 Reta de ajuste para fatores de forma do próton.

parametrizado pela aproximação dipolar, como (Figura 3.7)

$$G_D(q^2) = \frac{1}{\left(1 + |q^2|/\alpha^2\right)^2}$$

em que $\alpha^2 \simeq 0{,}71$ GeV^2.

A partir de um modelo exponencial para as distribuições de carga e momento magnético no interior do próton, e elétrons incidentes com energias até 550 MeV, E.E. Chambers e Hofstadter, em 1956, determinam o raio médio do próton como sendo $0{,}77 \times 10^{-13}$ cm, e a igualdade dos fatores de forma $(F_1/F_2 \sim 1)$ para $|q^2| < 0{,}3$ GeV^2.

Assim, Hofstadter e colaboradores, ao final dos anos 1950, revelaram que o próton tem uma subestrutura, ou seja, mostraram de maneira contundente seu caráter não pontual.

Após os experimentos de Hofstadter, a Universidade de Stanford, nos anos 1960, constrói o SLAC, um novo acelerador linear de cerca de 3,5 km de comprimento, capaz de acelerar elétrons a energias da ordem de 20 GeV, muito maiores que a energia de repouso do próton $(E \gg M)$, inaugurando propriamente a área da Física Experimental de Altas Energias.

A essas energias, além dos grandes espectrômetros magnéticos ($\sim$ 5 ton) utilizados nos anos 1950, tornou-se necessário o desenvolvimento de novos detectores de partículas, ou seja, inaugurou-se também a era das grandes colaborações internacionais para o projeto, construção, operação e manutenção de complexos sistema de detecção e de aquisição de dados. Atualmente (2012), uma colaboração internacional em Física de Altas Energias é composta por cerca de 3 000 pesquisadores que implementam um sistema de detecção da ordem de 5 000 ton.

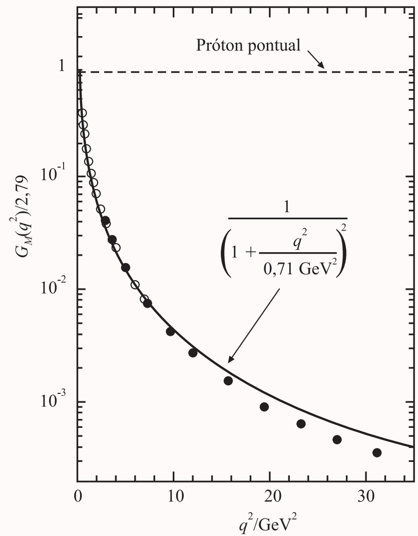


Figura 3.7 Fator de forma para distribuição de carga no próton.

Na escala de energia já disponível àquela época no SLAC, muitas das colisões elétron-próton são inelásticas, com a própria fragmentação do próton e, diferentemente das colisões elásticas, a energia (E') e o ângulo (θ) de espalhamento dos elétrons, agora, são variáveis independentes.

Foi nessa nova etapa de experimentos no SLAC que, em 1969, um grupo do MIT-SLAC, liderado por Friedman, Kendall e Taylor, mostrou que a subestrutura do próton é discreta, ou seja, assim como o núcleo atômico, o próton é composto de objetos pontuais, que foram denominados *pártons* por Feynman e, logo, identificados com os *quarks* previstos por Gell-Mann e Zweig.

Antes de passar para a descrição do processo do espalhamento profundamente inelástico, é conveniente apresentar em detalhes os cálculos de seções de choque do espalhamento elétron-múon, que servirão de base para o estudo do processo de espalhamento elétron-próton.

3.2. Espalhamento elétron-múon

Tanto a fórmula de Mott como a fórmula de Rosenbluth podem ser obtidas a partir do espalhamento $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. O diagrama de Feynman para esse processo é mostrado na Figura 3.8.

No sistema de laboratório (Figura 3.9), no qual se considera que o múon esteja em repouso, a conservação de *momentum* permite que se escreva

$$k = (E, \vec{\mathbf{k}}) \qquad k' = (E', \vec{\mathbf{k}}') \qquad p = (M, 0) \qquad p' = p + k - k'$$

em que M é a massa do múon.

Desprezando-se a massa do elétron, mas não a massa do múon, a amplitude invariante do processo,

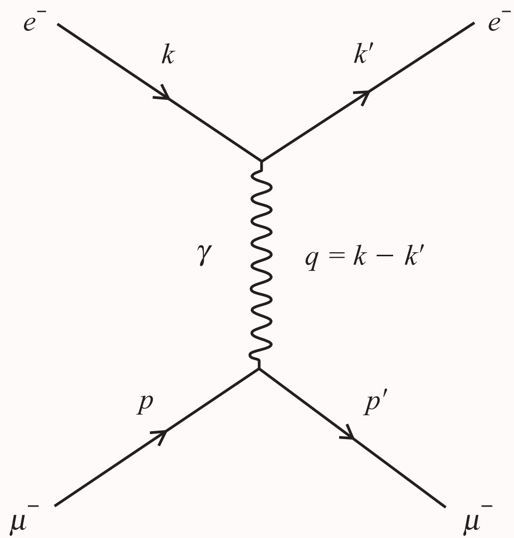


Figura 3.8 Diagrama de Feynman para o processo eletromagnético $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$.

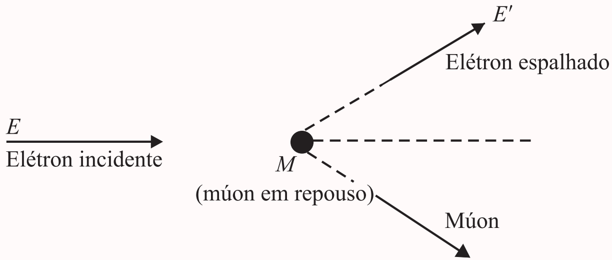


Figura 3.9 Diagrama do espalhamento $e\mu \to e\mu$ no laboratório.

Equação (2.45), pode ser escrita como

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{q^4} \left[(k' \cdot p')(k \cdot p) \, + \, (k' \cdot p)(k \cdot p') \, - \, M^2 (k'.k) \right]$$

e valem as seguintes relações:

$$\begin{cases} q^2 = (k-k')^2 \simeq -2k\cdot k' = -4EE' \operatorname{sen}^2\theta/2 \\ k'\cdot p' = k\cdot k' + k'\cdot p = -q^2/2 + ME' \\ k\cdot p' = -k\cdot k' + k\cdot = q^2/2 + ME \\ k'\cdot p = E'M \\ k\cdot p = EM \end{cases}$$

Substituindo-se as relações obtidas na expressão da amplitude invariante, obtém-se

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{M^2 e^4}{EE' \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Assim, de acordo com a Equação (2.18), a seção de choque do espalhamento elementar $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, no sistema do laboratório, é dada por[7]

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{Lab}}^{e\mu\to e\mu} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}} \left(\frac{E'}{E}\right)\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)} \tag{3.6}$$

em que $E' = \dfrac{E}{1 + 2\,\dfrac{E}{M}\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}}$, conforme a equação (3.2).

De acordo com a Equação (2.17), a Equação (3.6) pode ser reescrita em termos do ângulo de espalhamento (θ) e da energia (E') do elétron espalhado como:

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega dE'}\right|_{\mathrm{Lab}}^{e\mu\to e\mu} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}} \left[-\frac{q^2}{2M^2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)} \tag{3.7}$$

em que $\nu = E' - E$.

Em termos de θ e da variável $x = -q^2/(2M\nu)$,

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega dE'}\right|_{\mathrm{Lab}}^{e\mu\to e\mu} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}} \left[\frac{1}{M}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\nu}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(x - 1\right)} \tag{3.8}$$

[7] Para elétrons com energia da ordem de $E = 50$ MeV, $E' \simeq E \Rightarrow |q^2/M^2| << 1$, obtém-se a seção de choque de Mott. E, para uma partícula alvo sem momento anômalo, obtém-se a fórmula de Rosenbluth.

Exercício 3.1 Mostre que:

$$\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) = \frac{E'}{E}\,\delta\left(E' - \frac{E}{A}\right)$$

3.3. Espalhamento elétron-próton profundamente inelástico (DIS)

- ***Ansatz* de Rosenbluth**

Do ponto de vista teórico, o fato de que em altas energias o próton não pode ser mais considerado pontual indica que, no espalhamento elétron-próton, a corrente que representa o próton não pode ser expressa como uma corrente de Dirac. No entanto, M.N. Rosenbluth, em 1950, considera que, enquanto ao elétron se associa uma corrente leptônica do tipo

$$J_\mu^{\text{elétron}} \sim \left(\overline{u}_{k'}\gamma_\mu u_k\right)\; e^{\mathrm{i}(k'-k)\cdot x}$$

em que k e k' são os *quadrimomenta* inicial e final do elétron, ao próton se poderia associar uma corrente hadrônica do tipo

$$J_\mu^{\text{próton}} \sim \left(\overline{u}_{p'}\Gamma_\mu u_p\right)\; e^{\mathrm{i}(p'-p)\cdot x}$$

na qual p e p' são os *quadrimomenta* inicial e final do próton, e Γ_μ seria uma combinação de matrizes γ_μ, que descreveria o fato de o próton ter um momento anômalo, ou mesmo não ser pontual.

Assim, de maneira análoga ao espalhamento elétron-múon, o quadrado do módulo da amplitude invariante ($|M_{fi}|^2$), associada ao espalhamento elétron-próton, seria dado por

$$\langle|M_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|M_{fi}|^2 = \frac{e^4}{q^4}L_{\mu\nu}^{\text{elétron}}L_{\mu\nu}^{\text{próton}} \tag{3.9}$$

em que

$$
\begin{cases}
L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} = 2\left[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - k' \cdot k g_{\mu\nu}\right] = L_{\nu\mu}^{\text{elétron}} \quad (m \ll E, E') \\[2ex]
L_{\mu\nu}^{\text{próton}} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{s_{p'} s_p} \left(\overline{u}_{p'} \Gamma_\mu u_p\right)^* \left(\overline{u}_{p'} \Gamma_\nu u_p\right) = L_{\nu\mu}^{\text{próton}}
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

E e E' são as energias inicial e final, e m, a massa do elétron.

• Decomposição de Gordon

A partir da chamada *decomposição de Gordon*, a corrente hadrônica ainda pode ser expressa em termos dos fatores de forma de Dirac e de Pauli.

A decomposição de Gordon pode ser obtida passo a passo, inicialmente, expressando-se o produto $\not{a}\not{b}$ em termos de componentes simétrica e antissimétrica,[8]

$$\not{a}\not{b} = a_\mu b_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = a_\mu b_\nu \left[\frac{1}{2} \big(\underbrace{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu}_{g_{\mu\nu}} \big) + \frac{1}{2} \big(\underbrace{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}_{-\mathrm{i}\,\sigma_{\mu\nu}} \big) \right]$$

A seguir, sabendo-se que, de acordo com a equação de Dirac,

$$(\not{p} - m)u = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{u}(\not{p} - m) = 0$$

[8]Os valores explícitos para $\sigma_{\mu\nu}$ são:

$$\begin{cases} \sigma_{00} = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{0i} = \mathrm{i}\,\gamma_0\gamma_i = -\sigma_{i0} = \mathrm{i} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i \neq 0) \\ \sigma_{12} = \mathrm{i}\,\gamma_1\gamma_2 = -\sigma_{21} = \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix} \\ \sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\sigma_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

pode-se escrever

$$\begin{cases} \overline{u}'(\not{p} - m)\not{a}u \, + \, \overline{u}'\not{a}(\not{p} - m)u = 0 \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ -2m\overline{u}'\not{a}u \, + \, \overline{u}'(\not{p}\not{a} + \not{a}\not{p})u = 0 \end{cases}$$

Substituindo-se

$$\begin{cases} \not{p} = a_\mu \gamma_\mu \\ \not{a}\not{p} = a_\mu p_\mu - \mathrm{i}\, a_\mu p_\nu \sigma_{\mu\nu} \\ \not{p}\not{a} = p_\nu a_\nu - \mathrm{i}\, p_\nu a_\mu \sigma_{\nu\mu} = a_\mu p_\mu + \mathrm{i}\, a_\mu p_\nu \sigma_{\mu\nu} \end{cases}$$

obtém-se

$$a_\mu \left\{ -2m\overline{u}'\gamma_\mu u \, + \, \overline{u}'(p'_\mu + p_\mu)u \, + \, \mathrm{i}\,\overline{u}'(p'_\nu - p_\nu)\sigma_{\mu\nu} u \right\} = 0$$

ou seja,

$$\boxed{\overline{u}'\gamma_\mu u \; = \; \frac{1}{2m} \left\{ \overline{u}'(p' + p)_\mu u \, + \, \mathrm{i}\,\overline{u}'(p' - p)_\nu \sigma_{\mu\nu} u \right\}} \qquad \text{(decomposição de Gordon)}$$

Desse modo, tendo em conta a decomposição de Gordon, pode-se escrever a densidade de corrente leptônica associada ao elétron como

$$\begin{aligned} J_\mu^{\text{elétron}} &= -\frac{1}{V} \left(\overline{u}_{k'} e \gamma_\mu u_k \right) e^{\mathrm{i}\,(k'-k)\cdot x} \\ &= \frac{1}{V} \left(-\frac{e}{2m} \right) \left[\overline{u}_{k'}(k' + k)_\mu u_k \, + \, \mathrm{i}\,\overline{u}_{k'}(k' - k)_\nu \sigma_{\mu\nu} u_k \right] e^{\mathrm{i}\,(k'-k)\cdot x} \end{aligned}$$

e, segundo Yennie, a densidade de corrente associada ao próton não pontual seria dada por

$$J_\mu^{\text{próton}} = \frac{1}{V}\left(\frac{e}{2M}\right)\left[F_1\,\overline{u}_{p'}(p'+p)_\mu u_p + \mathrm{i}\left(F_1 + KF_2\right)\overline{u}_{p'} q_\nu \sigma_{\mu\nu} u_p\right] e^{\mathrm{i}\,q\,\cdot\,x}$$

em que $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são os fatores de forma de Dirac e de Pauli, $q = p' - p$, e K é o momento magnético anômalo do próton.

Utilizando-se novamente a decomposição de Gordon, para eliminar o termo em $\sigma_{\mu\nu}$, pode-se expressar a corrente hadrônica para um próton não pontual como

$$J_\mu^{\text{próton}} = \frac{e}{V}\,\overline{u}_{p'}\left[(F_1 + KF_2)\,\gamma_\mu - \frac{KF_2}{2M}\,(p'+p)_\mu\right] u_p\, e^{\mathrm{i}q\,\cdot\,x}$$

e, assim, identificar a matriz Γ_μ com

$$\Gamma_\mu = (F_1 + KF_2)\,\gamma_\mu - \frac{KF_2}{2M}\,(p'+p)_\mu$$

• Fatores de forma de Dirac, de Pauli, elétrico e magnético

As relações dos fatores de forma de Dirac e Pauli, F_1 e F_2, com os fatores de forma elétrico e magnético, G_E e G_M, podem ser estabelecidas, a partir da expressão para a energia de interação (W) de uma corrente com um potencial eletromagnético,

$$W = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\; J_\mu(x)\; A_\mu(x)$$

Segundo o *ansatz* de Rosenbluth, pode-se escrever

$$W = \frac{e}{V} \int \mathrm{d}^3\vec{x}\; e^{\mathrm{i}q \cdot x}\, A_\mu(x)\; \overline{u}_{p'}\Gamma_\mu u_p \qquad\qquad (q = p' - p)$$

▷ Para um campo eletrostático, $A_\mu(\varphi, 0)$, no limite não relativístico, a corrente eletromagnética é dada por

$$\overline{u}_{p'}\Gamma_\circ u_p = \underbrace{(u^\dagger_{p'} u_p)}_{1} \left[(F_1 + KF_2) - \frac{K}{2M}\,(E' + M)F_2\right]$$

e, portanto, a energia de interação eletrostática (W_E) é expressa como[9]

$$W_E \;=\; \frac{e}{V}\left[F_1 + \left(\frac{M - E'}{2M}\right) KF_2\right] \int \mathrm{d}^3\vec{x}\; e^{\mathrm{i}q \cdot x}\, \varphi(\vec{x})$$

[9] No referencial do laboratório, em que $p = (M, 0)$ e $p' = (E', \vec{p})$,

$$q^2 = (p' - p)^2 = \underbrace{p'^2 + p^2}_{2M} - 2\underbrace{p' \cdot p}_{E'M} = 2M(M - E')$$

$$= \quad \frac{e}{V}\Big[\underbrace{F_1(q^2)+\frac{q^2}{2M^2}\,KF_2(q^2)}_{G_E(q^2)}\Big]\int \mathrm{d}^3\vec{x}\; e^{\mathrm{i}q\cdot x}\,\varphi(\vec{x})$$

Se $\varphi(\vec{x})$ varia lentamente no volume V,

$$\lim_{q\to 0} W_E = eF_1(0)\varphi = eG_E(0)\varphi \quad \Rightarrow \quad F_1(0) = G_E(0) = Q/e$$

em que Q é a carga no volume V (para o próton $Q = e$).

▷ Para um campo magnetostático, $A_\mu(0,\vec{A})$, no referencial de Breit ($\vec{p}' = -\vec{p}$), a corrente eletromagnética é dada por

$$\overline{u}_{p'}\Gamma_k u_p = \frac{\mathrm{i}}{2M}\ (F_1 + KF_2)\ \overline{u}_{p'}\sigma_{kl}q_l u_p$$

e, levando-se em conta que

$$\sigma_{kl} = \epsilon_{klj}\sigma_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a energia de interação magnetostática (W_M), no limite não relativístico, é dada por[10]

$$\begin{aligned} W_M &= -\left(\frac{e}{V}\right)\,\frac{1}{2M}\,(F_1+KF_2)\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\left(\mathrm{i}q_l e^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)A_k\sigma_j\,\overbrace{(\overline{u}_{p'}u_p)}^{1} \\ &= \left(\frac{e}{V}\right)\,\frac{1}{2M}\,(F_1+KF_2)\int \mathrm{d}^3\vec{x}\;\epsilon_{klj}\,\partial_l A_k\sigma_j \\ &= -\underbrace{\left(\frac{e}{2M}\right)}_{\mu_N}\,\frac{1}{V}\left[\underbrace{F_1(q^2)+KF_2(q^2)}_{G_M(q^2)}\right]\int \mathrm{d}^3\vec{x}\;e^{\mathrm{i}q\cdot x}\;\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Se o campo magnético $\vec{B}(\vec{x})$ varia lentamente no volume V,

$$\lim_{q\to 0} W_M = -\mu_N\left[F_1(0)+KF_2(0)\right]\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

Para o próton,

$$F_1(0)=F_2(0)=1 \quad\Rightarrow\quad G_M(0)=(1+K)=\mu/\mu_N$$

[10] Levando-se em conta que

$$\begin{cases} \left(\mathrm{i}q_l e^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)A_k = \partial_l\left(e^{\mathrm{i}q\cdot x}\,A_k\right) - e^{\mathrm{i}q\cdot x}\,\partial_l A_k \\ \epsilon_{klj}\,\partial_l A_k = -\left(\nabla\times\vec{A}\right)_j = -B_j \end{cases}$$

em que μ_N é o magneton nuclear, $\vec{\mu} = \mu_N \, (1 + K) \, \vec{\sigma}$ é momento magnético do próton, e K, o momento magnético anômalo.

Experimentalmente,

$$\begin{cases} K \simeq +1{,}79 \qquad \text{(próton)} \\ K \simeq -2{,}91 \qquad \text{(nêutron)} \quad Q = 0 \to F_1(0) = G_E(0) = 0 \end{cases}$$

• Espalhamento elástico de elétrons por prótons não pontuais

A partir das seguintes expressões para as matrizes Γ,[11]

$$\begin{cases} \Gamma_\mu = \overbrace{(F_1 + K F_2) \, \gamma_\mu}^{A_\mu} - \overbrace{\left(\dfrac{K F_2}{2M}\right) (p + p')_\mu}^{w_\mu} \\ \\ \Gamma_\nu = \underbrace{(F_1 + K F_2) \, \gamma_\nu}_{A_\nu} - \underbrace{\left(\dfrac{K F_2}{2M}\right) (p + p')_\nu}_{w_\nu} \end{cases}$$

[11] Como $\overline{\gamma}_\mu = \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu \quad \Rightarrow \quad \overline{A}_\mu = A_\mu, \; \overline{w}_\mu = w_\mu$

o tensor hadrônico para o próton, Equação (3.10), pode ser expresso como

$$
\begin{aligned}
L_{\mu\nu}^{\text{próton}} &= \frac{1}{2}\sum_{s_{p'}s_p}\left\{\left[\left(\overline{u}_{p'}A_\mu u_p\right)^* - \left(\overline{u}_{p'}w_\mu u_p\right)^*\right]\left[\left(\overline{u}_{p'}A_\nu u_p\right)^* - \left(\overline{u}_{p'}w_\nu u_p\right)^*\right]\right\} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{s_{p'}s_p}\left(\overline{u}_{p'}A_\mu u_p\right)^*\left(\overline{u}_{p'}A_\nu u_p\right)}_{T_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{s_{p'}s_p}\left(\overline{u}_{p'}A_\mu u_p\right)^*\left(\overline{u}_{p'}w_\nu u_p\right)}_{T_2} + \\
&\quad \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{s_{p'}s_p}\left(\overline{u}_{p'}w_\mu u_p\right)^*\left(\overline{u}_{p'}A_\nu u_p\right)}_{T_3} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{s_{p'}s_p}\left(\overline{u}_{p'}w_\mu u_p\right)^*\left(\overline{u}_{p'}w_\nu u_p\right)}_{T_4}\Big]
\end{aligned}
$$

Levando-se em conta o truque de Casimir,[12] e que o traço do produto de um número ímpar de matrizes γ é nulo,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[(\not{p}' + M)A_\nu(\not{p} \;+ M)\overline{A}_\mu\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\not{p}'A_\nu\not{p}A_\mu + \underbrace{M\not{p}'A_\nu A_\mu}_{0} + \underbrace{MB_\nu\not{p}A_\mu}_{0} + M^2 A_\nu A_\mu\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}\left(\not{p}'A_\nu\not{p}A_\mu\right) + M^2\mathrm{tr}\, A_\mu A_\nu\right]
\end{aligned}
$$

cada termo do tensor hadrônico pode ser expresso como

$$
\begin{cases}
T_1 = 2\big(F_1 + KF_2\big)^2\left[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - \left(p' \cdot p - M^2\right)g_{\mu\nu}\right] \\
T_2 = \left(F_1 + KF_2\right)^2\left(KF_2\right)\left(p + p'\right)_\mu\left(p + p'\right)_\nu \\
T_3 = T_2 \\
T_4 = 2\left(\frac{KF_2}{2M}\right)^2\left(p' \cdot p + M^2\right)\left(p + p'\right)_\mu\left(p + p'\right)_\nu
\end{cases}
$$

12

$$\frac{1}{2}\sum_{s_1 s_2}\left(\overline{u}_2 A u_1\right)^*\left(\overline{u}_2 B u_1\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[(\not{p}_2 + m)B(\not{p}_1 + m)\overline{A}\right]$$

Para $B = \gamma_\mu$ e $\overline{A} = \gamma_\nu$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[(\not{p}_2 + m)B(\not{p}_1 + m)\overline{A}\right] = 2\left[p_{2\mu}p_{1\nu} + p_{1\mu}p_{2\nu} - \left(p_1 \cdot p_2 - M^2\right)g_{\mu\nu}\right]$$

Levando-se em conta que

$$q = p' - p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p'_\mu p_\nu = q_\mu p_\nu + p_\mu p_\nu \\ (p+p')_\mu = q_\mu + 2p_\mu \\ p' \cdot p = q \cdot p + M^2 \qquad (q \cdot p = -q^2/2) \ \ \text{(elástico)} \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu &= p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + 2p_\mu p_\nu \\ &= \frac{1}{2}\,(q+2p)_\mu\,(q+2p)_\nu - \frac{1}{2}\,q_\mu q_\nu \\ &= \frac{1}{2}\,(p+p')_\mu\,(p+p')_\nu - \frac{1}{2}\,q_\mu q_\nu \end{aligned}$$

os termos do tensor hadrônico podem ser expressos também como

$$\begin{cases} T_1 = \left(F_1 + KF_2\right)^2 \left[\left(p+p'\right)_\mu \left(p+p'\right)_\nu - q_\mu q_\nu + q^2 g_{\mu\nu}\right] \\ -2T_2 = -2\left(F_1 + KF_2\right)^2 \left(KF_2\right)\left(p+p'\right)_\mu \left(p+p'\right)_\nu \\ T_4 = \left[\left(KF_2\right)^2 - q^2 \left(\frac{KF_2}{2M}\right)^2\right]\left(p+p'\right)_\mu \left(p+p'\right)_\nu \end{cases}$$

Assim, os tensores leptônico e hadrônico pode ser escritos como

$$\begin{cases} L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} = 2\left[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - k' \cdot k g_{\mu\nu}\right] \\ \\ L_{\mu\nu}^{\text{próton}} = -\overbrace{\left(F_1 + KF_2\right)^2}^{K_\circ(q^2)}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) + \\ \\ \qquad + \underbrace{\left[F_1^2 - \left(\frac{KF_2}{2M}\right)^2 q^2\right]}_{K_2(q^2)}(q_\mu q_\nu + 2p_\mu q_\nu + 2q_\mu p_\nu + 4p_\mu p_\nu) \end{cases} \tag{3.11}$$

Uma vez que em altas energias $(E', E \gg m)$,

$$q = k - k' = p' - p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2(k \cdot k') = -q^2 \\ \nu = \dfrac{q \cdot p}{M} = E - E' = -\dfrac{q^2}{2M} \\ k \cdot q = k \cdot (k - k') = -k \cdot k' = q^2 = -\nu M \\ k' \cdot q = k' \cdot (k - k') = k \cdot k' = -q^2 = \nu M \end{cases}$$

Fazendo a multiplicação dos tensores,

$$L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} L_{\mu\nu}^{\text{próton}} = 2K_0\Big[2\overbrace{(k'\cdot q)}^{-q^2/2}\overbrace{(k\cdot q)}^{q^2/2} + \underbrace{(k'\cdot k)q^2\overbrace{g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}}^{4} - 3(k'\cdot q)q^2}_{(k'\cdot k)q^2 = -q^4/2}\Big] +$$

$$+2K_2\Big[2\overbrace{(k'\cdot q)}^{-q^2/2}\overbrace{(k\cdot q)}^{q^2/2} + 4\overbrace{(k'\cdot p)}^{ME'}\overbrace{(k\cdot q)}^{q^2/2} + 4\overbrace{(k'\cdot q)}^{-q^2/2}\overbrace{(k\cdot p)}^{ME} +$$

$$+8\overbrace{(k'\cdot p)}^{ME'}\overbrace{(k\cdot p)}^{ME} - \overbrace{(k'\cdot k)}^{-q^2/2}q^2 - 4\overbrace{(k'\cdot k)}^{-q^2/2}\overbrace{(q\cdot p)}^{-q^2/2} - 4\overbrace{(k'\cdot k)}^{-q^2/2}M^2\Big]$$

obtém-se

$$L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} L_{\mu\nu}^{\text{próton}} = 2K_0q^2\left(-q^2\right) + 2K_2\Big[\overbrace{-4M^2(\nu E') + 4M^2(\nu E)}^{4(\nu M)^2} +$$

$$+8M^2(EE') + 4\frac{q^2}{2}M^2 - 4\overbrace{\left(\frac{q^2}{2}\right)^2}^{(\nu M)^2}\Big]$$

$$= \quad (4M^2)\left[\left(\underbrace{\frac{K_\circ q^2}{2M^2}}_{K_1(q^2)}\right)(-q^2) + K_2(q^2)\Big(4EE' + q^2\Big)\right]$$

De acordo com a Equação (2.2) ($q^2 = -4EE' \operatorname{sen}^2 \theta/2$) e a Equação (3.9), resulta que

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{e^2}{q^4} L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} L_{\mu\nu}^{\text{próton}} = \frac{(4\pi\alpha)^2 (4M^2)}{4EE' \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \left[K_1 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + K_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right]$$

Assim, segundo a Equação (2.17), a seção de choque diferencial para o espalhamento elástico de elétrons por prótons não pontuais, em termos do ângulo de espalhamento (θ) e da energia (E') do elétron espalhado, é dada por

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}E'}\right|_{\text{elástico}}^{ep\to ep} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \left[K_1 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \ + \ K_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right] \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)} \tag{3.12}$$

Integrando, finalmente, sobre a energia E', obtém-se a fórmula de Yennie, Equação (3.5),

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{elástico}}^{ep\to ep} = \left(\frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}\right) \frac{1}{1 + 2\frac{E}{M} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \left[K_2(q^2) \ + \ K_1(q^2) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right]} \tag{3.13}$$

em que

$$\begin{cases} K_1(q^2) = -(F_1 + KF_2)^2 \dfrac{q^2}{2M^2} \\[3ex] K_2(q^2) = F_1^2 - \left(\dfrac{KF_2}{2M}\right)^2 q^2 \end{cases}$$

Para uma partícula sem estrutura, $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$, obtém-se a mesma expressão do espalhamento elétron-múon ($e\mu \to e\mu$), equação (3.6), e para $F_1 = F_2 = 1$, a fórmula de Rosenbluth, Equação (3.3).

• Espalhamento profundamente inelástico de elétrons por prótons (DIS)

Para o processo de espalhamento inelástico, quando elétrons com energia (E) da ordem de 1 GeV colidem com núcleos de hidrogênio (prótons), a energia (E') e a direção (θ) dos elétrons espalhados, ao contrário do caso elástico, são independentes, e observam-se várias ressonâncias bariônicas.[13]

Para um espalhamento profundamente inelástico, envolvendo elétrons com energia (E) da ordem de 10 GeV, o próton de massa M fragmenta-se em muitas partículas que constituem um estado desconhecido X (Figura 3.10) associado a uma massa invariante M_X. Tais processos são denominados também *inclusivos*.

Nesse caso, para estados não polarizados, para os quais se faz a média de todos os *momenta* e *spins*, e sobre os estados finais acessíveis X, a seção de choque no sistema do laboratório, no qual o núcleon está em repouso, pode ser expressa como

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}E'}\right|_{\text{DIS}}^{ep\to eX} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}\right) \frac{1}{4EE'}\, L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} W_{\mu\nu}^{\text{próton}} \tag{3.14}$$

em que $L_{\mu\nu}^{\text{elétron}}$ é o tensor leptônico, Equação (3.10), e o tensor hadrônico $W_{\mu\nu}^{\text{próton}}$, o qual contém toda a informação que caracteriza as propriedades dinâmicas do próton no regime de colisão chamado de profundamente inelástico (*deep inelastic scattering* - DIS),[14] pode ser parametrizado como

[13] Estados excitados do próton.

[14] O tensor hadrônico para processos inclusivos só contém termos simétricos $W_{\mu\nu}^{(S)}$, pois qualquer termo antissimétrico $W_{\mu\nu}^{(A)}$

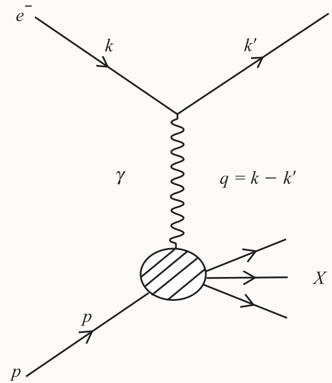


Figura 3.10 Esquema do espalhamento profundamente inelástico (DIS) $ep \to eX$.

$$W_{\mu\nu}^{\text{próton}} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p_\mu p_\nu + \frac{W_3}{M^2} q_\mu q_\nu + \frac{W_4}{M^2} (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \tag{3.15}$$

em que W_j são funções de q^2 e $(q \cdot p)$, ou de q^2 e $\nu = E - E'$.

Uma vez que, de acordo com a conservação da corrente eletromagnética,

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad q_\mu L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} = 0$$

o tensor hadrônico deve satisfazer também a relação $q_\mu W_{\mu\nu}^{\text{próton}} = 0$. Portanto, apenas W_1 e W_2 são indepen-

---

não contribuiria para a seção de choque, Equação (3.14), uma vez que $L_{\mu\nu}$ é simétrico em μ, ν, o que implica $L_{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{(A)} = 0$.

No entanto, se não se somasse sobre todos os *spins*, $L_{\mu\nu}$ e $W_{\mu\nu}$ conteriam temos simétricos e antissimétricos em μ, ν, e ter-se-ia

$$L_{\mu\nu} W_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{(S)} W_{\mu\nu}^{(S)} - L_{\mu\nu}^{(A)} W_{\mu\nu}^{(A)}$$

em que agora $L_{\mu\nu}$ conteria como variáveis, além de p e q, também os vetores de polarização inicial e final do elétron S e S' e $W_{\mu\nu}$ teria também o vetor de polarização do próton $\mathcal{S}$. Por exemplo, $W_{\mu\nu}^{(A)}$ viria a ser parametrizado nesse caso como

$$W_{\mu\nu}^{(A)} = \frac{1}{2M} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha \left\{ M^2 \mathcal{S}_\beta G_1(\nu, q^2) + \left[(q \cdot p) \mathcal{S}_\beta - \mathcal{S} \cdot q \, p_\beta \right] G_2(\nu, q^2) \right\}$$

Em geral, então, as funções de estrutura necessárias para descrever o acoplamento eletromagnético inelástico do próton são quatro: duas (W_1 e W_2) no caso em que o *spin* do próton não é observado, e mais outras duas (G_1 e G_2) no caso em que se observa o *spin*. Para uma discussão mais completa, ver M. Anselmino, *Physical Review*, **D19**, 2803 (1979).

dentes,[15] e o tensor hadrônico pode ser expresso como

$$W_{\mu\nu}^{\text{próton}} = \frac{W_1}{q^2}\left(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}\right) + \\ + \frac{W_2}{q^2}\left[p_\mu p_\nu - \frac{(q\cdot p)^2}{q^4} q_\mu q_\nu - \frac{(q\cdot p)}{q^2} p_\mu q_\nu - \frac{(q\cdot p)}{q^2} p_\nu q_\mu) + \right]$$

Desse modo, resulta que

$$L_{\mu\nu}^{\text{elétron}} W_{\mu\nu}^{\text{próton}} = (4EE')\left(2W_1 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + W_2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.16}$$

e, substituindo a Equação (3.16) em (3.14), obtém-se

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'}\right|_{\text{DIS}}^{ep\to eX} = \left(\frac{\alpha^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{4E^2\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}}\right)\left[W_2(q^2,\nu) + 2W_1(q^2,\nu)\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right]} \tag{3.17}$$

Teoricamente, a partir de medidas da seção de choque (3.17) em diferentes regiões de θ e E', pode-se determinar as duas *funções de estrutura* $W_1(q^2,\nu)$ e $W_2(q^2,\nu)$, as quais contêm informações sobre a estrutura interna do próton.

Experimentalmente, como para pequenos ângulos de espalhamento a contribuição da função W_2 predomina, o grupo do MIT-SLAC, em 1969, foi capaz de determinar o comportamento de W_2 e a seção de choque

---

[15] Os demais tensores são: $W_4 = -\frac{(q.p)}{q^2}W_2$ e $W_3 = \frac{M^2}{q^2}W_1 + \frac{(q.p)^2}{q^2}W_2$.

do espalhamento profundamente inelástico elétron-próton, a partir de elétrons com energia entre 7 e 17 GeV, e ângulos de espalhamentos de 6° e 10°, no SLAC.

A Tabela 3.1 mostra alguns resultados dos experimentos feitos no SLAC, relativos aos valores de $|q^2|$ para os quais o próton se fragmenta, e M_X é maior do que as ressonâncias bariônicas.

Ao contrário do comportamento esperado, de diminuição da seção de choque com o aumento do *quadri-momentum* transferido, no regime profundamente inelástico a seção de choque aumenta com o *quadrimo-mentum*. Esse comportamento só veio a ser esclarecido com o *modelo a pártons* para a estrutura do próton, ou de qualquer hádron.

No próximo capítulo, será visto como os *pártons* foram identificados com os *quarks* e *glúons*, os quais serão os constituintes últimos da nova teoria das interações fortes, a QCD.

Tabela 3.1 Medidas da energia dos elétrons espalhados (E'), *quadrimomentum* transferido ($|q^2| = 4EE' \operatorname{sen}^2 \theta/2$), massa invariante ($M_X$) e seção de choque ($\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'$) para $E = 10$ GeV e $\theta = 6°$, no experimento do grupo do MIT-SLAC

E' (GeV)	$\lvert q^2 \rvert$ (GeV^2)	M_X (GeV)	$\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'$ (10^{-31}cm^2/sr.GeV)
3,724	0,408	3,501	3,54 $\pm$ 0,30
5,361	0,587	3,001	4,97 $\pm$ 0,24
6,745	0,739	2,502	7,01 $\pm$ 0,27
7,349	0,806	2,249	9,24 $\pm$ 0,20
7,886	0,864	1,998	10,7 $\pm$ 0,23

3.4. Fontes primárias

Bloom, E.D. *et al.* 1969. Hight-Energy Inelastic e-p Scattering at 6° and 10°. *Physics Review Letters* **23**, n. 16, p. 930-934.

Bodek, A. *et al.* 1979. Experimental Studies of the Neutron and Proton Electromagnetic Structure Functions. *Physical Review D* **20**, n. 7, p. 1471-1552.

Breidenbach, M. *et al.* 1969. Observed Behaviour of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering. *Physical Review Letters* **23**, n. 16, p. 935-939.

Chambers, E.E. & Hofstadter, R. 1956. Structure of the Proton. *Physical Review* **103**, n. 5, p. 1454-1463.

Drell, S.D., Levy, D.J. & Yan, T.-M. 1969. Theory of Deep-Inelastic Lepton-Nucleon Scattering and Lepton-Pair Annihilation Processes. I. *Physical Review* **187**, n. 5, p. 2159-2171.

Drell, S.D. & Yan, T.-M. 1970. Connection of Elastic Electromagnetic Nucleon Form Factors at Large Q^2 and Deep Inelastic Structure Functions near Threshold. *Physical Review Letters* **24**, n. 4, p. 181-186.

Ernst, F.J., Sachs, R.G. & Wali, k.C. 1960. Electromagnetic Form Factors of the Nucleon. *Physical Review* **119**, n. 3, p. 1105-1114.

Foldy, L.L. 1952. The Electromagnetic Properties of Dirac Particles. *Physical Review* **87**, n. 5, p. 688-693.

Foldy, L.L. & Wouthuysen, S.A. 1950. On the Dirac Particles Odd Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit. *Physical Review* **78**, n. 1, p. 29-36.

Foldy, L.L. 1952. The Electromagnetic Properties of Dirac Particles. *Physical Review* **87**, n. 5, p. 688-693.

Hofstadter, R., Fechter, H.R. & McIntyre, J.A. 1953. High-Energy Electron Scattering and Nuclear Structure Determinations. *Physical Review* **92**, n. 4, p. 978-987.

Hofstadter, R. & McAllister, R.W. 1953. Electron Scattering from the Proton. *Physical Review* **98**, n. 1, p. 217-218.

McAllister, R.W. & Hofstadter, R. 1956. Elastic Scattering of 188-MeV Electrons from the Proton and the Alpha Particle. *Physical Review* **102**, n. 3, p. 851-856.

Rose, M.E. 1948. The Charge Distribution in Nuclei and the Scattering of High-Energy Electrons. *Physical Review* **73**, n. 4, p. 279-284.

Rosenbluth, M.N. 1950. High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons. *Physical Review* **79**, n. 4, p. 615-619.

Sachs, R.G. 1962. High-Energy Behaviour of Nucleon Electromagnetic Form Factors. *Physical Review* **126**, n. 6, p. 2256-2260.

Sachs, R.G. 1964. Nucleon Electromagnetic Form Factors at High Momentum Transfer. *Physical Review Letters* **12**, n. 9, p. 231-233.

Salzman, G. 1955. Neutron-Electron Interaction. *Physical Review* **99**, n. 3, p. 973-979.

Yennie, D.R., Lévy, M.M. & Ravenhall, D.G. 1957. Electromagnetic Structure of Nucleons. *Reviews of Modern Physics* **29**, n. 1, p. 144-157.

Yennie, D.R., Wilson, R.N. & Ravenhall, D.G. 1953. Calculation of High-Energy Electron Scattering by Nuclei. *Physical Review* **92**, n. 5, p. 1325-1326.

Yennie, D.R.; Ravenhall, D.G. & Wilson, R.N. 1954. Phase-Shift Calculation of High-Energy Electron Scattering. *Physical Review* **95**, n. 2, p. 500-512.

3.5. Outras referências e sugestões de leitura

Aitchison, I.J.R. & Hey, A.J.G. 1989. *Gauge Theories in Particle Physics.* 2nd. ed., Bristol: Adam Hilger.

Anselmino, M. 1979. What Do We Learn From Polarization Measurements in Deep-Inelastic Electron-Nucleon Scattering? *Physical Review D* **19**, n. 9, p. 2803-2805.

Barger, V.D. & Phillips, R.J.N. 1987. *Collider Physics.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Close, F.E. 1979. *An Introduction to Quarks and Partons.* New York: Academic Press.

Feynman, R.P., 1972 *Photon-Hadron Interactions.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Greiner, W. & Schäfer, A. 1995. *Quantum Chromodynamics.* Berlin: Springer.

Griffiths, D. 1987. *Introduction to Elementary Particles.* New York: John Wiley & Sons.

Halzen, F. & Martin, A.D. 1984. *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.* New York: John Wiley & Sons.

Leader, E. & Predazzi, E. 1996. *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics, Volumes 1-2.* Cambridge: University Press.

Martin, A.D. 1995. The Structure of the Proton. *Contemporary Physics* **36**, n. 5, p. 335-353.

Mott, N.F. & Massey, H.S.W. 1965. *The Theory of Atomic Collisions.* 3a. edição, Oxford: University Press.

Nachtmann, O. 1990. *Elementary Particle Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag

Perkins, D.H. 1987. *An Introduction to High Energy Physics.* Reading, MA: Addison Wesley, 3rd. ed.

Quigg, C. 1983. *Gauge Theories of Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Renton, P. 1990. *Electroweak Interaction. An Introduction to the Physics of Quarks & Leptons.* Cambridge: University Press.

Capítulo 4

Pártons, quarks e glúons

A partir dos resultados dos experimentos do SLAC, conduzidos pelo grupo MIT-SLAC, Feynman (1969) interpreta o chamado *scaling* de Bjorken como consequência da colisão de elétrons com constituintes pontuais, essencialmente livres no interior dos prótons, denominados *pártons*.

4.1. O *scaling* de Bjorken

A seção de choque do espalhamento profundamente inelástico de elétrons por prótons, Equação (3.17), depende, à parte a energia inicial (E) dos elétrons, das variáveis independentes θ e E'. Uma alternativa típica de expressá-la é a escolha das variáveis $q^2 = -4EE' \operatorname{sen}^2 \theta/2$ e $x = -q^2/(2M\nu)$. Assim, podem-se escrever as funções de estrutura como funções de q^2 e x, ou seja, $W_1(q^2, x)$, e $W_2(q^2, x)$.

A não ser para pequenos ângulos de espalhamento, a partir dos valores da seção de choque, é muito difícil se obterem os valores separados de W_1 e W_2. No entanto, mesmo com grandes incertezas, valores da razão W_2/W_1 foram extraídos pelo grupo do MIT-SLAC. A partir desses resultados, o grupo foi suficientemente hábil para determinar que, para um valor fixo de x, tanto W_1 como a combinação νW_2 não variavam para $|q^2| \geq 1$ GeV^2 (Figura 4.1).

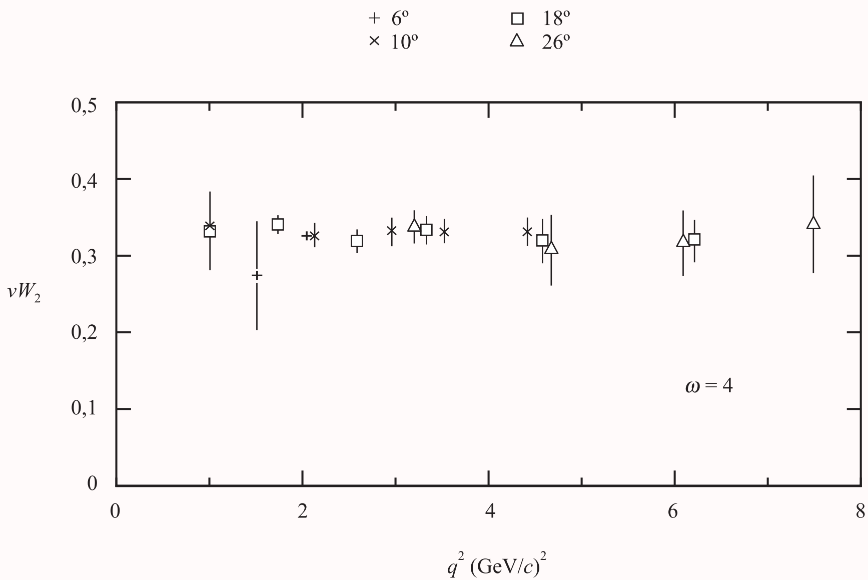


Figura 4.1 Comportamento de νW_2 com relação a $|q^2|$, para $x = 0{,}25$. Resultados do grupo do MIT-SLAC, de 1972.

Esse comportamento já havia sido antecipado por Bjorken, em 1969, com a hipótese de que, na região de espalhamento profundamente inelástico, W_1 e νW_2 seriam funções apenas da razão q^2/ν. Por esse motivo, a variável x é conhecida também como parâmetro de escala de Bjorken, e um importante resultado dos experimentos do SLAC, isto é, a correlação entre W_1 e νW_2, é conhecida como *scaling* de Bjorken.

Assim, no limite de $|q^2| \to \infty$ e $\nu \to \infty$, mas x finito, pode-se escrever

$$\begin{cases} MW_1 \to F_1(x) \\ \\ \nu W_2 \to F_2(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são funções *finitas*.

Resultados similares, a partir do espalhamento de elétrons por dêuterons, obtidos pelo mesmo grupo do MIT-SLAC, e do espalhamento de neutrinos por núcleons, no Próton Síncroton do CERN, em 1973, mostraram também o comportamento de escala, previsto por Bjorken, para as funções de estrutura dos núcleons.

É surpreendente o fato de que as relações assintóticas dadas pela Equação (4.1) sejam verificadas já para valores de $|q^2| \sim 1$ GeV. Mas como compreender o *scaling*?

A partir dos resultados do SLAC e das hipóteses de Bjorken, Feynman, em 1969, sugere que o mecanismo dinâmico da colisão elétron-núcleon seja uma espécie de interação dos elétrons com objetos eletricamente carregados, de *spin* $1/2$, sem extensão espacial, *i.e.*, *puntiformes*.

4.2. O modelo a pártons de Feynman

.

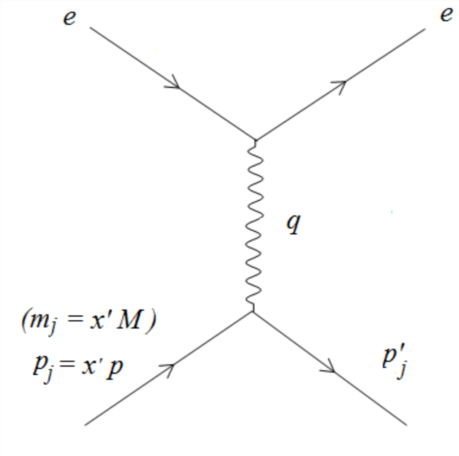


Figura 4.2 Diagrama do espalhamento elementar elétron-párton, no qual q é o *quadrimomentum* transferido ao fóton e x' é a fração da massa do próton carregada pelo párton.

De acordo com o diagrama da Figura 4.2, e segundo a Equação (3.8), o espalhamento elástico de um elétron com qualquer partícula puntiforme de *spin* $1/2$, carga elétrica e_j e massa $m_j = x'M$ é descrito pela seção de choque diferencial

$$\sigma_d^{ej} = \sigma_\circ e_j^2 \left[\frac{1}{m_j} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\nu} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(x_j - 1 \right)$$

em que $x_j = -q^2/(2m_j\nu)$ e $\sigma_\circ = \alpha^2/(4E^2 \operatorname{sen}^4 \theta/2)$.

Uma vez que

$$x = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad \Rightarrow \quad x_j = \frac{x}{x'}$$

pode-se escrever

$$\sigma_d^{ej} = \sigma_\circ e_j^2 \left[\frac{1}{M} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{x'}{\nu} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(x - x' \right) \tag{4.2}$$

Comparando as seções de choque expressa pelas equações (4.2) e (3.17), pode-se identificar

$$\begin{cases} MW_1^{ej} = \dfrac{e_j^2}{2} \, \delta \left(x' - x \right) \\ \\ \nu W_2^{ej} = e_j^2 \, x' \, \delta \left(x' - x \right) \end{cases} \tag{4.3}$$

Desse modo, considerando o próton como sendo formado por objetos puntiformes de *spin* $1/2$, e determinando-se a seção de choque para o *deep inelastic scattering* a partir da *soma incoerente* das seções de choque individuais dos espalhamentos elásticos de fótons virtuais com os constituintes livres dos prótons, como

$$\sigma_d^{ep} \sim \sum_j \sigma_d^{ej}$$

obtêm-se funções de estrutura com as propriedades desejadas, ou seja, que satisfazem a propriedade do *scaling* de Bjorken. Nesse contexto, os constituintes livres do próton foram denominados *pártons*, por Feynman.

No entanto, as funções de estrutura do tipo das que constam na Equação (4.3), *i.e.*, deltiformes, apesar de dependerem só de x, não estariam de acordo com os dados experimentais (Figura. 4.3), que mostram uma dependência muito mais suave com a variável x.

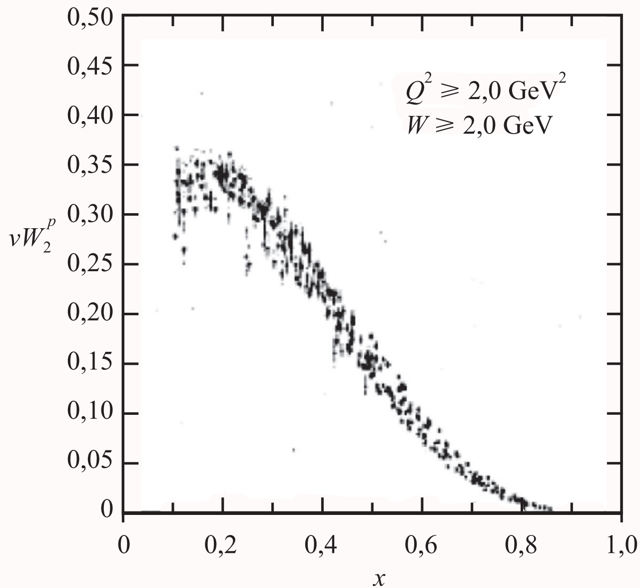


Figura 4.3 Comportamento de νW_2 com relação a x, para prótons. Resultado do grupo do MIT-SLAC, de 1979.

Na hipótese de que no interior dos prótons existam *pártons* com uma distribuição contínua de massa ($0 \leq x' \leq 1$), tal que $f_j(x')\,\mathrm{d}x'$ é a probabilidade de que um *párton* j tenha massa compreendida entre $x'M$ e $(x' + \mathrm{d}\,x')M$, a seção de choque total pode ser calculada por

$$\sigma_d^{ep} = \sum_j \int_0^1 \mathrm{d}x'\; f_j(x')\; \sigma_d^{ej} \tag{4.4}$$

Portanto, as funções de estrutura são dadas por

$$\begin{cases} MW_1^{ep} = \sum_j e_j^2 \int_0^1 \mathrm{d}x'\; \dfrac{f_j(x')}{2}\; \delta(x - x') = \dfrac{1}{2}\; \sum_j e_j^2 f_j(x) = F_1(x) \\[2em] \nu W_2^{ep} = \sum_j e_j^2 \int_0^1 \mathrm{d}x'\; f_j(x')\; x'\; \delta(x - x') = x\; \sum_j e_j^2\; f_j(x) = F_2(x) \end{cases} \tag{4.5}$$

e a seção de choque total, como

$$\sigma_d^{ep} = \sigma_\circ \left[\frac{F_1(x)}{M} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \;+\; x \frac{F_2(x)}{\nu} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \tag{4.6}$$

Logo, um único valor de $x' = x$ contribui para a seção de choque, e a variável x de Bjorken passa, então, a assumir, no modelo a *pártons*, o mesmo significado físico de fração da massa do próton transportada pelo párton que interage com o elétron.

Das Equações (4.5), obtém-se a chamada *relação de Callan-Gross*,

$$F_2(x) = 2xF_1(x) \tag{4.7}$$

Definindo a razão

$$R = \frac{F_2 - 2xF_1}{2xF_1} = \frac{F_2}{2xF_1} - 1 \tag{4.8}$$

os experimentos do grupo MIT-SLAC, de 1979, para $|q^2| \simeq 4$ GeV^2, obtiveram valores para R da ordem de 0,18, e experimentos posteriores no CERN, de espalhamento de múons com cerca de 200 GeV por prótons, pela European Muon Collaboration – EMC, em 1983, com valores de $|q^2| \simeq 22{,}5$ GeV^2, obtiveram para R valores médios praticamente nulos, compatíveis, portanto, com o previsto pelo modelo a *pártons*.

Se os pártons tivessem *spin*-0, a colisão elétron-párton seria descrita pela seção de choque de Mott, a qual, a grandes energias, implicaria $W_1 = F_1 = 0$ e, portanto, $R \to \infty$. Portanto, a relação de Callan-Gross é uma consequência do caráter fermiônico de *spin* $1/2$ dos *pártons*.

No lugar do sistema do laboratório, considerando a colisão no sistema de referência para o qual o *momentum* do núcleon é praticamente infinito, e desprezando os possíveis movimentos dos *pártons* em direções perpendiculares àquela do núcleon, x corresponde também à fração de *momentum* do próton transportado pelo párton j na direção do movimento, ou seja, $|\vec{p}_j| = x|\vec{p}|$.

Desse modo, as distribuições partônicas $f_j(x)$ satisfazem a seguinte regra de soma:

$$\sum_j \int_0^1 x\, f_j(x)\, \mathrm{d}x = 1 \tag{4.9}$$

Exercício 4.1 Seja $\vec{k}_j$ a componente do *momentum* de um *párton* j (de massa $m_j = xM$) perpendicular ao *momentum* $\vec{p}$ de um próton (de massa M).

Mostre que, no referencial para o qual $\dfrac{|\vec{k}_j|}{|\vec{p}|} \ll 1$, $\dfrac{m_j}{|\vec{p}|} \ll 1$ e $\dfrac{M}{|\vec{p}|} \ll 1$,

$$p_j = xp$$

em que $p_j = (\epsilon_i, \vec{p}_j)$ é o *quadrimomentum* do *párton*, $p = (\epsilon, \vec{p})$ é o *quadrimomentum* do próton e $x = \dfrac{m_j}{M}$.

4.3. *Pártons* como *quarks*

Em termos dos invariantes de Lorentz definidos pela Equação (2.5),

$$\begin{cases} x = -\dfrac{q^2}{2M\nu} = \dfrac{EE'}{M(E-E')}(1-\cos\theta) & (0 \le x \le 1) \\[2ex] y = \dfrac{\nu}{E} = 1 - \dfrac{E'}{E} & (0 \le y \le 1) \end{cases}$$

considerando a relação de Callan-Gross e para $M << E$, a seção de choque para o espalhamento profundamente inelástico (DIS) $ep \to eX$, dada pela Equação (3.17), pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{2\pi E M \alpha^2}{q^4}\left[1 + (1-y)^2\right] F_2(x) \tag{4.10}$$

Exercício 4.2 Mostre que

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\cos\theta, E')}\,\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}E' = \frac{E'}{MEy}\,\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}E'$$

e verifique a Equação (4.10).

Consequentemente, a seção de choque do DIS, no regime de validade do comportamento de escala de Bjorken[1] e da relação de Callan-Gross, depende de apenas uma função de estrutura, a qual está ligada diretamente às distribuições dos *pártons*. nos núcleons.

Definindo-se

$$\omega \equiv \frac{1}{x} = -\frac{2M\nu}{q^2} \qquad (1 < \omega < \infty)$$

[1]Para altos valores de $|q^2|$ e $x \to 0$ ou $x \to 1$, o *scaling* de Bjorken é violado.

e, considerando a seguinte integral, com q^2 fixo,

$$\int_0^E W_2 \mathrm{d}\nu = \int_0^E \big(\nu W_2\big) \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = \int_1^\infty F_2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$$
$$= \sum_j \int_0^1 x f(x) \frac{\mathrm{d}x}{x} e_j^2$$

tendo em conta que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

resulta que

$$\int_1^\infty F_2(\omega) \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = \sum_j e_j^2 \tag{4.11}$$

Como os resultados dos experimentos não indicam que $F_2(\omega)$ decresça com o aumento de ω, a integral (4.11) cresce com ω. Essa condição só é satisfeita introduzindo-se, junto com os *pártons*, mais termos no somatório $\sum_j e_j^2$, ou seja, pares de *párton-antipárton* que não alteram os números quânticos dos núcleons.

Nasce, assim, a ideia de hádrons formados por *quarks de valência*[2] (q_v) circundados por pares de *quarks do mar* ($q_m \overline{q}_m$).

---

[2] Aqueles de $SU(3)$, $SU(4)$ etc., que fixam os números quânticos do hádron.

Desse modo, em primeira ordem, um espalhamento profundamente inelástico pode ser idealizado como um processo no qual um fóton virtual, com grande $|q^2|$, penetrando no interior do núcleon, interage com *quarks* livres. Com o crescer de ν, com $|q^2|$ fixo e x pequeno, mais *quarks do mar* são excitados.

• Funções de distribuições partônicas (PDF)

Interpretando os pártons como *quarks*, pode-se introduzir diversas funções de distribuições partônicas (PDF) para cada tipo de *quark* no próton,

$$f_u = u(x) \qquad f_d = d(x) \qquad f_s = s(x) \qquad \cdots$$

e, analogamente, para os *antiquarks*

$$f_{\overline{u}} = \overline{u}(x) \qquad f_{\overline{d}} = \overline{d}(x) \qquad f_{\overline{s}} = \overline{s}(x) \qquad \cdots$$

Para o nêutron, admitindo a simetria de *isospin*, suas distribuições podem ser expressas em termos das do próton, ou seja,

$$\begin{cases} d^n(x) = u^p(x) \; \equiv \; u(x) \\ \\ u^n(x) = d^p(x) \; \equiv \; d(x) \end{cases} \tag{4.12}$$

Para reproduzir a carga do próton e a carga nula do nêutron, as distribuições partônicas devem satisfazer as seguintes condições:[3]

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left\{ +\frac{2}{3}\Big[u(x) - \overline{u}(x)\Big] - \frac{1}{3}\Big[d(x) - \overline{d}(x)\Big] \right\} \mathrm{d}x = 1 \\ \\ \displaystyle\int_0^1 \left\{ -\frac{2}{3}\Big[d(x) - \overline{d}(x)\Big] + \frac{1}{3}\Big[u(x) - \overline{u}(x)\Big] \right\} \mathrm{d}x = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Essas condições implicam

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \Big[u(x) - \overline{u}(x)\Big] \mathrm{d}x = 2 \\ \\ \displaystyle\int_0^1 \Big[d(x) - \overline{d}(x)\Big] \mathrm{d}x = 1 \end{cases} \tag{4.14}$$

Separando-se as componentes partônicas de valência e do mar, uma vez que os *quarks* do mar aparecem aos pares, pode-se escrever

$$\begin{cases} u(x) = u_{\mathrm{v}}(x) + u_m(x) \\ \\ \overline{u}(x) = \overline{u}_m(x) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} d(x) = d_{\mathrm{v}}(x) + d_m(x) \\ \\ \overline{d}(x) = \overline{d}_m(x) \end{cases}$$

[3] O *quark* estranho e os *quarks* mais pesados não contribuem, uma vez que os números quânticos de estranheza, de *charm*, de *bottom* e de *top* são nulos para um núcleon.

Portanto, as componentes de valência satisfazem[4]

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 u_{\mathrm{v}}(x)\,\mathrm{d}x = 2 \\ \\ \displaystyle\int_0^1 d_{\mathrm{v}}(x)\,\mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

Na realidade, enquanto $SU(2)$ é uma boa simetria ($m_u \simeq m_d$), $SU(3)$ e $SU(4)$ são só aproximadas ($m_u \neq m_s \neq m_c$). Assim, enquanto se supõe que

$$\begin{cases} u_m(x) = d_m(x) \\ \\ \overline{u}_m(x) = \overline{d}_m(x) \end{cases} \tag{4.15}$$

a igualdade não se estende também a $s(x)$ e $c(x)$, cujas contribuições para os prótons podem vir só do mar.

Desse modo, tem-se pelo menos 4 distribuições partônicas ($u_{\mathrm{v}}, u_m, \overline{u}_m, d_{\mathrm{v}}$) para se determinar, dispondo-se apenas da função de estrutura do próton (F_2^{ep}) como dado experimental (Figura 4.3).

[4]Uma vez que $\displaystyle\int_0^1 q_m(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \overline{q}_m(x)\mathrm{d}x$.

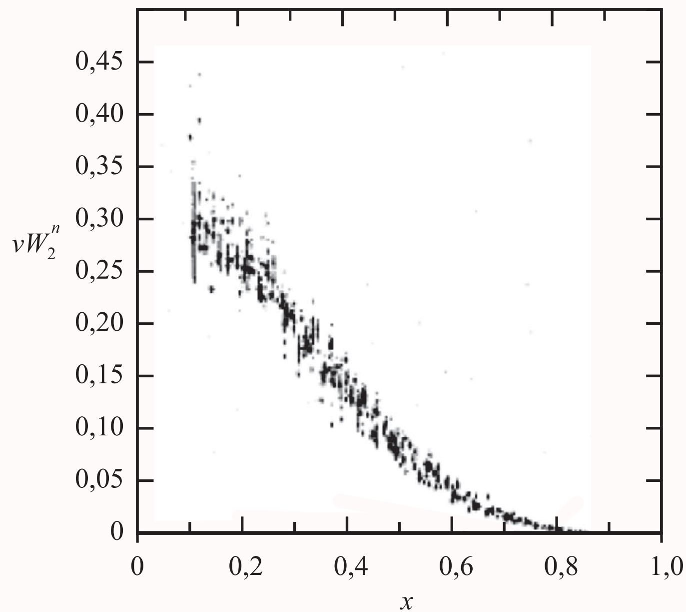


Figura 4.4 Comportamento de νW_2 com relação a x, para nêutrons. Resultado do grupo do MIT-SLAC, de 1979.

No entanto, a partir do espalhamento profundamente inelástico de elétrons por dêuterons,[5] o grupo do MIT-SLAC foi capaz também de extrair a função de estrutura do nêutron (F_2^{en}), cujo comportamento é mostrado na Figura 4.4.

Do ponto de vista teórico, das Equações (4.13), obtém-se

$$F_2^{ep}(x)/x = \frac{4}{9}\left[u(x) + \overline{u}(x)\right] \ + \ \frac{1}{9}\left[d(x) + \overline{d}(x)\right] \ + \ \cdots + \cdots \tag{4.16}$$

e, da invariância de *isospin*,

$$F_2^{en}(x)/x = \frac{4}{9}\left[d(x) + \overline{d}(x)\right] \ + \ \frac{1}{9}\left[u(x) + \overline{u}(x)\right] \ + \ \cdots + \cdots \tag{4.17}$$

Exercício 4.3 Estime as áreas das Figuras 4.3 e 4.4 e, a partir desses valores, desprezando a contribuição dos *quarks* estranhos, mostre que

$$I_u + I_d \simeq 0{,}5$$

em que $I_u = \displaystyle\int_0^1 x\,u(x)\,\mathrm{d}x$ é fração de *momentum* do próton transportado pelo *quark* u e $I_d = \displaystyle\int_0^1 x\,d(x)\,\mathrm{d}x$, a fração transportada pelo *quark* d.

[5]Considerando a colisão elétron-dêuteron, $ed \to eX$, equivalente ao processo $e(p+n) \to eX$, pode-se escrever

$$\sigma_d^{en} \simeq \sigma_d^{ed} - \sigma_d^{ep}$$

Exercício 4.4 A partir das Equações (4.14), (4.16) e (4.17), mostre que as funções de estrutura do próton e do nêutron obedecem à *regra de soma de Gottfried*

$$S_G = \int_0^1 \left[F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)\right] \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{3}$$

A *regra de soma de Gottfried*, tal qual expressa pelo resultado do Exercício (4.4), pressupõe que o mar, sendo isotopicamente neutro, daria a mesma contribuição para prótons e nêutrons. Apenas nesse caso encontra-se o valor $S_G = 1/3$. Desvios desse valor indicariam uma assimetria d/u do mar. Portanto, o conteúdo de sabor do mar de núcleons constitui-se em um importante teste para modelos de estrutura dos núcleons. A primeira clara evidência de violação da regra de soma de Gottfried veio da Colaboração NMC, no início da década de 1990. De fato, medidas da razão entre as funções de estrutura do núcleon, F_2^n/F_2^p, no espalhamento profundamente inelástico de múons com hidrogênio e de múons com deutério deram origem ao resultado inesperado, para a escala de $Q^2 = 4$ GeV^2,

$$S_G = 0{,}240 \pm 0{,}016$$

Tal desvio significativo pode ser compreendido em termos de objetos efetivos, como os *diquarks*, como mostraram Anselmino, Barone, Caruso & Pedazzi (1992).

4.4. *Glúons*

De acordo com a regra de soma de *momentum*, Equação (4.9), a partir dos resultados do grupo MIT-SLAC sobre o comportamento de $F_2^{ep}(x)$ para o próton (Figura 4.3), e sobre o comportamento de $F_2^{en}(x)$ para o nêutron (Figura 4.4), pode-se estimar que a fração de *momentum* do próton transportado pelos *quarks* u e d é da ordem de 0,5. Assim, a menos que o erro ao se desprezar o *quark* s na composição de um núcleon fosse muito grande, deveriam então existir outros constituintes no interior do próton, além dos *quarks*, que contribuiriam para o *momentum* dos hádrons, mas não para as funções de estruturas.

Uma vez que o modelo no qual existem apenas pártons eletricamente carregados, *i.e.*, os *quarks* e *antiquarks*, descreve com sucesso os processos de espalhamentos que envolvem as interações eletromagnéticas, tais outros constituintes não devem participar dessas interações, ou seja, cerca de metade do *momentum* do próton se deve a *pártons não carregados*. Foi então sugerido que os novos constituintes fossem os *glúons* (g), *i.e.*, os membros do octeto de cor supostamente responsáveis pelas interações fortes entre os *quarks*, no modelo estático, oriundo das simetrias estabelecidas pela espectroscopia hadrônica.

A presença dos *glúons*, além de resolver o problema do balanço de *momentum*,[6] propicia também um mecanismo para a explicação do mar de pares $q_m\overline{q}_m$ e para a violação do *scaling* de Bjorken.

Sem a inclusão dos *glúons* no modelo a pártons, os *quarks* de valência (q_{v}), de massa $m_j = x_j M$, seriam

---

[6] A conservação do *quadrimomentum* é expressa, agora, por

$$\int_0^1 \left\{ \sum_q \left[q(x) \, + \, \overline{q}(x)\right] \, + \, g(x) \right\} x \, \mathrm{d}x = 1$$

em que $q(x)$ e $\overline{q}(x)$ são as PDF dos *quarks* e *antiquarks*, e $g(x)$ é a PDF dos glúons.

livres no interior do núcleon, as distribuições partônicas $f_j(x)$ seriam deltiformes,

$$f_j(x) = \delta(x - x_j) = \delta(x - m_j/M)$$

e a função de estrutura $F_2(x)$ do núcleon de massa M, considerando que $m_u \simeq m_d$,[7] segundo a Equação (4.5), também seria deltiforme, proporcional a

$$F_2(x) \propto \delta(x - 1/3)$$

Com a inclusão dos *glúons*, as interações entre os *quarks* de valência implicam distribuições contínuas para os *quadrimomenta* dos *quarks* de valência. Uma vez que os *glúons* também interagem fortemente, além dos *quarks* de valência, ao núcleon está associado um mar de pares de *quarks-antiquarks* ($q_m\overline{q}_m$), que carregam junto com os *glúons* parte do *momentum* do núcleon, principalmente no regime de $|q^2| \to \infty$ e $x \to 0$.

A Figura 4.5 mostra que o comportamento esperado da função de estrutura do próton e das contribuições dos *quarks* de valência e do mar é compatível com os resultados dos experimentos do grupo MIT-SLAC (Figuras 4.3 e 4.4).

Antes de apresentar a teoria das interações fortes entre *quarks* e *glúons*, ou seja, a QCD, que emergiu do estudo e da compreensão da espectroscopia hadrônica e do *deep inelastic scattering* (DIS), pode-se mostrar também algumas outras indicações a favor da interpretação dos *pártons* como *quarks* resultantes de processos diferentes de colisões lépton-núcleon.

---

[7] A fração de *momentum* de cada *quark* seria definida, e, uma vez que os prótons são constituídos por 2 *quarks* de valência u_v e 1 *quark* de valência d_v,

$$\int_0^1 x\, u_v(x)\, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\, d_v(x)\, \mathrm{d}x$$

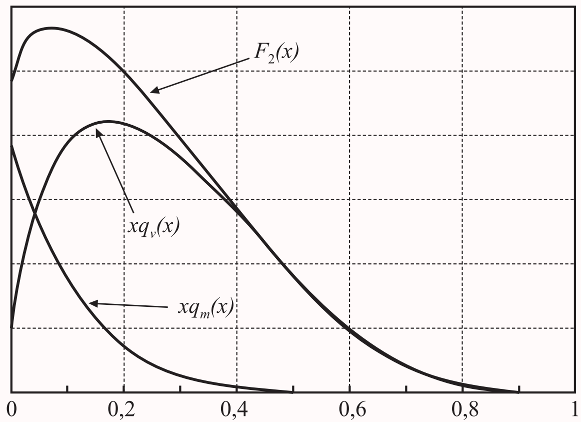


Figura 4.5 Função de estrutura do próton $F_2(x)$ e as contribuições dos *quarks* de valência (xq_v) e do mar (xq_m).

• **Espalhamento inelástico neutrino-núcleon**

O modelo a *pártons* foi testado por vários experimentos de espalhamentos do tipo lépton-núcleon, nos anos 1970. Em particular, o espalhamento neutrino-núcleon permite extrair as distribuições partônicas dos *quarks* e do *antiquarks* e uma melhor separação dos sabores dos *quarks*.

O tratamento dos processos $\nu N \to e^- X$ e $\nu N \to \nu X$ é completamente análogo àquele de $eN \to eX$, com a diferença de que o vértice hadrônico $W_{\mu\nu}$, visto que as interações fracas não conservam a paridade, contém três funções de estrutura $W_{1,2,3}(\nu, Q^2)$ e não apenas duas. Essas também *escalam* e podem ser relacionadas com as distribuições dos pártons no núcleon.

A partir do espalhamento neutrino-próton no CERN, a colaboração CDHS (CERN-Dortmund-Heidelberg-Saclay), em 1983, obteve um conjunto de distribuições partônicas parametrizadas como

$$\begin{cases} xu_v(x) = 1{,}78x^{0{,}5}\left(1 - x^{1{,}51}\right)^{3{,}5} \\ xd_v(x) = 0{,}767x^{0{,}4}\left(1 - x^{1{,}51}\right)^{4{,}5} \\ xu_m(x) = xd_m(x) = 0{,}182\left(1 - x\right)^{8{,}54} \\ xs_m(x) = 0{,}081\left(1 - x\right)^{5{,}90} \\ xg(x) = \left(2{,}62 + 9{,}17x\right)\left(1 - x\right)^{5{,}90} \end{cases} \tag{4.18}$$

À mesma época, em 1984, um outro conjunto de parametrizações para as distribuições partônicas foi obtido D.W. Duke e J.E. Owens, a partir de dados dos experimentos do SLAC (elétrons) e das colaborações CDHS (neutrinos) e EMC (múons) no CERN.

4.5. Jatos e hadronização

De acordo com a teoria dos *quarks* baseada nas propriedades do grupo $SU(3)_c$, apenas partículas sem a propriedade de cor poderiam ser diretamente identificadas na espectroscopia hadrônica. Os *quarks*, por exibirem a propriedade de cor, estariam confinados no interior dos hádrons e, portanto, só seriam indiretamente inferidos, como no espalhamento profundamente inelástico. No entanto, de acordo com o modelo a pártons, evidências mais diretas, a partir da aniquilação elétron-pósitron, poderiam ser observadas.

Em altas energias, a aniquilação e^-e^+ pode produzir pares de *quarks-antiquarks*, e esses pares podem se materializar em *jatos* de hádrons com *momentum* praticamente na direção dos *quarks* iniciais. Ou seja, nesse processo, denominado *hadronização*, as componentes dos *momenta* dos hádrons na direção do movimento dos *quarks* que se *fragmentam* são bem maiores que as componentes perpendiculares. Por algum motivo que ainda não foi completamente compreendido teoricamente, tudo se passa, na prática, como se a parte *hard* do processo (a produção dos *quarks*) fosse independente da parte *soft*, relacionada à hadronização. É isso, em última análise, que justifica a *hipótese de fatorização* dessas duas etapas de um processo descrito pela QCD.

Assim, de acordo com a conservação de *momentum*, em uma colisão e^-e^+ a altas energias, os hádrons se manifestariam como dois jatos de partículas que se deslocam em sentidos opostos. Ocasionalmente, um *quark* pode emitir um *glúon*, que carrega parte de seu *momentum*, e, assim, podem surgir, ainda, eventos nos quais ocorrem três jatos.

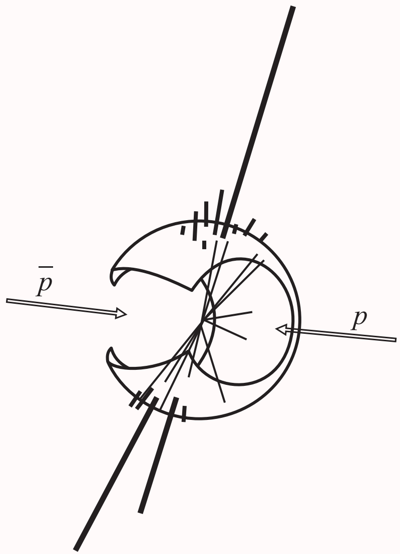


Figura 4.6 Jatos observados pela colaboração UA2 do CERN: os hádrons que constituem os dois jatos são mostrados como traços que apontam para o vértice da colisão $p\overline{p}$.

A possibilidade de estruturas de dois jatos, em Física de Altas Energias, havia sido prevista teoricamente por Drell, Levy & Yan (1969, 1970), Cabibbo, Parisi & Testa (1970) e Bjorken & Brodsky (1970).

A primeira evidência de dois jatos oriundos de *quarks* foi observada no detector MARK I no colisor de elétrons e pósitrons (SPEAR) do SLAC, em 1975, pela colaboração SLAC-LBL (Lawrence Berkeley Laboratory), com elétrons e pósitrons a energias de 3,7 GeV.

Em 1976, Ellis, Gaillard & Ross sugerem que um *bremsstrahlung* de *glúon* duro poderia ser a fonte de hádrons com grande *quadrimomenta* transferidos em relação aos eixos dos jatos principais. Esse processo daria, então, origem a um estado final de três jatos.

A primeira indicação de que os decaimentos hadrônicos da ressonância $\Upsilon(9.46)$ podem ser interpretados como eventos de três jatos produzidos por três *glúons* foi obtida pela Colaboração PLUTO, em meados de 1978.

No ano seguinte, novos jatos oriundos de *glúons* foram observados, no PETRA do DESY, pelas colaborações JADE, MARK J, PLUTO e TASSO, com elétrons e pósitrons com energias até 18 GeV. Posteriormente, com a inauguração do anel colisor próton-antipróton (SPS) do CERN, em 1981, os jatos foram observados também a partir de colisões hadrônicas, a energias do centro de massa de 540 GeV, como nas Figuras 4.6 e 4.7.

A evidência experimental de que os *glúons* têm efetivamente *spin* 1 foi obtida, também pela colaboração TASSO, a partir do processo elementar $e^-e^+ \to q\bar{q}g$.

Resta então a construção de uma teoria de *gauge*, baseada na simetria de $SU_c(3)$, na qual os *quarks* interagem mediados por bósons vetoriais, os *glúons*, como será visto no próximo capítulo.

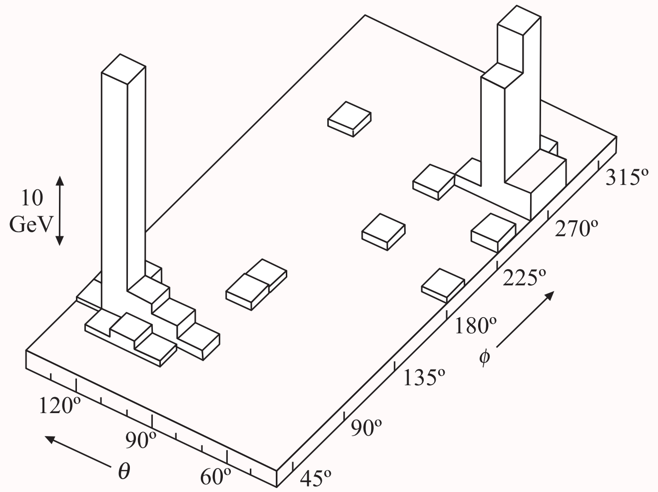


Figura 4.7 Jatos observados pela colaboração UA2 do CERN: os dois jatos são mostrados em um *lego plot*, como distribuições (torres) de energia em função dos ângulos polar (θ) e azimutal (ϕ), com relação à direção dos feixes de prótons e antiprótons.

4.6. Fontes primárias

Abramowicz, H. *et al.* (CDHS Collaboration) 1982. Test of QCD and Non-Asymptotically-Free Theories of the Strong Interaction by an Analysis of the Nucleon Structure Functions xF_3, F_2 and $\bar{q}$. *Zeitschrift für Physik C* **13**, n. 3, p. 199-204.

Abramowicz, H. , *et al.* (CDHS Collaboration) 1983. Neutrino and Antineutrino Charged Current Inclusive Scattering in Iron in the Energy Range $20 < E_\nu < 300$ GeV. *Zeitschrift für Physik C* **17**, n. 4, p. 283-307.

Amaudruz, P. *et al.* (NMC Collaboration) 1991. Gottfried Sum From the Ratio F_2^n/F_2^p. *Physical Review Letters* **66**, n. 21, p. 2712-2715.

Arneodo, M. *et al.* (NMC Collaboration) 1994. Reevaluation of the Gottfried sum. *Physical Review D* **50**, n. 1, p. R1-R3.

Aubert, J.J. *et al.* (EMC Collaboration) 1983. Measurement of $R = \sigma_L/\sigma_T$ in Deep Inelastic Muon-Proton Scattering. *Physics Letters B* **121**, n. 1, p. 87-90.

Bardeen, W.A.; Fritzsch, H. & Gell-Mann, M. 1973. Light Cone Current Algebra, π° Decay and e^+e^- Annihilation. In: R. Gatto (ed.), *Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics*, John Wiley and Sons, p. 139. Disponível em http://arxiv.org/abs/hep-ph/0211388.

Banner, M. et al. (UA2 Collaboration) 1982. Observation of Very Large Transverse Momentum Jets at the CERN pp Collider. *Physics Letters B* **118**, n. 1-3, p. 203-210.

Barber, D. *et al.* (MARK J Collaboration) 1979 Discovery of Three-Jet Events and a Test of Quantum Chromodynamics at PETRA. *Physical Review Letters* **43**, n. 12, p. 830-833.

Bartel, W. *et al.* (JADE Collaboration) 1980. Observation of Planar Three-Jet Events in e^+e^- Annihilation and Evidence for Gluon Bremsstrahlung. *Physics Letters B* **91**, n. 1, p. 142-147.

Berger, C. *et al.* (PLUTO Collaboration) 1979. Evidence for Gluon Bremsstrahlung in e^+e^- Annihilations at High Energies. *Physics Letters B* **86**, n. 3-4, p. 418-425.

Berger, C. *et al.* (PLUTO Collaboration) 1980. A Study of Multi-Jet Events in e^+e^- Annihilation. *Physics Letters B* **97**, n. 3-4, p. 459-464.

Bjorken, J.D. 1966. Application of the Chiral $U(6) \otimes U(6)$ Algebra of Current Densities. *Physical Review* **148**, n. 4, p. 1467-1478.

Bjorken, J.D. 1968. Current Algebra at Small Distances, In: J. Steinberger (Ed.) *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi Course XLI*, New York: Academic Press, p. 55-81.

Bjorken, J.D. 1969. Asymptotic Sum Rule at Infinite Momentum. *Physical Review* **179**, n. 5, p. 1547-1553.

Bjorken, J.D. & Brodsky, S.J. 1970. Statistical Model for Electron-Positron Annihilation into Hadrons. *Physical Review D* **1**, n. 5, p. 1416-1420.

Bjorken, J.D. & Paschos, E.A. 1969. Inelastic Electron-Proton and γ-Proton Scattering and the Structure of the Nucleon. *Physical Review* **185**, n. 5, p. 1975-1982.

Bodek, A. *et al.* (MIT-SLAC Collaboration) 1979. Experimental Studies of the Neutron and Proton Electromagnetic Structure Functions. *Physical Review D* **20**, n. 7, p. 1471-1552.

Brace, M. 1979. Asymptotic Behaviour of Non-Perturbative Corrections to the Callan-Gross Relation. *Physics Letters B* **88**, n. 1-2, p. 109-113.

Brandelik, R. *et al.* (TASSO Collaboration) 1979. Evidence for Planar Events in e^+e^- Annihilation at High Energies. *Physics Letters B* **97**, n. 3-4, p. 453-458.

Brandelik, R. *et al.* (TASSO Collaboration) 1980. Evidence for a Spin-1 Gluon in the Three-Jet Events. *Physics Letters B* **86**, n. 2, p. 243-249.

Cabibbo, N., Parisi, G. & Testa, M. 1970. Hadron Production in e^+e^- Collisions. *Lettere al Nuovo Cimento* **4**, p. 35-39.

Callan, C.G.; Gronau, M.; Pais, A.; Paschos, E. & Treiman, S.B. 1972. Light-Cone Approach to Structure-Function Inequalities. *Physical Review D* **6**, n. 1, p. 387-390.

Callan, C.G. & Gross, D.J. 1968. Crucial Test of a Theory of Currents. *Physical Review Letters* **21**, n. 5, p. 311-313.

Callan, C.G. & Gross, D.J. 1969. High-Energy Electroproduction and the Constitution of the Electron Current. *Physical Review Letters* **22**, n. 4, p. 156-159.

Drell, S.D., Levy, D.J. & Yan, T.M. 1969. Theory of Deep-Inelastic Lepton-Nucleon Scattering and Lepton-Pair Annihilation Processes. I. *Physical Review* **187**, n. 5, p. 2159-2171.

Drell, S.D., Levy, D.J. & Yan, T.M. 1970. Theory of Deep-Inelastic Lepton-Nucleon Scattering and Lepton-Pair Annihilation Processes. III. Deep-Inelastic Electron-Positron Annihilation. *Physical Review D* **1**, n. 6, p. 1617-1639.

Drell, S.D. & Yan, T.M. 1971. Partons and Their Applications at High Energies. *Annals of Physics* **66**, p. 578-623.

Duke, D.W. & Owens, J.F. 1984. Q^2-Dependent Parametrization of Parton Distribution Functions. *Physical Review D* **30**, n. 1, p. 49-54.

Eichten, T. *et al.* 1973. Measurement of the Neutrino-Nucleon and Anti Neutrino-Nucleon Total Cross Sections. *Physics Letters B* **46**, n. 2, p. 274-280.

Ellis, J., Gaillard, M.K. & Ross, G.G. 1976. Search for Gluons in e^+e^- Annihilation. *Nuclear Physics B* **111**, n. 2, p. 253-271.

Friedman, J.I. & Kendall, W. 1972. Deep Inelastic Electron Scattering. *Annual Review of Nuclear Science* **22**, p. 203-254. Resultados do grupo MIT-SLAC.

Gottfried, K. 1967. Sum Rule for High-Energy Electron-Proton Scattering. *Physical Review Letters* **18**, n. 25, p. 1174-1177.

Gross, D.J. & Wilczek, F. 1973. Ultraviolet Behaviour of Non-Abelian Gauge Theories. *Physical Review Letters* **30**, n. 10, p. 1343-1346; Asymptotic Free Gauge Theories. *Physical Review D* **8**, p. 3633-3652.

Hanson, G. *et al.* (SLAC-LBL Collaboration) 1975. Evidence for Jet Structure in Hadron Production by e^+e^- Annihilation. *Physical Review Letters* **35**, n. 24, p. 1609-1612.

Nachtmann, O. 1972. Inequalities for Structure Functions of Deep Inelastic Lepton-Nucleon Scattering Giving Tests of Basic Algebraic Structures. *Nuclear Physics B* **38**, n. 2, p. 397-417.

Pallua, S. & Renner, B. 1972. Bounds on Deep Inelastic Structure Functions. *Nuclear Physics B* **43**, p. 331-344.

4.7. Outras referências e sugestões de leitura

Aitchison, I.J.R. & Hey, A.J.G. 1989. *Gauge Theories in Particle Physics*. 2nd. ed., Bristol: Adam Hilger.

Anselmino, M.; Barone, V.; Caruso, F. & Predazzi, E. 1992. Gottfried and Bjorken Sum Rules: The Role of Vector Diquarks. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields* **55**, n. 1, p. 97-100.

Anselmino, M.; Caruso, F. & Levin, E. 1995. High Twist Corrections to Bjorken Sum Rules. *Physics Letters B* **358**, n. 1-2, p. 109-112.

Barger, V.D. & Phillips, R.J.N. 1987. *Collider Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Brown, L.M. 2000. *Selected Papers of Richard Feynman With Commentary*. Singapore: World Scientific. Além dos artigos sobre Eletrodinâmica Quântica, destaca-se a reimpressão de dois textos com o mesmo título, Partons, p. 519-559 e p. 560-655.

Close, F.E. 1979. *An Introduction to Quarks and Partons*. New York: Academic Press.

Ellis, J. 1981. Gluons. *Comments on Nuclear and Particle Physics* **9**, n. 5, p. 153-168.

Feynman, R.P. 1972. *Photon-Hadron Interactions*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Field, R.D. 1989. *Applications of Perturbative QCD*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Greiner, W. & Schäfer, A. 1995. *Quantum Chromodynamics*. Berlin: Springer.

Griffiths, D. 1987. *Introduction to Elementary Particles.* New York: John Wiley & Sons.

Halzen, F. & Martin, A.D. 1984. *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.* New York: John Wiley & Sons.

Kataev, A.L. 2003. The Gottfried Sum Rule: Theory vs Experiment. 11th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow State University, *in* arXiv:hep-ph/0311091v1.

Leader, E. & Predazzi, E. 1996. *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics, Volumes 1-2.* Cambridge: University Press.

Martin, A.D. 2008. Proton Structure, Partons, QCD, DGLAP and Beyond. http://arxiv.org/abs/0802.0161.

Melnitchouk, W.; Thomas, A.W. & Signal, A.I., 1991 Gottfried Sum Rule and the Shape of $F_2^p - F_2^n$. *Zeitschrift für Physik A - Hadrons and Nuclei* **340**, n. 1, p. 85-92.

Nachtmann, O. 1990. *Elementary Particle Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Perkins, D.H. 1975. Neutrinos and Nucleon Structure. *Contemporary Physics* **16**, n. 2, p. 173-205.

Perkins, D.H. 1987. *An Introduction to High Energy Physics.* Reading, MA: Addison Wesley, 3rd. ed.

Quigg, C. 1983. *Gauge Theories of Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Renton, P. 1990. *Electroweak Interaction. An Introduction to the Physics of Quarks & Leptons.* Cambridge: University Press.

Roberts, R.G. 1993. *The Structure of the Proton.* Cambridge: University Press.

Söding, P. 2010. On the Discovery of the Gluon. *European Physical Journal H* **35**, n. 1, p. 3-28.

Stella, B.R. & Meyer, H.-J. 2011. Υ(9.46 GeV) and the Gluon Discovery. A Critical Recollection of PLUTO Results. *European Physical Journal H* **36**, n. 2, p. 203-243.

Referências Bibliográficas

A

[Aitchison, I.J.R. & Hey, A.J.G., 1989] *Gauge Theories in Particle Physics*. 2nd. edition. Bristol: Adam Hilger.
[Altarelli, G., 1994] *The Development of Perturbative QCD*. Singapore: World Scientific.
[Alves, G.; Caruso, F.; Motta, H. & Santoro, A. (Eds.), 2000] *O mundo das partículas de hoje e de ontem*. 2a. edição. São Paulo: Livraria da Física.

B

[Barger, V.D. & Phillips, R.J.N., 1987] *Collider Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley.
[Barone, V. & Ratcliffe, P.G., 2003] *Transverse Spin Physics*. River Edge, USA: World Scientific.
[Bassalo, J.M.F., 2006] *Eletrodinâmica Quântica*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
[Beyer, R.T. (Ed.), 1949] *Selected Papers in Foundations of Nuclear Physics*. Nova York: Dover.
[Bjorken, J.D. & Drell, S.D., 1964] *Relativistic Quantum Mechanics*. Nova York: McGraw-Hill.
[Brading, K. & Castellani, E. (Eds.), 2003] *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge: University Press.
[Bransden, B.H. & Moorhouse, R.G., 1973] *The Pion-Nucleon System*. Princeton: University Press.
[Brown, L.M.; Dresden, M. & Hoddeson, L. (Eds.), 1989] *Pions to Quarks*. Cambridge: University Press.
[Byckling, E. & Kajantie, K., 1973] *Particle Kinematics*. London: John Wiley.

C

[Caruso, F.; Oguri, V. & Santoro, A. (Eds.), 2012] *Física de Partículas Elementares: 100 anos de descobertas*. 2a. edição. São Paulo: Livraria da Física.

[Caruso, F. & Santoro, A. (Eds.), 2012] *Do Átomo Grego à Física das Partículas Elementares*. São Paulo: Livraria da Física, 3a. edição corrigida.

[Close, F.E., 1979] *An Introduction to Quarks and Partons*. Nova York: Academic Press.

[Collins, P.D.B., 2009] *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics*. Cambridge: University Press.

[Collins, J.C., 2011] *Foundations of Perturbative QCD*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, No. 32, Cambridge: University Press.

D

[**Das, A. & Ferbel, T., 2003**] *Introduction to Nuclear and Particle Physics*. Singapore: World Scientific, 2nd. ed.
[**Dissertori, G.; Knowles, I.G. & Schmelling, M., 2009**] *Quantum Chromodynamics: High Energy Experiments and Theory*. Oxford: University Press.
[**Dirac, P.A.M., 1930**] *Quantum Mechanics*. Oxford: Claredon Press.
[**Dirac, P.A.M., 1971**] *The Development of Quantum Theory*. Nova York: Gordon and Breach.
[**Dirac, P.A.M., 1978**] *Directions in Physics*. Nova York: John Wiley (edited by H. Hora & J.R. Shepanski).
[**Dokshitzer, Yu.L.; Khose, V.A.; Mueller, A.H. & Troyan, S.I., 1991**] *Basics of Perturbative QCD*. Singapore: Editions Frontières.
[**Donnachie, S.; Dosch, G.; Landshoff, P. & Nachtmann, O., 2002**] *Pomeron Physics and QCD*. Cambridge: University Press.
[**Dyson, F., 2007**] *Advanced Quantum Mechanics*. Singapore: World Scientific.

E

[**Ellis, R.K.; Stirling, W.J. & Webber, B.R., 1996**] *QCD and Collider Physics*. Cambridge: University Press.
[**Ezhela, V.V., *et al.*, 1996**] *Particle Physics: One Hundred Years of Discoveries*. Woodbury: American Institute of Physics.

F

[**Faddeev, L.D. & Slavnov, A.A., 1980**] *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*. Reading, Massachusetts: Benjamin.
[**Fermi, E., 1949**] *Nuclear Physics*. Chicago: University Press.
[**Feynman, R.P., 1961**] *Quantum Electrodynamics*. Edição utilizada, Massachusetts: Perseus (1998).
[**Field, R.D., 1989**] *QED: Applications of Perturbative QCD*. Reading, MA: Addison-Wesley.
[**Forshaw, J.R. & Ross, D.A., 1997**] *Quantum Chromodynamics and the Pomeron*. Cambridge: University Press.
[**Frauenfelder, H. & Henley, E.M., 1991**] *Subatomic Physics*. New Jersey: Prentice Hall, 2nd. ed.

G

[**Gell-Mann, M. & Ne'emann, Y., 1964**] *The Eightfold Way*. Nova York: Benjamin.
[**Gell-Mann, M., 1995**] *Le Quark et le Jaguar: voyage au coeur du simple et du complexe*. Paris: Albin Michel.
[**Grainer, M.; Schramm, S. & Stein, E., 2007**] *Quantum Chromodynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
[**Greiner, W. & Reinhardt, J., 1994**] *Quantum Electrodynamics*. Berlin: Springer.
[**Greiner, W. & Schäfer, A., 1995**] *Quantum Chromodynamics*. 2nd. ed. Berlin: Springer.
[**Gribov, V.N. & Nyri, J., 2001**] *Quantum Electrodynamics. Gribov Lectures on Theoretical Physics*. Cambridge: University Press.
[**Griffiths, D., 1987**] *Introduction to Elementary Particles*. New York: John Wiley & Sons.
[**Grozin, A., 2007**] *Lectures on QED and QCD: Practical Calculation and Renormalization of One- and Multi-Loop Feynman Diagrams*. Singapore: World Scientific.

H

[**Hagedorn, R., 1963**] *Relativistic Kinematics. A Guide to the Kinematic Problems of High-Energy Physics*. Reading, Massachusetts: W.A. Benjamin.

[**Halzen, F. & Martin, A.D., 1984**] *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. New York: John Wiley & Sons.

[**Heisenberg, W., 1966**] *Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles*. Nova York: Interscience Publishers.

[**Heisenberg, W., 1971**] *Physics and Beyond: Memories of a Life in Science*. Londres: George Allen & Uniwin Ltd.

[**Hofstadter, R., 1963**] *Electron Scattering and Nuclear and Nucleon Structure: A Collection of Reprints with an Introducation*. New York: W.A. Benjamin.

I

[**Ihde, A.J., 1984**] *The Development of Modern Chemistry*. Nova York: Dover.

J

[**Jackson, J.D., 1999**] *Classical Electrodynamics*. Nova York: John Wiley & Sons, Third edition.

K

[**Kälén, G., 1964**] *Elementary Particle Physics*. Reading, Massashusetts: Addison Wesley.

L

[**Leader, E. & Predazzi, E., 1996**] *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics*, Volumes 1-2. Cambridge: University Press.

[**Lee, T.D., 1981**] *Particle Physics and Introduction to Field Theory*. Harwood: Academic Press.

[**Leite Lopes, J., 1977**] *Introducción a la Electrodinámica Cuántica*. México: Editorial Trillas.

[**Leite Lopes, J., 1981**] *Gauge Field Theory: An Introduction*. Oxford: Pergamon Press.

[**Lichtenberg, D.B., 1978**] *Unitary Symmetry and Elementary Particles*. Londres: Academic Press, Second edition.

[**Lichtenberg, D.B. & Rosen, S.P., 1980**] *Developments in the Quark Theory of Hadrons. A Reprint Collection*, vol. I: 1964-1978. Nonantum, MA: Hadronic Press.

[Lipkin, H.J., 1966] *Lie Groups for Pedestrians*. Amsterdã: North-Holland Publishing Co., Second edition.

M

[McCuster, B., 1983] *The quest for quarks*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Moriyasu, K., 1978] *An Elementary Primer for Gauge Theory*. Singapore: World Scientific.

[Mott, N.F. & Massey, H.S.W., 1965] *The Theory of Atomic Collisions*. Terceira edição. Oxford: University Press.

[Muta, T., 1987] *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*. Singapore: World Scientific.

N

[Nachtmann, O., 1990] *Elementary Particle Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
[Nambu, Y. 1985] *Quarks*. Singapore: World Scientific.

O

[Okun, L.B., 1982] *Lepton and Quarks*. Amsterdã: North-Holland.

P

[Pais, A., 1988] *Inward Bound of Matter and Forces in the Physical World*. Nova York: Oxford University.
[Perskin, D.H., 1987] *An Introduction to High Energy Physics*. Reading: Addison Wesley, 3rd. ed.
[Peskin, M.E. & Schroeder, D.V., 1995] *An Introduction to Quantum Field Theory*, Reading: Addison-Wesley.

Q

[Quigg, C., 1983] *Gauge Theories of Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Reading, MA: Addison-Wesley.

R

[Renton, P., 1990] *Electroweak Interaction. An Introduction to the Physics of Quarks & Leptons*. Cambridge: University Press.
[Roberts, R.G., 1993] *The Structure of the Proton*. Cambridge: University Press.

S

[Sakurai, J.J., 1964] *Invariance Principles and Elementary Particles*. Princeton: University Press.
[Sakurai, J.J., 1967] *Advanced Quantum Mechanics*. Reading, Massachusetts: Adddison-Wesley.
[Smilga, A. V. (Ed.), 1994] *Continuous Advances in QCD*. Singapore: World Scientific.
[Smilga, A.V., 2001] *Lectures on Quantum Chromodynamics*. Singapore: World Scientific.
[Schwinger, J., 1958] *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. Nova York: Dover.

T

['t Hooft, G (Ed.), 2005] *50 Years of Yang-Mills Theory*. Singapore: World Scientific.
[Tomonaga, S.-i., 1997] *The Story of Spin*. Chicago: University Press.

V

[Van der Waerden (Ed.), 1968] *Sources of Quantum Mechanics*. Nova York: Dover.
[Veltman, M.J.G., 2003] *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics*. Singapore: World Scientific.
[Van, T.T. (Ed.), 1999] *Perturbative QCD and hadronic interactions*. Yves-sur-Ivete: Ed. Frontières.

W

[Weinberg, S., 1993] *Dreams of a Final Theory*. Nova York: Pantheon Books.
[Weinberg, S., 1995] *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1. Nova York: Cambridge University Press.
[Weinberg, S., 2005] *The Quantum Theory of Fields*, vol. 2. Nova York: Cambridge University Press.

Y

[Yndurain, F.J., 1983] *Quantum Chromodynamics*. Berlim: Springer Verlag.
[Yndurain, F.J., 1990] *Mecánica Cuántica Relativista*. Madri: Alianza Editorial.

Z

[Zerwas, P.M. & Kastrup, H.A. (Eds.) 1993] *QCD – 20 Years Later*. Singapore: World Scientific, vols. 1 e 2.
[Zee, A., 2010] *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton: University Press.

Sites

[Altarelli, G., 2009] http://www.scholarpedia.org/article/QCD_evolution_equations_for_parton_densities
[CTEQ Collaboration] http://www.phys.psu.edu/~cteq/handbook/v1.1/handbook.pdf
[PDG, 2006] pdg.lbl.gov/
['t Hooft, G., 2009] http://www.scholarpedia.org/article/Gauge_theories
[Tung, Wu-Ki, 2009] http://www.scholarpedia.org/article/Bjorken_scaling

Índice Remissivo