

FÍSICA GERAL

Estimativas e Erros em Experimentos de Física

W. Prado*

L. Mundim*
A. Santoro*

J. U. Cinelli[†]
V. Oguri*

J. R. Mahon*

*Departamento de Física Nuclear e Altas Energias — DFNAE — IF — UERJ

[†]Departamento de Física Teórica — DFT — IF — UERJ

Apresentação

Este texto constitui uma introdução geral à análise de erros e incertezas, baseado em métodos estatísticos, redigido como parte do material didático para as atividades de laboratório da disciplina de *Física Geral*, oferecida aos alunos que ingressam no curso de Física da UERJ.

A par de técnicas estatísticas, que proporcionarão aos alunos:

- organizar e descrever conjuntos genéricos de dados,
- estimar erros em medidas diretas,
- propagar erros em medidas indiretas,
- efetuar a determinação de parâmetros a partir de ajustes lineares.

Ou seja, realizarem de modo elementar, sínteses e análises exploratórias de dados: pretendemos também que os alunos adquiram comportamento e procedimento adequados ao trabalho em laboratório, tanto individual como coletivamente.

Como temos observado que versões anteriores desse trabalho têm sido usadas por professores em períodos mais adiantados, quando o estudante já dispõe de maiores conhecimentos de matemática, resolvemos incluir algumas

secções e apêndices (marcados com asteriscos) mais avançados. Esperamos com isso que o estudante, que esteja usando este trabalho no primeiro período, possa moldar sua formação em bases mais substanciais no decorrer de sua graduação. Uma vez apresentados alguns métodos estatísticos necessários à análise das medidas resultantes de um experimento, como utilizá-los no estudo ou no trabalho de pesquisa em Física? De que maneira os experimentos e as teorias físicas estão relacionados?

O objetivo primário de uma ciência básica, como a *Física*, não é o de proporcionar o descobrimento ou a invenção de novos aparatos tecnológicos¹ mas, sim, o de permitir ao homem ampliar a sua compreensão do mundo em que vive.

Com esse objetivo os físicos criam conceitos que são associados a grandezas e estabelecem relações entre eles, denominadas **leis físicas**. A partir, então, de um conjunto de leis físicas independentes, associadas a uma dada classe de fenômenos naturais, resultam as **teorias físicas**, as quais permitem a interpretação de uma multiplicidade de fenômenos em termos de alguns poucos princípios ou leis fundamentais.

Um **experimento**, etapa fundamental da investigação científica, é um processo que, a par da análise de dados, necessita da habilidade do experimentador

¹ Apesar de que, historicamente, a grande maioria das criações da ciência sempre proporcionaram a concepção e a realização de novos produtos e artefatos tecnológicos.

em imaginar e criar condições nas quais apenas alguns atributos ou grandezas associadas a um sistema variem ao longo do processo. Nesse contexto, a objetividade de um experimento resulta do teste de uma ou mais hipóteses que envolvam conexões ou relações entre as grandezas ou atributos de um sistema. Assim, a partir de hipóteses experimentalmente testáveis, as leis da Física podem ser estabelecidas.

Esse requerimento de condicionar a aceitação ou rejeição de uma hipótese sobre a natureza à um procedimento experimental, que se iniciou com Galileu (séc. XVII), é que permitiu aos físicos a elaboração de teorias e leis com grandes poderes de previsão e explicação, em relação ao comportamento e a evolução de diversos fenômenos naturais, e a criação de uma imagem coerente e compreensível do cosmos.

Estaremos recompensados se o estudante ao término do período estiver em condições de utilizar com desenvoltura o que aqui se expõe, quando, em outras disciplinas, iniciar o aprendizado de novas técnicas experimentais para a obtenção cuidadosa e sistemática de dados.

Índice

Apresentação	1
1 Introdução – Experimentos em Física	12
2 Apresentação e descrição de dados	17
2.1 Tabelas	17
2.2 Histogramas	18
2.3 Parâmetros de posição	27
Média aritmética ($\bar{x}$)	27
Média quadrática ($\overline{x^2}$)	27
Valor eficaz (x_{rms})	28
Moda (x_{mod})	28
Mediana (x_{med})	28
2.4 Parâmetros de dispersão	30
Amplitude (A)	30
Desvio Médio Absoluto ($\overline{ \delta x }$)	30
Variância (σ_x^2)	30
Desvio-padrão (σ_x)	33
Largura a meia altura (Γ)	33

Exemplo de resumo de dados	35
Exercícios	37
2.5 Parâmetros de correlação	40
2.5.1 Covariância	41
2.5.1.1 Análise do sinal da covariância	42
2.5.2 Coeficiente de correlação linear de Pearson	43
2.6 Tópico avançado *	47
Tópico avançado	47
2.6.1 Matriz de covariância	47
Exercícios	51
3 Estimativas e erros em medidas diretas	52
3.1 Valor esperado	52
3.2 Estimativas do valor esperado	54
3.3 Tipos de erros	55
Efeito aditivo	56
Efeito multiplicativo	57
Exatidão e precisão	57
3.4 Avaliação de erros associados a incertezas do Tipo A	65
3.4.1 Erro em medidas individuais	67

3.4.2	Erro da média	68
3.4.3	Pequenas amostras	72
3.5	Nível de confiança	74
3.5.1	Graus de liberdade	76
3.6	Avaliação de erros associados a incertezas do Tipo B	77
3.6.1	Instrumentos analógicos	80
3.6.2	Instrumentos digitais	83
3.7	Erro padrão	84
3.8	Algarismos significativos, arredondamento e expressões de medidas	86
3.9	Operação com medidas sem indicação explícita do erro	88
3.10	Compatibilidade e discrepância	90
3.10.1	Comparação entre uma estimativa e um valor de referência	90
3.10.2	Comparação entre duas estimativas de um valor esperado	92
	Exemplo de comparação entre resultados	94
	Exercícios	98
4	Estimativas e erros em medidas indiretas	101
4.1	Propagação de erros	102

4.1.1	Medidas indiretas envolvendo adição	102
4.1.2	Medidas indiretas envolvendo multiplicação	103
	Regra mnemônica	104
4.2	Exemplos de propagação de erros	107
4.2.0.1	Erro da média ($\sigma_{\bar{z}}$)	111
4.3	Regressão ou ajuste linear	112
4.4	Exemplos clássicos de uso de ajuste linear	115
4.5	Determinação de parâmetros	117
	Exercícios	120
4.6	Reta de calibração	123
4.6.1	Faixa de confiança e interpolação inversa	126
4.6.2	Exemplo com o dinamômetro de mola	129
	Exercício	130
5	Conclusão	132
	Notação de índice e de somatório	139
	Principais propriedades do somatório	141
A	Distribuição gaussiana	143

B Erro da média	146
Pequenas amostras	148
C Propagação de erros	152
C.1 Caso de uma variável	152
C.2 Caso de duas variáveis	155
C.3 Caso de M variáveis	160
C.4 Exemplos	163
C.4.1 Resultante de duas forças	163
C.4.2 Medida do momento de força	166
C.4.3 Incerteza em medição direta de ângulo por transferidor escolar	167
D Ajuste linear – Método dos mínimos quadrados	168
D.1 Função de ajuste $y=ax$	171
D.1.1 Estimativa das incertezas	172
D.1.2 Parâmetro do ajuste linear e as incertezas (resumo) . . .	175
D.2 Função de ajuste $y=ax+b$	176
D.2.1 Estimativa das incertezas associadas ao ajuste $y = ax + b$	180
D.2.2 Parâmetros do ajuste linear e as incertezas (resumo) . . .	182

D.3	Ajuste da função $y = f(x; \alpha)$	183
E	Faixa de confiança	184
F	Observações	192
F.1	Grandezas	192
F.2	Definições retiradas do VIM	193
G	Alguns valores de referência	200
G.1	Constantes Físicas Fundamentais	200
G.2	Aceleração da gravidade	201
H	Resumo	203
	Parâmetros de posição	206
	Parâmetros de dispersão	207
	Correlação	208
	Estimativas de Incerteza em medidas diretas	209
	Estimativas de Incerteza em medidas indiretas	218
	Ajuste linear	219
	Prefixos SI	223
	Alfabeto grego	225

Tabelas	226
Figuras	228
Bibliografia	230
Índice	234

1. Introdução – Experimentos em Física

Todo **experimento em Física** envolve a medição de uma ou várias *grandezas*, entendendo-se por grandeza: *atributo de um fenômeno ou sistema físico que pode ser distinguido qualitativamente e determinado quantitativamente*.

Mesmo que as medições tenham sido realizadas com todo esmero, os valores encontrados (**medidas**) estão sujeitos, inevitavelmente, a **incertezas**. A *análise de erros* e estimativa dessas incertezas é que nos permite quantificar propriamente o resultado de um experimento, além de ajudar a reduzi-las ou controlá-las.

Somente a partir de criteriosa determinação dos erros, torna-se possível quantificar um resultado experimental; nesse contexto, a **Estatística** é fundamental, por estabelecer métodos, critérios e procedimentos bem definidos que permitem uma boa e *sistemática* aquisição, organização, descrição, tratamento e interpretação de *dados*, até a extração e divulgação de resultados.

- **Dados:** valores^a de atributos associados aos elementos de um conjunto.
- **Medidas:** dados numéricos associados às grandezas relativas a um fenômeno ou sistema físico, resultantes de medições^b.
- **População:** conjunto ou coleção, hipotético ou não, da totalidade dos dados associados a um fenômeno ou sistema.
- **Amostra:** subconjunto acessível e disponível de uma população, do qual se pode ou se deseja extrair conclusões acerca da população.

^a Esses valores podem ser numéricos ou não-numéricos, como, por exemplo, a cor dos olhos de cada aluno de uma turma.

^b *Medição:* Ato ou processo de aquisição de dados que tem como objetivo associar um valor (uma medida) a uma grandeza.

Nesse sentido, pode-se dizer que um **experimento** sempre envolve um processo de *coleta de dados*, obtidos de um arranjo de instrumentos de detecção e medição, que resulta em uma *amostra* da qual se deseja extrair ou determinar (de modo sistemático) as propriedades de um fenômeno ou sistema físico.

Experimentos simples, de custo relativamente baixo, como a maioria dos experimentos didáticos, em geral, envolvem um pequeno número de pessoas, estendem-se por frações de hora e resultam em poucos dados a serem tratados. Por outro lado, um experimento complexo pode envolver milhares de pessoas, estender-se durante algumas décadas, ter um custo muito elevado e gerar uma quantidade de dados que demanda recursos de armazenamento e computacionais enormes.

Simple ou complexo, o esquema (Fig. 1) de um experimento genérico indica que, excepto em sua fase de construção, os métodos estatísticos são absolutamente necessários em todas as suas fases de operação.

Inicialmente, estudaremos a *organização e descrição de dados* sem o questionamento de como e de onde eles provêm, ou seja, sem a preocupação com o processo de aquisição, mesmo que esses dados sejam provenientes de algum procedimento experimental, como a medição das alturas ou das massas de um grupo de pessoas. Somente após estabelecermos os métodos de apresentação e caracterização de um conjunto genérico² de dados, utilizaremos esses conceitos para uma estimativa das incertezas associadas às medidas³ de grandezas

² Por exemplo, as notas das provas de Mecânica de uma turma, as contagens das faces em N lançamentos de um dado ou nos lançamentos de N dados idênticos, ou o sexo dos assinantes de um jornal.

³ Como as medidas de comprimento de uma barra, do período de um pêndulo ou da corrente

físicas.

As referências [9, 18, 15] apresentam os procedimentos para a organização e descrição direta de dados, de forma similar à adotada nessa introdução. Discussões ainda elementares, porém mais gerais, podem ser encontradas nas referências [6, 21].

Os métodos e procedimentos da *Estatística*, fundamentados por argumentos probabilísticos, requerem o uso de técnicas matemáticas não-elementares, que serão evitadas nessa introdução ao assunto. Abordagens mais formais do ponto de vista matemático são encontradas nas referências [23, 8, 13, 12, 10], enquanto do ponto de vista dos físicos, ou de outros pesquisadores na área de ciências da natureza, podem ser encontradas em [1, 11, 14, 2, 22, 20, 19, 17, 7].

em um circuito elétrico simples.

EXPERIMENTO

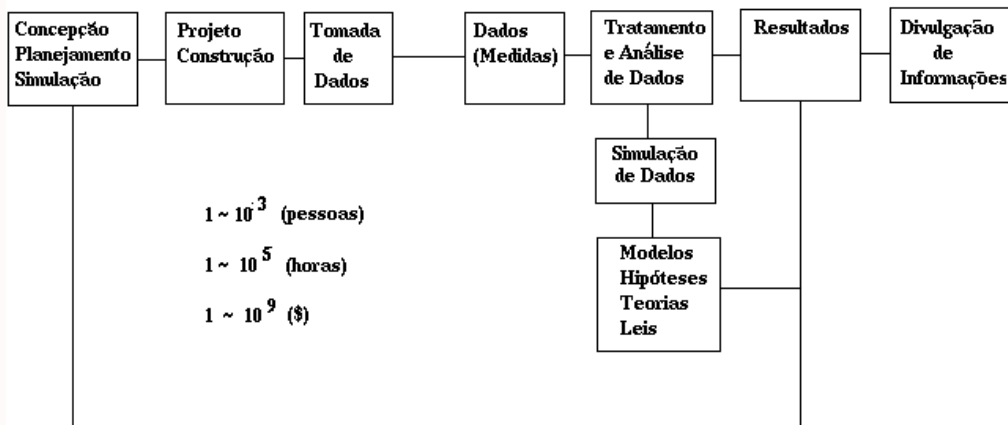


Figura 1: Diagrama de um experimento genérico em Física.

2. Apresentação e descrição de dados

Iniciaremos apresentando exemplos de dados colhidos em turmas que passaram pelo curso de Física do Instituto de Física da UERJ (IF–UERJ).

2.1. Tabelas

Das turmas de Física Geral da UERJ, do 2º semestre de 2001, foram coletadas as seguintes idades (anos), massas (kg) e alturas (cm), correspondentes a 72 alunos, apresentadas⁴ na Tab. 1.

Por outro lado, alguns desses alunos mediram os comprimentos de 30 bancadas distintas do laboratório de Mecânica e encontraram o conjunto de dados listados, em cm, na Tab. 2.

Do modo que esses dados estão apresentados, em *estado bruto* ou *dados brutos*, torna-se difícil a caracterização desses conjuntos. Como identificar, por exemplo, as faixas de maiores incidências de idades, massas ou alturas? Existem grandes variações de valores com relação às faixas de maiores incidências? As mesas apresentam comprimento uniforme?

O primeiro passo para uma apresentação sistemática é a *tabulação ordenada e agrupada* de acordo com o *número de ocorrências de um determinado valor*

⁴ Nota: os dados numéricos estão apresentados do modo como foram recolhidos.

ou com a quantidade de dados (*freqüências*) contidos em certos intervalos de valores (*classes*).

Desse modo, os comprimentos das mesas podem ser apresentados em uma *tabela de freqüências*⁵, como a Tab. 3.

À função que fornece o número de dados em cada classe de um conjunto ordenado de dados e agrupado por classes denomina-se *distribuição de freqüência*. Convém destacar que a distribuição de freqüência depende da escolha das classes.

2.2. Histogramas

A maneira pela qual se pode, por simples visualização, perceber o comportamento global de uma distribuição de freqüência é por meio de um *histograma*.

Assim, as distribuições de freqüências associadas aos subconjuntos: das idades, das massas e das alturas dos alunos das turmas de Física Geral da UERJ, do 2º semestre de 2001, segundo classes pré-definidas, podem ser representadas como nas Tabs. 4, 5, 6, ou, graficamente, pelo histograma correspondente ao lado.

⁵ Por *convenção*, o valor extremo superior de uma classe não é incluído nesta classe, isto é, as classes são consideradas intervalos fechados à esquerda e abertos à direita. Por exemplo, a classe $149 \vdash 150$ é equivalente a $[148, 150)$.

Desse modo, nota-se claramente que (do histograma referente à Tab. 4) a idade mais comum é em torno dos 20 anos, que (do histograma referente à Tab. 5) o peso da maioria dos alunos encontra-se no intervalo de (60 a 70) kg e que (do histograma referente à Tab. 6) existem três grupos de alturas, em torno de (165, 175 e 180) cm.

No caso do comprimento das mesas, a distribuição das medidas é mais bem visualizada em um histograma do tipo setorial (associado à Tab. 7), a partir do qual, pode-se estimar que o comprimento de cerca de 55 % das mesas encontra-se no intervalo de [150, 151).

- **Classes:** intervalos de valores ou qualificações nos quais os dados de uma coleção são agrupados.
- **Histograma:** representação gráfica de uma distribuição de frequência nas classes de agrupamento de uma coleção de dados.

Uma vez que o tamanho do intervalo que define uma classe é quem determina a frequência da classe, sua escolha depende de um compromisso. Se o

intervalo de classes for muito pequeno, haverá grandes flutuações nas frequências. Por outro lado, para grandes intervalos de classes perdem-se detalhes⁶ da distribuição de frequências.

⁶ As classes de um histograma não precisam ser uniformes, *i.e.*, não precisam ter a mesma amplitude. Mas, se as classes forem uniformes e as alturas proporcionais às frequências correspondentes, pode-se interpretar a área delimitada pelos limites de uma como sendo proporcional à probabilidade de ocorrência dos dados na classe considerada.

Para que essa interpretação possa ser sempre mantida, é conveniente que se considere essa proporcionalidade quando se consideram classes não-uniformes, de modo que, se duas classes vizinhas passam a ser consideradas como uma nova classe, a nova área delimitada deve ser igual à área total delimitada pelas duas classes originais.

37	88	183	21	75	175	27	66	172	19	57	172
21	90	183	34	68	159	20	65	177	20	54	165
21	83	180	18	67	167	18	68	170	17	70	168
19	75	175	33	86	180	21	63	179	21	61	164
21	82	184	20	60	177	26	64	173	19	62	172
23	50	165	24	95	174	20	88	163	25	127	185
25	83	180	25	80	181	24	66	172	20	70	180
20	82	181	21	93	191	18	68	168	20	63	184
18	68,5	173	37	72	183	20	68	168	21	55,5	172
18	80	177	20	58	171	21	60	164	19	58	167
19	65	176	25	47,5	160	21	74	175	18	67	177
19	78,5	180	19	51,5	166	22	63	179	20	52	160
20	72,1	172	19	75	175	25	63	172	18	70	175
22	84	182	22	66	167	21	82	184	23	98	178
20	67	169	19	64	161	17	58	163	19	83,4	181
19	97	182	18	62	164	19	70	176	22	85	179
21	60	177	22	80	185	20	71	175	19	75	174
19	60	170	20	82	181	18	110	183	19	61	180

Tabela 1: *Idades (anos), massas (kg) e alturas (cm) de 72 alunos calouros do IF-UERJ de 2001–2.*

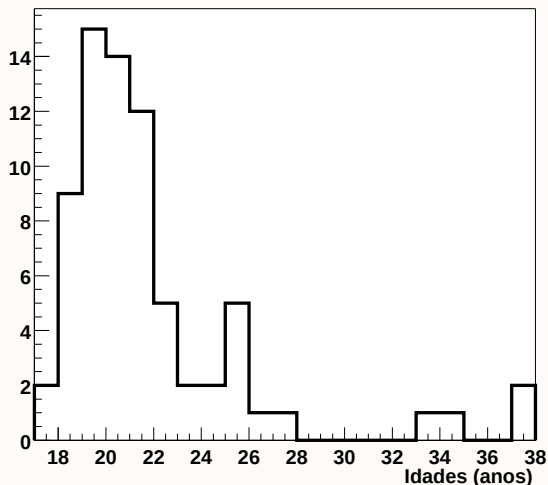
150,3	150,1	149,9	150,2	150,1	150,1
150,2	150,1	150,4	151,0	151,1	150,0
150,1	151,0	149,9	149,7	150,2	149,2
151,5	150,1	149,9	149,2	149,9	150,2
151,0	151,0	150,3	150,0	150,0	150,0

Tabela 2: Comprimentos de bancadas do laboratório de Mecânica do IF-UERJ, em centímetros (cm).

classes de comprimento (cm)	frequências
149 – 150	7
150 – 151	17
151 – 152	6
Total:	30

Tabela 3: Quadro de distribuição de frequência dos comprimentos das bancadas medidos pelos calouros de 2001–2 do IF-UERJ.

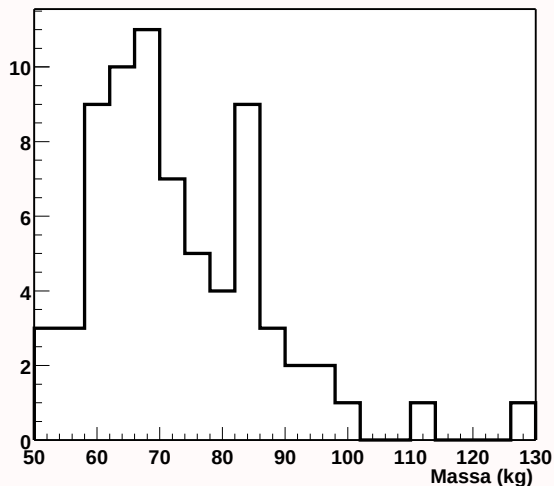
idades (anos)	freqüências
17 ┆ 18	2
18 ┆ 19	9
19 ┆ 20	15
20 ┆ 21	14
21 ┆ 22	12
22 ┆ 23	5
23 ┆ 24	2
24 ┆ 25	2
25 ┆ 26	5
26 ┆ 27	1
27 ┆ 28	1
28 ┆ 29	0
29 ┆ 30	0
30 ┆ 31	0
31 ┆ 32	0
32 ┆ 33	0
33 ┆ 34	1
34 ┆ 35	1
35 ┆ 36	0
36 ┆ 37	0
37 ┆ 38	2
total	72



Histograma associado à Tab. 4

Tabela 4: Distribuição de freqüência das idades dos calouros do IF-UERJ de 2001-2.

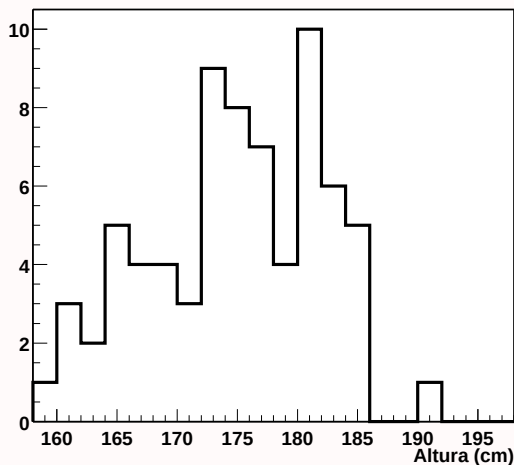
massas (kg)	freqüências
50 ─ 54	3
54 ─ 58	3
58 ─ 62	9
62 ─ 66	10
66 ─ 70	11
70 ─ 74	7
74 ─ 78	5
78 ─ 82	4
82 ─ 86	9
86 ─ 90	3
90 ─ 94	2
94 ─ 98	2
98 ─ 102	1
102 ─ 130	2
total	72



Histograma associado à Tab.5.

Tabela 5: Distribuição de freqüência das massas dos calouros do IF-UERJ de 2001-2.

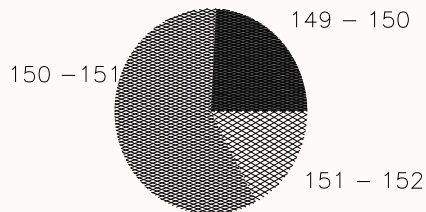
alturas (cm)	freqüências
158 ─ 160	1
160 ─ 162	3
162 ─ 164	2
164 ─ 166	5
166 ─ 168	4
168 ─ 170	4
170 ─ 172	3
172 ─ 174	9
174 ─ 176	8
176 ─ 178	7
178 ─ 180	4
180 ─ 182	10
182 ─ 184	6
184 ─ 186	5
186 ─ 192	1
total	72



Histograma associado à Tab. 6.

Tabela 6: Distribuição de freqüência das alturas dos calouros do IF-UERJ de 2001-2.

comprimento (cm)	freqüência
149 – 150	7
150 – 151	17
151 – 152	6
total	30



Histograma setorial
associado à Tab. 7.

Tabela 7: Distribuição de freqüência dos comprimentos das bancadas do laboratório de Mecânica do IF-UERJ.

2.3. Parâmetros de posição

Todas as constatações retiradas das seções 2.1 e 2.2, como a idade mais comum, o intervalo de massa da maioria ou a altura média de um grupo, podem ser quantificadas por meio do cálculo de medidas que caracterizam os valores em torno dos quais esses dados se distribuem, ou seja, pelos chamados *parâmetros de posição central*.

Seja uma coleção de N dados numéricos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$, que pode ser representada também por $\{x_i \mid i = 1 \dots N\}$. Definiremos sucintamente, a seguir, os parâmetros mais úteis para essa avaliação.

Média Aritmética ($\bar{x}$): valor médio representativo dos dados de uma coleção:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Média Quadrática ($\overline{x^2}$): valor médio dos quadrados dos dados de uma coleção:

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$$

Valor eficaz⁷ (x_{rms}): raiz da média quadrática:

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{x^2}$$

Moda (x_{mod}): valor mais freqüente⁸ em uma coleção de dados.

Mediana⁹ (x_{med}): valor que divide a distribuição ordenada de dados da amostra, tal que metade dos dados estão acima e metade abaixo desse valor¹⁰.

$$N(\text{ímpar}) \implies x_{\text{med}} = x_{(N+1)/2}$$

$$N(\text{par}) \implies x_{\text{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2)+1}}{2}$$

⁷ A abreviação baseia-se no inglês: *root mean square*.

⁸ Se houver mais de um valor com a mesma *freqüência máxima*, diz-se que a coleção de dados é *multimodal*, sendo a moda igual ao conjunto de dados da amostra que correspondem a mesma freqüência máxima.

⁹ Não se deve confundir, por exemplo, as notações x_i e x_{med} ; a primeira indica um valor do conjunto de dados, a segunda o valor de um parâmetro (a mediana) para esse conjunto de dados.

¹⁰ Por exemplo, dada a distribuição $x = (1, 40, 2, 1, 3)$, a mediana é facilmente obtida pela distribuição ordenada $y = (1, 1, 2, 3, 40)$, assim $x_{\text{med}} = 2$; no caso da distribuição $z = (1, 2, 3, 40)$, a mediana é $z_{\text{med}} = (2+3)/2 = 2,5$.

Aproximação da média Se os dados estão agrupados em M classes (histogramas), se y_k é o ponto médio da classe $[b_k, b_{k+1})$ e v_k é a frequência na classe, então a média pode ser *aproximada* por: ¹¹

$$\bar{x} \approx \frac{v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_M y_M}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M v_j y_j$$

A expressão à direita se aproxima da “média dos dados brutos” conforme aumenta o número de classes.

Do ponto de vista descritivo, quanto menor o intervalo de variação dos dados, ou seja, quanto menor o grau de dispersão, esses parâmetros de posição são as quantidades que melhor caracterizam ou resumem a totalidade das informações contidas num conjunto de dados.

¹¹ Uma vez que os cálculos dos parâmetros associados a um conjunto de dados dependem de seus agrupamentos, tanto histogramas quanto tabelas de frequências por classes só devem ser utilizados para a organização ou visualização da distribuição dos dados. Quaisquer estimativas de parâmetros devem ser efetuadas, sempre que possível, a partir dos dados brutos.

2.4. Parâmetros de dispersão

Seja uma coleção de N dados numéricos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$. A variabilidade, ou a dispersão, desses dados pode ser avaliada por:

Amplitude (A): diferença entre os valores máximo e mínimo¹² do conjunto de dados.

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

Desvio Médio Absoluto ($\overline{|\delta x|}$): média dos módulos dos **desvios** $\delta x_i = (x_i - \bar{x})$ em relação à média.

$$\begin{aligned}\overline{|\delta x|} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta x_i| = \sum_{i=1}^N \frac{|x_i - \bar{x}|}{N} \\ &= \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N}\end{aligned}$$

¹² Note-se que a amplitude é sempre positiva.

Variância (σ_x^2): média quadrática dos desvios em relação à média, rigorosamente chamado de variância em relação à média.

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N} \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}\end{aligned}$$

A *variância* pode ser calculada também por: ¹³

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right]^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

¹³ Com efeito:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N (x_i^2) - 2\bar{x} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + \sum_{i=1}^N \bar{x}^2 \right\} = \left\{ \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + \frac{N}{N} \bar{x}^2 \right\} \\ &= \overline{x^2} - \bar{x}^2\end{aligned}$$

Note-se que para grandezas físicas a variância é uma grandeza cuja dimensão física é igual ao quadrado da dimensão das amostras a que está associada, por exemplo, se as amostras correspondem a intervalos de tempo, a variância dessa amostra será o quadrado de intervalo de tempo.

Desvio-padrão (σ_x): medida de dispersão mais utilizada na Física para estimativas de erro; igual à raiz quadrada (positiva) da variância e, portanto, na mesma unidade dos valores dos dados associados as medidas de uma grandeza.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}} \\ &= \sqrt{x^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\sigma_x^2}\end{aligned}$$

Largura a meia altura¹⁴ (Γ): intervalo limitado por valores (por dados) correspondentes à metade da frequência máxima ($f_{\max}$). Medida de dispersão amplamente utilizada com distribuições para as quais o desvio-padrão não pode ser calculado (Fig. 2), como as que ocorrem em estudos que envolvem fenômenos de ressonância.

¹⁴ Em inglês: *full width at half maximum* – FWHM.

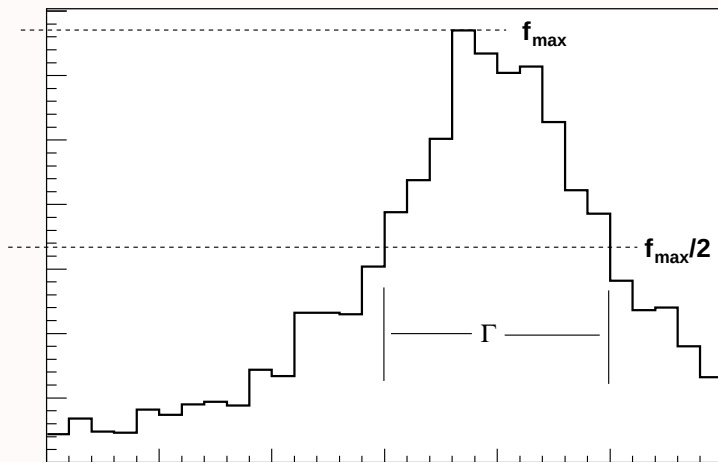


Figura 2: Curva de ressonância ou distribuição de Breit-Wigner, ilustrando a *largura a meia altura* Γ .

Exemplo de resumo de dados

Além das tabelas de frequências e dos histogramas, os dados referentes as idades, massas e alturas de uma amostra de 72 alunos das turmas de Física Geral da UERJ, no 2º semestre de 2001, podem ser apresentados e sintetizados na Tab. 8, em função dos parâmetros de posição e de dispersão. Sempre que se trabalha com dados é oportuno que se faça uma tabela em que se resumam os parâmetros (estatísticos) de posição (valores máximos e mínimos, média aritmética, valor eficaz, *etc.*) e de dispersão (amplitude, variância, desvio-padrão, desvio médio absoluto, *etc.*).

Parâmetros Estatísticos	Idade (anos)	Massa (kg)	Altura (cm)
Valor Máximo	37	127,0	191
Valor Mínimo	17	47,5	159
Média Aritmética	21,3	72,0	174,3
Valor eficaz	21,7	73,4	174,5
Mediana	20	68,3	175
Amplitude	20	79,5	32
Variância	16,6	201,3	52,7
Desvio-padrão	4,1	14,2	7,3
Desvio Médio Absoluto	2,7	11,0	6,0

Número de alunos da amostra: 72

Tabela 8: Resumo dos dados referentes às turmas de Física Geral (2001–2).

Exercícios

Exercício 2.1. Determine a média, a moda, a mediana, o desvio médio absoluto e o desvio-padrão para cada conjunto numérico abaixo.

- (a) 34, 29, 26, 37 e 31
- (b) 34, 29, 26, 37, 31 e 34
- (c) 5, 8, 12, 3 e 9
- (d) 3, 6, 4, 7, 9 e 8
- (e) 14, 19, 16, 21, 18, 19, 24, 15 e 19
- (f) 6, 7, 7, 3, 8, 5, 3 e 9
- (g) 5, 6, 8, 8, 5, 9, 9, 9, 9, 10 e 11
- (h) 500, 600, 800, 800, 500, 900, 900, 900, 900, 1000 e 1100

Exercício 2.2. Com relação aos 80 números abaixo:

90	90	79	84	78	91	88	90	85	80
88	55	73	79	78	79	67	83	68	60
73	79	69	74	76	68	72	72	75	60
61	66	66	54	71	67	75	49	51	57
62	64	68	58	56	79	63	68	64	51
58	53	65	57	59	65	48	54	55	40
49	42	36	46	40	37	53	48	44	43
35	39	30	41	41	22	28	36	39	51

- Represente-os em um histograma (escolha o intervalo que julgar mais conveniente para os representar).
- Determine a média, a moda e a mediana, a partir dos dados brutos e dos que foram agrupados em classes para a construção do histograma.
- Calcule o desvio-padrão (σ) e a largura a meia altura (Γ).

Exercício 2.3. A tabela abaixo apresenta as idades (anos) de 24 alunos de uma turma.

19,0	18,7	19,3	18,9	19,0	20,2	19,9	18,6
19,4	19,3	18,8	19,3	19,2	18,7	18,5	18,6
19,7	19,9	20,0	19,5	19,4	19,6	20,0	18,9

- (a) Calcule a média e o desvio-padrão.
- (b) Inclua a idade do professor, de 49,6 anos, e recalcule os parâmetros.

2.5. Parâmetros de correlação

Em algumas situações, a variação dos dados associados a uma grandeza parecem acompanhar a variação dos dados correspondentes a uma outra grandeza. Por exemplo, aqueles que têm altura acima da média tendem, também, a superar a média da massa. Nesses casos, diz-se que existe uma forte **correlação** entre as grandezas ou variáveis comparadas.

A relação existente entre os valores ou medidas de um par de variáveis ou grandezas associadas a um mesmo conjunto ou sistema físico pode ser globalmente percebida e visualizada através dos chamados **diagramas de dispersão**.

Assim, as comparações entre idade $\times$ altura, idade $\times$ massa e altura $\times$ massa, dos alunos das turmas de Física Geral da UERJ, do 2º semestre de 2001, observadas nos diagramas da Fig. 3, mostram que parece existir uma maior correlação (mais robusta) entre a massa e a altura do que entre quaisquer das outras comparações.

A interdependência de duas coleções de dados pode ser *quantificada*, por exemplo, pela *covariância* (Sec. 2.5.1) e pelo *coeficiente de correlação linear* de Pearson, parâmetros que serão definidos a seguir.

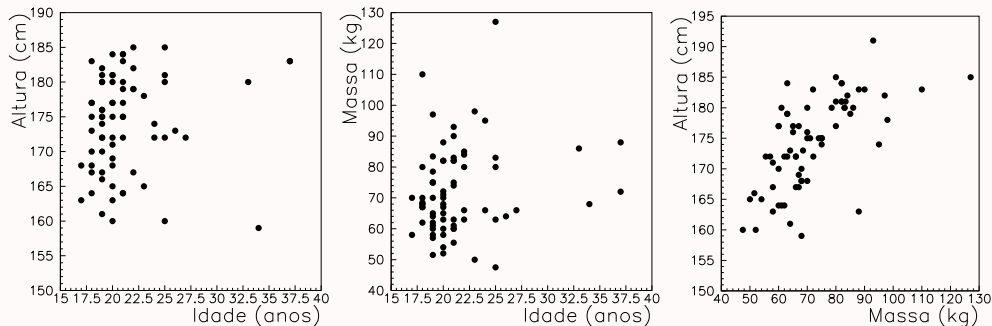


Figura 3: *Diagramas de dispersão* de dados das turmas de Física Geral 2001–2 (Tab. 1).

2.5.1. Covariância

A *covariância* (σ_{xy}) entre N pares (x_i, y_i) de medidas das grandezas x e y , associadas (correspondentes) ao mesmo elemento de um conjunto ou sistema físico, como, por exemplo, a idade e a altura de cada aluno de uma turma rotulado pelo índice i (aluno i), é definida como a média dos produtos dos respectivos desvios (δx_i e δy_i), isto é,

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} [(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \overline{\delta x \delta y}\end{aligned}$$

A covariância pode ser calculada também por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \bar{y}$$

2.5.1.1. Análise do sinal da covariância De acordo com as respectivas expressões, se os valores acima ou abaixo das respectivas médias têm tendência a ocorrer concomitantemente, os respectivos desvios possuem o mesmo sinal para todos os pares e, portanto, a covariância resultante será positiva (**correlação positiva**). Se, ao invés disso, nos pares, os maiores valores de uma das grandezas estão associados aos menores valores da outra, os respectivos desvios terão sinais distintos e, portanto, a covariância resultante será negativa (**correlação negativa**).

Se as medidas das grandezas, num dado intervalo, são tais que ocorram tanto produtos de desvios negativos quanto positivos, a covariância resultante

poderá ser nula nesse intervalo. Nesses casos, diz-se que as *grandezas* são *não-correlatas*.

2.5.2. Coeficiente de correlação linear de Pearson

O **coeficiente de correlação linear de Pearson**, ou abreviadamente *coeficiente de correlação* r , entre N pares (x_i, y_i) de medidas correspondentes às grandezas x e y é um parâmetro adimensional de intervalo de variação entre -1 e $+1$, definido por

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (-1 \leq r \leq 1)$$

Se o diagrama de dispersão das duas grandezas x e y indica uma forte correlação (positiva ou negativa), que, a grosso modo, também sugere uma relação linear entre essas grandezas, correlacionando aproximadamente cada uma das N medidas x_i de x com a correspondente medida y_i de y por

$$y_i = a x_i + b$$

então¹⁵ a covariância σ_{xy} pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= a \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N} = a \sigma_x^2 = \frac{a}{|a|} \sigma_x \sqrt{a^2 \sigma_x^2} \\ &= \frac{a}{|a|} \sigma_x \sqrt{a^2 \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \frac{a}{|a|} \sigma_x \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N}} \\ &= \frac{a}{|a|} \sigma_x \sigma_y\end{aligned}$$

ou seja, o módulo do coeficiente de correlação (r) é igual à unidade (1) quando os pontos (x_i, y_i) estão *exatamente* alinhados.

Desse modo, quanto mais robusta a *correlação linear*, mais próximo da unidade é o valor do coeficiente de correlação, e uma *correlação* é dita *linear, perfeita e positiva* quando $r=1$ e *linear, perfeita e negativa* quando $r=-1$.

O *coeficiente de Pearson* quantifica o grau de linearidade de uma distribuição de dados mostrado em um diagrama de dispersão.

¹⁵ Se $a \neq 0$, caso em que $\sigma_y = 0$ e $\sigma_{xy} = 0$ e o coeficiente de correlação linear não está definido.

Com relação aos 72 alunos das turmas de Física Geral de 2001–2, a tabela das covariâncias e dos coeficientes de correlações associados aos *diagramas de dispersão* entre idade×altura, idade×massa e altura×massa (Tab. 9), mostra que, de fato, a correlação mais forte, nesse grupo de alunos, é entre a massa e a altura.

grandezas $x \times y$	covariância σ_{xy}	coeficiente de correlação r
idade×altura	4,18 ano×cm	0,1435
idade×massa	9,90 ano×kg	0,1739
massa×altura	64,77 kg×cm	0,6377

Tabela 9: Correlações e variâncias dos pares de grandezas da Tab. 1 e diagramas da Fig. 3.

É importante notar que a *covariância nula entre dois conjuntos de dados não implica a independência entre esses dados*. O coeficiente de correlação linear de Pearson quantifica apenas correlações lineares. Ele pode ser nulo e, ainda, existir uma correlação não-linear (curvilínea) entre duas grandezas.

Se o diagrama de dispersão das medidas de duas grandezas apresentar duas partes distinguíveis, uma com forte correlação positiva e outra com forte

correlação negativa, a correlação global dos dados pode ser nula. Ou seja, a covariância nula é uma condição necessária, mas não suficiente, para a independência entre dois conjuntos de dados. Do mesmo modo, uma covariância não-nula, ou correlação robusta¹⁶ entre as medidas de um par de grandezas ou variáveis, não implica a existência de uma relação causal entre elas, ou seja, uma regra de dependência entre as duas grandezas ou variáveis, tal que a variação de uma acarrete, necessariamente, a variação da outra. Por exemplo, a prática de certos esportes como o golfe e o sucesso na vida profissional é apenas “correlacional”, pois a escolha de um determinado *hobby* não acarreta sucesso profissional.

Desse modo, apesar do estudo das correlações ajudar a estabelecer ou descobrir a natureza das relações entre variáveis, uma forte correlação não permite a previsão inexorável do comportamento de uma variável em função de outra, apenas uma previsão do comportamento médio.

¹⁶ O critério para uma correlação robusta é um tanto ou quanto subjetivo, mas dizemos que uma correlação é robusta quanto mais próximo da unidade for o quadrado do coeficiente de correlação linear de Pearson.

2.6. Tópico avançado *

Apresentaremos em seguida como as grandezas definidas anteriormente podem ser obtidas por meio de técnicas matemáticas matriciais. Esse modo de tratar o que estávamos chamando conjunto de dados é compacto e extremamente ágil para cômputo e computação eletrônica, e é uma oportunidade para o uso e aplicação de elementos matemáticos que o estudante está estudando.

2.6.1. Matriz de covariância

Tanto a interdependência entre dois conjuntos $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ de N dados, quanto a variabilidade de cada um dos conjuntos podem ser sintetizados por meio de uma notação matricial, pela chamada *matriz de covariância*.

Inicialmente, definindo-se as *matrizes de dados* $\mathbf{X} = (x_i)$ e $\mathbf{Y} = (y_i)$, como matrizes coluna $N \times 1$ (N linhas e 1 coluna), a covariância pode ser escrita fácil e compactamente. Vejamos.

A média quadrática $\overline{x^2}$ do conjunto de dados $\{x_i\}$ é dada por:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \mathbf{X}^t \mathbf{X} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

onde X^t denota a matriz transposta de X .

Definindo-se a matriz dos desvios da média por

$$\delta X = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_N - \bar{x} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \delta Y = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_N - \bar{y} \end{pmatrix}$$

a covariância $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ pode ser escrita como:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} (\delta X)^t (\delta Y)$$

e as variâncias como:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{xx} = \frac{1}{N} (\delta X)^t (\delta X) \quad \text{e} \quad \sigma_y^2 = \sigma_{yy} = \frac{1}{N} (\delta Y)^t (\delta Y)$$

Assim, a *matriz de covariância* entre dois conjuntos de medidas das grandezas x e y é definida pela matriz simétrica 2×2 :

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Além de possibilitar uma escrita mais sintética de uma grande quantidade de dados, a grande vantagem da notação matricial é a de proporcionar facilmente a generalização dos parâmetros estatísticos a vários conjuntos de dados.

Desse modo, se em vez de apenas dois conjuntos de N dados tivermos M conjuntos $\{z_{1i}\}, \{z_{2i}\} \dots \{z_{Mi}\}$ associados¹⁷ às grandezas $z_1, z_2 \dots z_M$, o primeiro passo é representar cada um dos conjuntos por matrizes colunas $Z_1, Z_2 \dots Z_M$, onde

$$Z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \vdots \\ z_{1N} \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ \vdots \\ z_{2N} \end{pmatrix} \quad \dots \quad Z_M = \begin{pmatrix} z_{M1} \\ z_{M2} \\ \vdots \\ z_{MN} \end{pmatrix}$$

Em seguida, pode-se definir uma matriz de covariância, do tipo $M \times M$, que sintetize as relações de interdependência entre todos os pares das grandezas z :

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{Z_1 Z_1} & \sigma_{Z_1 Z_2} & \dots & \sigma_{Z_1 Z_M} \\ \sigma_{Z_2 Z_1} & \sigma_{Z_2 Z_2} & \dots & \sigma_{Z_2 Z_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Z_M Z_1} & \sigma_{Z_M Z_2} & \dots & \sigma_{Z_M Z_M} \end{pmatrix}$$

¹⁷ Note-se que o primeiro índice está enumerando agora a grandeza e o segundo índice está enumerando a medida dessa grandeza.

onde cada elemento da matriz V , do tipo $M \times M$, é dado por:

$$\sigma_{Z_i Z_j} = \frac{1}{N} (\delta Z_i)^t (\delta Z_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

e

$$\delta Z_i = \begin{pmatrix} z_{i1} - \bar{z}_i \\ x_{i2} - \bar{z}_i \\ \vdots \\ z_{iN} - \bar{z}_i \end{pmatrix}$$

Exercícios

Exercício 2.4. Na tabela abaixo estão representadas as notas de Mecânica e de Eletricidade de 12 alunos de uma turma.

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mecânica	22	48	76	10	22	4	68	44	10	76	14	56
Eletricidade	63	39	61	30	51	44	74	78	55	58	41	69

Esboce o diagrama de dispersão. Determine as médias e os desvios padrão associados a cada disciplina, a covariância e o coeficiente de correlação entre as notas.

Exercício 2.5. Na tabela abaixo estão representadas, em km/h, as velocidades (v) e, em L, as correspondentes quantidades de gasolina (g) consumidas por um mesmo carro em trechos de 100 km de uma estrada.

v	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
g	21	13	10	8	7	5,9	6,3	6,9	7,6	8,3	9	9,9	10,8	11,8

Esboce o diagrama de dispersão. Determine a covariância e o coeficiente de correlação entre a velocidade e o consumo.

3. Estimativas e erros em medidas diretas

Presentes em qualquer *processo de medição*, ou de determinação do *valor esperado* de uma grandeza associado a um fenômeno ou sistema físico, os *erros* caracterizam as *incertezas*¹⁸ inevitáveis devidas ao caráter aleatório do processo ou fenômeno envolvido, imperfeições instrumentais, procedimentos observacionais, condições ambientais ou hipóteses teóricas (modelos teóricos).

3.1. Valor esperado

A primeira questão é: o que é *valor esperado*?

A determinação do comprimento de uma barra com uma régua é um processo aleatório¹⁹ que poderia ser repetido indefinidamente, ao menos hipoteticamente. Desse modo, a distribuição das medidas seria contínua e, o valor esperado para o comprimento da barra, seria o valor médio (média) dessa

¹⁸ Quando se tratam de medidas, o termo “erro” não significa “engano” ou “descuido”. Se pressupõe que os instrumentos de medição foram cuidadosa e adequadamente montados, e que os efeitos (sistemáticos e grosseiros) que não devem participar do processo foram eliminados (minimizados).

¹⁹ Há sempre a incerteza da colocação da régua e da leitura dos extremos que determinam o comprimento, isso com temperatura controlada para que não ocorram dilatações.

distribuição hipotética.

O valor esperado de uma grandeza é um conceito hipotético.

Mesmo sendo hipotético, o valor esperado de uma grandeza pode ser estimado, a partir de um conjunto finito de medidas da grandeza, que constitui uma *amostra da população* dos possíveis (infinitos) valores para essas medidas.

A segunda questão é a incerteza, ou a certeza, que se estima para o valor esperado.

O **resultado da medição** de uma grandeza (associado a uma unidade da mesma) é composto de duas parcelas; uma estimativa para o seu valor esperado, e outra, para o erro associado a essa estimativa.

A terceira questão, conforme se verá, é o nível de confiança com que se estima a medida da grandeza estar no intervalo estimado, ou seja,

RESULTADO DA MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA
estimativa do valor esperado $\pm$ estimativa do erro
(e o correspondente nível de confiança)

A quarta questão é: como estimar cada um desses três aspectos inerentes ao processo de medição.

3.2. Estimativas do valor esperado

Medidas Diretas: valores resultantes de medições de uma mesma grandeza, realizadas por um mesmo experimentador, com o mesmo *instrumento de medição* e sob as mesmas^a condições.

^a Mesmo instrumento significa que o procedimento para coleta de dados é o mesmo (para observadores experientes). No caso de medições automáticas, significa que seguem o mesmo preparo e ajuste dos mesmos dispositivos.

Se a medição de uma grandeza for realizada com instrumentos bem calibrados e com procedimentos cuidadosos, uma hipótese fundamental da teoria estatística

de erros é que, para um número N (*suficientemente grande*) de medidas de uma grandeza, a distribuição experimental de freqüências dos dados (**distribuição amostral**) aproxima-se de uma distribuição tal que a sua média tende ao *valor esperado da grandeza*.

A melhor estimativa para o *valor esperado* de uma grandeza x , a partir de uma amostra $\{x_i\}$ de medidas diretas e cuidadosas, é a *média* $\bar{x}$.

As conclusões e os procedimentos para o tratamento estatístico de medidas podem ser obtidos por um método geral da Estatística, denominado *Método da Máxima Verossimilhança*, de Fisher (1922), a partir de algumas hipóteses sobre as distribuições originais das medidas de grandezas físicas [8, 13, 1, 11, 14, 2, 22, 19, 7].

3.3. Tipos de erros

Uma vez estimado o *valor esperado* de uma grandeza, como quantificar as *incertezas associadas ao processo de medição*? Ou seja, como determinar os *erros*?

As incertezas decorrentes de um processo de medição são classificadas, tradicionalmente, como *aleatórias (estatísticas)* ou *sistemáticas*. Embora a distinção

entre *incerteza aleatória* e *incerteza sistemática* seja um tanto arbitrária, e até certo ponto subjetiva, quando se trata com uma única bateria de medidas, a principal característica para diferenciá-las é que as incertezas *estatísticas* podem ser reduzidas pelo aumento da amostra (*i.e.*, pela repetição de medições), enquanto as incertezas *sistemáticas* não.

Efeito aditivo Um aspecto característico da influência das *incertezas sistemáticas* sobre as medidas de uma grandeza x é que um *efeito aditivo* (de uma parcela a) desloca as medidas individuais (x_i) e a média ($\bar{x}$) desse valor, mas não altera a dispersão (σ_x) do conjunto de medidas,

$$\begin{cases} x_i \mapsto x_i + a \\ \bar{x} \mapsto \bar{x} + a \\ \sigma_x \mapsto \sigma_x \end{cases}$$

uma vez que o termo $(x_i - \bar{x})^2$ é um invariante para incertezas²⁰ sistemáticas aditivas.

²⁰ Incertezas sistemáticas aditivas, em geral, derivam da falta de calibração adequada de um instrumento ou de limitações ou vícios na leitura de uma escala, ou mesmo de má montagem e manuseio dos dispositivos experimentais. Na medição do comprimento de uma barra com uma régua, se forem feitas várias medidas com uma extremidades da régua fixa e deslocada de 0,3 mm, este erro sistemático estaria presente em todos os valores anotados.

Efeito multiplicativo Se o aspecto característico da influência das incertezas sistemáticas sobre as medidas de uma grandeza x é um *efeito multiplicativo* (de um fator c), tanto as medidas individuais (x_i), quanto a média ($\bar{x}$) e o desvio-padrão (σ_x), serão afetados da mesma maneira por esse fator,²¹

$$\begin{cases} x_i \mapsto c x_i \\ \bar{x} \mapsto c \bar{x} \\ \sigma_x \mapsto |c| \sigma_x \end{cases}$$

Exatidão e precisão

Podem ser definidos os seguintes conceitos, relacionados à determinação do valor esperado de uma grandeza:

²¹ Ainda na medida do comprimento de uma barra com uma régua, se a régua e a barra formarem um ângulo θ em todas as medições, teremos o fator $c = \cos \theta$ influenciando todas as anotações.

- **Exatidão** ou **acurácia**: conceito que caracteriza o *afastamento* entre uma estimativa final e o valor esperado de uma grandeza; associado em geral a *efeitos sistemáticos* aditivos, resultantes de imperfeições instrumentais, observacionais ou teóricas, que provocam desvios regulares em todas as medidas.
- **Precisão**: conceito que caracteriza a *dispersão* das medidas de uma grandeza em torno da média; associada em geral a *efeitos aleatórios*, resultantes de flutuações inevitáveis no processo de medição.

Aspectos extremos da dualidade exatidão–precisão estão ilustrados separadamente na Fig. 4, onde as duas distribuições de frequências (a e b) foram obtidas a partir de duas baterias de medidas de uma grandeza x , cujo valor esperado x_0 é supostamente conhecido. Em a , apesar de a média $\bar{x}$ se encontrar mais próxima do valor esperado (maior exatidão), a dispersão em relação à média é maior que em b , diz-se que houve uma maior ocorrência de erros aleatórios, ou menor precisão. Enquanto em b , apesar da maior precisão, o afastamento da média é maior que em a , diz-se que houve uma maior ocorrência de erros sistemáticos, ou menor exatidão.

Um outro exemplo, que ilustra claramente a distinção entre incertezas aleatórias e sistemáticas, pode ser visualizado a partir da analogia de um experimento com uma sucessão de tiros a um alvo (Fig. 5). Tiros certos (medidas

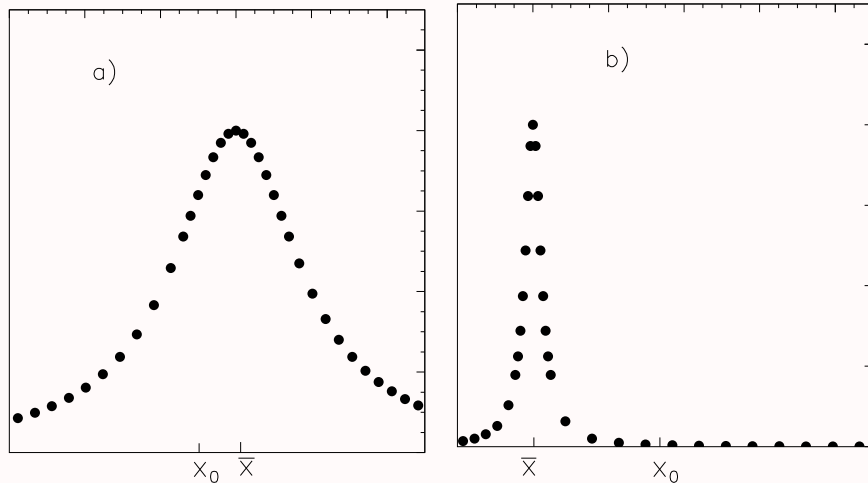


Figura 4: Histogramas das medidas de uma grandeza (x) cujo *valor esperado* é x_0 ;

- a) o efeito de incertezas aleatórias é produzir a dispersão das medidas em torno da média $\bar{x}$;
- b) o efeito de incertezas sistemáticas aditivas é desviar as medidas sem necessariamente produzir dispersão.

acuradas) são marcas (pontos) próximas ao centro do alvo. Erros aleatórios (dispersão dos pontos) são causados por condições ambientais ou descontrole involuntário do atirador. Em duas situações, *a* e *b*, os erros aleatórios são “pequenos” (maior *precisão*), enquanto em *c* e *d* são “grandes”. Quanto aos erros sistemáticos, enquanto em *a* e *c* são “pequenos” (maior *exatidão*), em *b* e *d* são “grandes”.

Esses exemplos, ilustram casos nos quais, além da precisão, a exatidão (incertezas sistemáticas) pode ser avaliada, uma vez que o *alvo* (*valor esperado*) é conhecido *a priori*.

Entretanto, em um grande número de experimentos, como na determinação de uma nova constante física, ou mesmo, simplesmente, de um valor particular para uma grandeza como a massa de um corpo qualquer, não se conhece um valor de referência. Nesses casos, a analogia com a sucessão de tiros é ilustrada, retirando-se o alvo (Fig. 6). Desse modo, pode-se apenas analisar a dispersão dos tiros, e concluir que os erros aleatórios em *a* e *b* são menores do que em *c* e *d*, mas não se pode indicar em qual das situações os erros sistemáticos são menores, ou os tiros foram mais certos. Esse é o cenário para a maioria dos experimentos, implicando que pelo exame das medidas pode-se estimar facilmente os erros aleatórios, mas não os sistemáticos.

Apesar de o valor esperado de uma grandeza ser hipotético, as tabelas de

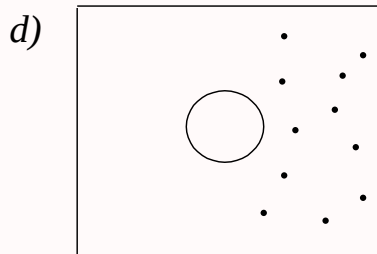
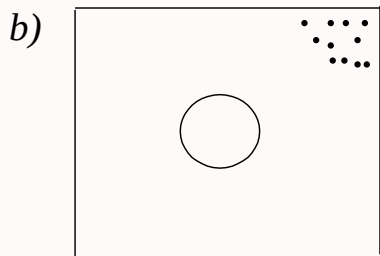
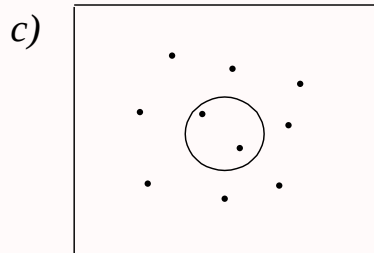
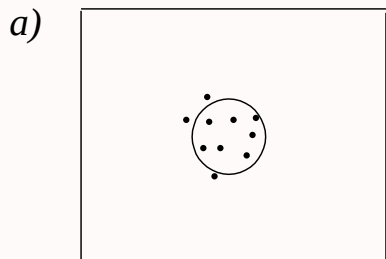
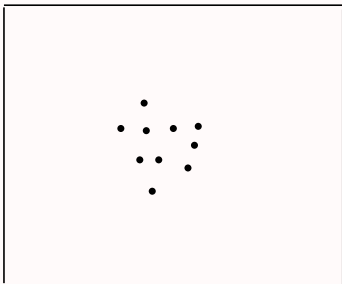
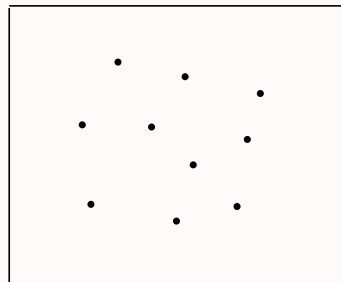


Figura 5: Tiro ao alvo.

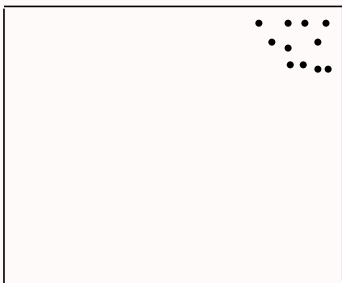
a)



c)



b)



d)

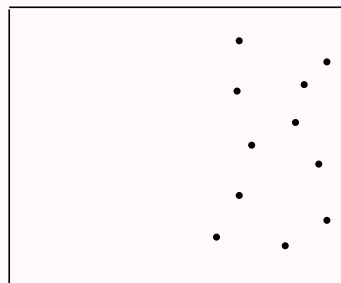


Figura 6: Tiro ao alvo?

constantes físicas apresentam um **valor de referência**²² para cada constante física fundamental²³, tomado como valor esperado e que, geralmente, é um valor teórico adotado por convenção ou provém de um experimento padrão o qual se acredita mais acurado do que qualquer outro similar.

A simples diferença, ou **discrepância**, entre uma média experimental ($\bar{x}$) e um valor de referência (x_{ref}), *i.e.*, $|\bar{x} - x_{\text{ref}}|$, não caracteriza a qualidade ou a correção do resultado de um experimento. A análise dessa discrepância, ou da **compatibilidade** desse valor de referência com os dados, baseia-se na avaliação, tanto das incertezas estatísticas, quanto das sistemáticas associadas à medição ou experimento (§3.10.1).

Não obstante o amplo uso de técnicas estatísticas aplicadas a dados de medidas por vários ramos de aplicação, com interesses científico, técnico, industrial, médico, econômico, militar, *etc.*, a distinção e a determinação de *incertezas aleatórias* e *incertezas sistemáticas* é muito sutil e complexa; somente com um profundo conhecimento de como os dados são obtidos (técnicas de laboratório), vivência, intuição e habilidade é possível a extração e a apresentação de um valor numérico que melhor represente ou estime o valor esperado para uma grandeza associada a um fenômeno ou sistema físico e o correspondente erro associado.

²² Por exemplo, o valor da *velocidade da luz no vácuo* ou da *carga do elétron*.

²³ www.physics.nist.gov/constants.

Sendo essas técnicas estatísticas empregadas em vários ramos de conhecimento, para vários objetos de interesse, com várias técnicas de abordagem, vários “dialetos” eram empregados em ramos distintos, ou mesmo por grupos distintos de um mesmo ramo. Assim, aconteciam situações em que um grupo podia interpretar erroneamente resultados divulgados por outros grupos, fato sempre agravado pelas formas não-normatizadas de como se classificavam e se tratavam as incertezas. Os grupos usavam à sua maneira a “classificação ortodoxa das incertezas”, conforme as denominamos hoje.

Para contornar as limitações e incongruências da classificação ortodoxa de incertezas, enquadradas como aleatórias ou sistemáticas, o *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM), reuniu as mais representativas instituições normativas internacionais para recomendar a normatização aplicável, desde 1993 [19, 3, 20], a todos os ramos de conhecimento que se utilizam de técnicas estatísticas. Essa normatização recomenda que as incertezas sejam simplesmente classificadas como aquelas cujas estimativas são *avaliadas por métodos estatísticos* (**incertezas do tipo A**) e aquelas *avaliadas por outros métodos* (**incertezas do tipo B**).

3.4. Avaliação de erros associados a incertezas do Tipo A

As estimativas de erros por métodos estatísticos, a partir de uma *amostra de medidas diretas* de uma grandeza, baseia-se na hipótese ou constatação que, quando o número de medidas cresce progressivamente, a distribuição de frequências dessas medidas tende à chamada **distribuição normal** (Fig. 7) ou **distribuição de Gauss**, ou ainda **distribuição gaussiana** (Apêndice A).

A pressuposição dessa hipótese, conhecida por **lei dos erros**, foi expressa por Poincaré [23, 8] como: *“Todos acreditam na lei dos erros; o experimentador porque pensa que é uma lei matemática, e o matemático porque pensa que é um fato experimental.”*

Com base na lei dos erros, a característica fundamental de um conjunto $\{x_i\}$ de N medidas de uma grandeza x que se distribuem normalmente com média $\bar{x}$ e desvio-padrão σ_x é que:

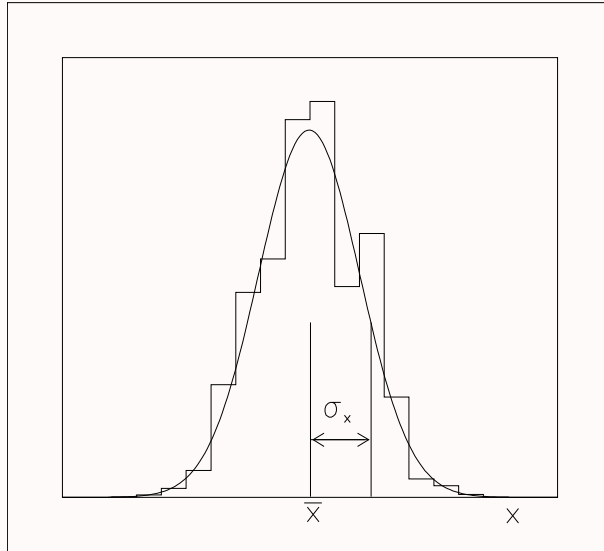


Figura 7: Distribuição das medidas de uma grandeza (x) e a distribuição gaussiana limite (curva contínua).

- 68,3% das medidas estão entre $\bar{x}-1\sigma_x$ e $\bar{x}+1\sigma_x$
- 95,5% das medidas estão entre $\bar{x}-2\sigma_x$ e $\bar{x}+2\sigma_x$
- 99,7% das medidas estão entre $\bar{x}-3\sigma_x$ e $\bar{x}+3\sigma_x$

3.4.1. Erro em medidas individuais

Uma vez que o *desvio-padrão* descreve a dispersão das medidas individuais em torno da média, se caracterizássemos o resultado da medição por uma das medidas da amostra, o desvio-padrão fixaria um *intervalo de variação* ou *incerteza* para essa medida escolhida. Desse modo, esse parâmetro de dispersão é interpretado como uma estimativa para o *erro associado a cada medida*, ou seja:

Uma estimativa para o **erro em cada medida**, a partir de uma amostra $\{x_i\}$ de medidas diretas de uma grandeza x , é o *desvio-padrão* (σ_x).

3.4.2. Erro da média

Outra questão pode ser levantada: qual o erro associado à estimativa do valor esperado? Ou seja, qual o chamado *erro da média*?

Ao se repetir várias vezes o processo de medição, obtendo-se várias amostras de N medidas de uma grandeza x , resultam várias distribuições amostrais (Fig. 8) com médias distintas, mas bem próximas e praticamente com o mesmo desvio-padrão σ_x . Fazendo-se a distribuição das várias médias amostrais ($\bar{x}$) resulta também em uma distribuição normal cuja dispersão é caracterizada por um desvio-padrão muito menor dado por $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$ (Sec. 4.2). Essa é uma boa estimativa para o erro associado a cada *média amostral*,²⁴ ou seja:

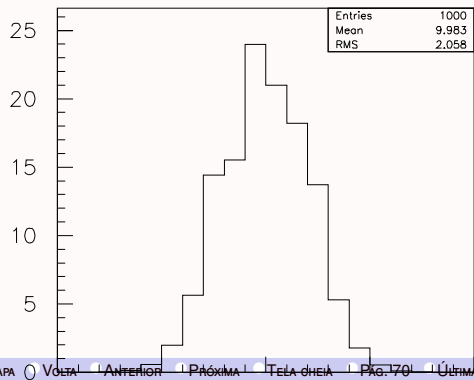
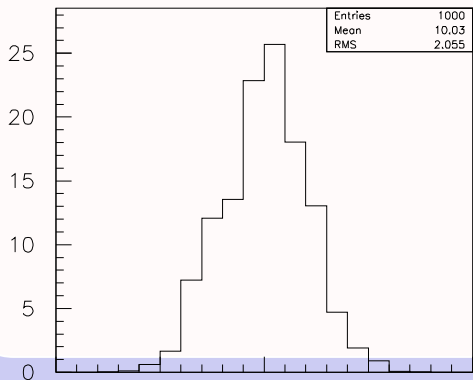
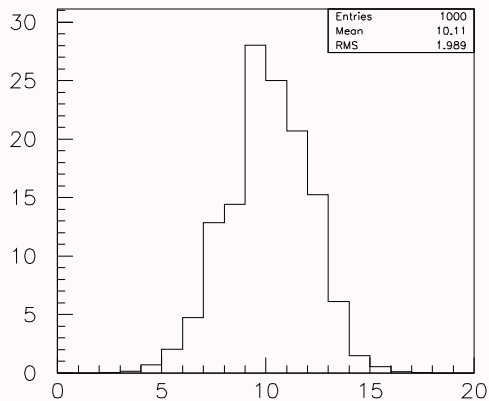
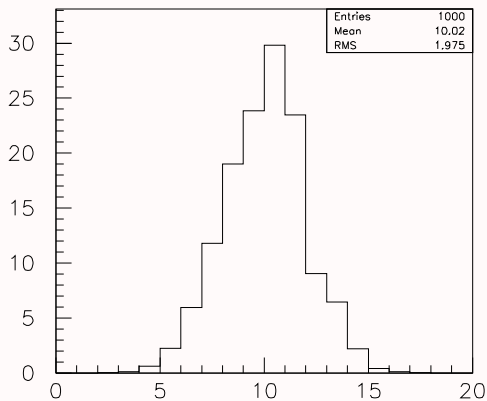
²⁴ Apesar de praticamente constante, a distribuição dos desvios padrão amostrais mostra que a estimativa da incerteza da estimativa do erro em cada medida, ou seja o erro do erro, é dada por $\sigma_x / \sqrt{2N}$ e, portanto, o chamado **erro do erro da média** é dado por $\sigma_{\bar{x}} / \sqrt{2N}$.

Uma estimativa para o **erro na estimativa do valor esperado**, ou seja, para o **erro da média**, a partir de um conjunto de N medidas diretas $\{x_1, x_2, x_3 \dots x_N\}$ de uma grandeza x , com desvio-padrão σ_x , é dada por

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

A redução da incerteza ao estimarmos o valor esperado pela média pode ser observada na distribuição das médias amostrais (Fig. 9).

Pode-se argumentar que ao se aumentar o número (N) de medidas, ou seja, o tamanho da amostra de dados, para um valor arbitrariamente grande ($N \rightarrow \infty$), pode-se reduzir a incerteza na estimativa do valor esperado a níveis arbitrariamente pequenos, ou seja, reduzir o erro da média. Entretanto, a partir de um certo valor, incertezas sistemáticas, associadas ao método de medição ou ao instrumento utilizado, passam a ser dominantes e a determinar a distribuição de valores das medidas. A partir daí, qualquer esforço na tentativa de redução dos erros aleatórios pela repetição é estéril. Ou seja, existe um compromisso entre o número adequado de medidas e os erros sistemáticos.



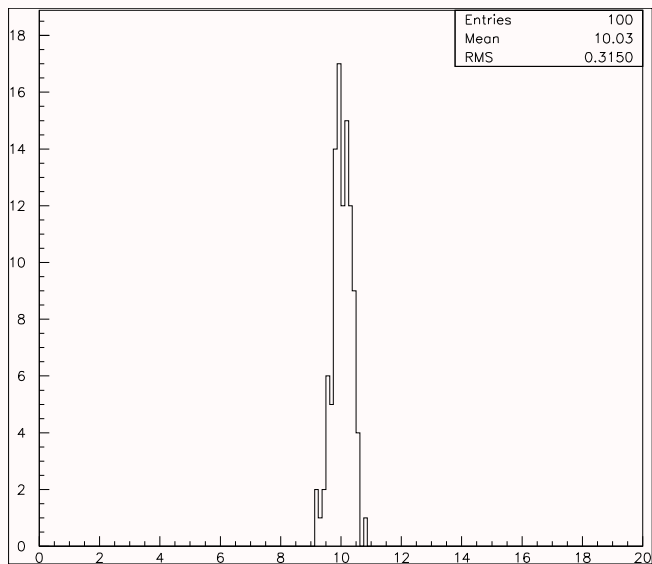


Figura 9: Distribuição das médias amostrais das medidas de uma grandeza x .

3.4.3. Pequenas amostras

Em diversas situações, o conjunto de medidas obtido em uma medição não constitui uma amostra suficientemente ampla para que o desvio-padrão da amostra seja uma boa estimativa do desvio-padrão da população.

Nesses casos, *a melhor estimativa para o erro em cada medida*, a partir de uma amostra de N medidas de uma grandeza x , é dada por²⁵

$$s_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Desse modo, o **resultado da medição** de uma grandeza pode ser enunciado como:

²⁵ Nesse sentido, s_x é chamado de *desvio-padrão experimental* [4]. Em geral, tanto para pequenas quanto para grandes amostras, a estimativa do erro em cada medida é representada simplesmente pelo desvio-padrão σ_x .

A melhor estimativa para o resultado da medição de uma grandeza x , extraído de uma amostra de N medidas diretas, $\{x_1, x_2 \dots x_N\}$, é

$$\boxed{\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{média das medidas})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (\text{erro da média), onde}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (\text{erro em cada medida})$$

A razão $\sigma_{\bar{x}}/|\bar{x}|$, a qual caracteriza a **precisão** de um resultado (não-nulo) é uma indicação da qualidade de uma medição, chamada **erro relativo**, que usualmente é expresso em termos **percentuais**.

Em geral, erros relativos em medidas diretas da ordem de 10% são característicos de experimentos não cuidadosos, enquanto erros relativos da ordem

de 1% ou 2% caracterizam os resultados de experimentos realizados em laboratórios de ensino. Entretanto, há na história da Física vários exemplos de resultados com erros relativos da ordem de 10% ou maiores, que foram importantes para o seu desenvolvimento. O que nos anima a dizer que, mesmo num laboratório de ensino, com equipamentos com pouca resolução ou não devidamente calibrados, muito pode ser aprendido.

3.5. Nível de confiança

Qual o significado estatístico de melhor estimativa?

Do ponto de vista estatístico, o erro associado a uma estimativa define um intervalo de variação ou de incerteza ao qual se pode atribuir um nível probabilístico de confiança.

Considerar que as medidas de uma grandeza x se distribuem normalmente e caracterizar por $\sigma_{\bar{x}}$ o erro na estimativa $\bar{x}$, para o valor esperado da grandeza, significa que o *nível de confiança*²⁶ de que o intervalo $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$ contenha o valor esperado para a grandeza é de 68,3%, ou que esse *intervalo de confiança* é de 68,3%.

²⁶ Em inglês: *confidence level* (CL). Os estatísticos preferem caracterizar as incertezas por *intervalos de confiança*, ao contrário dos físicos, que preferem caracterizá-las como *erros*.

A Tab. 10 mostra alguns intervalos de confiança típicos para uma grandeza x , cujas medidas são distribuídas normalmente, e os correspondentes níveis de confiança.

INTERVALO DE CONFIANÇA	NÍVEL DE CONFIANÇA (CL)
$(\bar{x} - 0,67 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 0,67 \sigma_{\bar{x}})$	50,0%
$(\bar{x} - 1,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,00 \sigma_{\bar{x}})$	68,3%
$(\bar{x} - 1,65 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,65 \sigma_{\bar{x}})$	90,0%
$(\bar{x} - 1,96 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,96 \sigma_{\bar{x}})$	95,0%
$(\bar{x} - 2,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2,00 \sigma_{\bar{x}})$	95,5%
$(\bar{x} - 3,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 3,00 \sigma_{\bar{x}})$	99,7%

Tabela 10: Intervalos de confiança típicos e os correspondentes níveis de confiança.

Assim, pode-se sintetizar a estimativa, por um **intervalo de confiança**, do resultado da medição direta de uma grandeza como:

A partir de uma amostra $\{x_1, x_2 \dots x_N\}$ de N medidas, diretas e independentes, de uma grandeza x , o **nível de confiança** de que o intervalo $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$ contenha o *valor esperado* de x é da ordem de 68%,

$$\text{onde} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}.$$

3.5.1. Graus de liberdade

O número de termos utilizados no cálculo de uma estimativa de incerteza do tipo A é igual ao número N de medidas da amostra. Entretanto, nesse cálculo utiliza-se a média, a qual deriva de uma relação que envolve todas as N medidas e, portanto, o número ν de termos independentes reduz-se a $N-1$. Esse número é chamado número de *graus de liberdade* da distribuição de dados.

Estudando com mais detalhe a distribuição de dados para pequenas amostras, Gosset (1908) determinou que eles não obedeciam à *distribuição de Gauss* e sim, a uma outra, doravante chamada **distribuição de Student** [16]. Essa distribuição não tem o caráter universal da distribuição gaussiana, pois de-

pende do número (N) de medidas ou, explicitamente, do número (ν) de graus de liberdade.

Assim, para se determinar os *níveis de confiança associados a pequenas amostras* pode-se utilizar a Tab. 11, baseada na distribuição de Student [23, 8, 13, 1, 11, 14]. Os números nas colunas abaixo dos níveis de confiança, chamados **t de Student**, são os fatores pelos quais se deve multiplicar o **erro da média** para se obter o intervalo de confiança correspondente ao nível de confiança desejado e ao número de graus de liberdade associado à distribuição de dados.

3.6. Avaliação de erros associados a incertezas do Tipo B

Em alguns casos, o valor de uma grandeza não é estimado a partir de observações repetidas e diretas da grandeza.

Por exemplo, se as flutuações das medidas são menores que a *sensibilidade* (F2) do instrumento de medição utilizado, os erros aleatórios serão menores que os erros instrumentais resultantes. Nesses casos, o ideal seria a utilização de um instrumento com melhor sensibilidade. Mas, em diversos experimentos, como os realizados em laboratórios de Escolas ou de Universidades, isso não é possível e nem factível.

Número (N) de medidas	Número (ν) de graus de liberdade	Nível de confiança		
		68,3 %	95,0 %	99,0 %
2	1	1,84	12,71	63,66
3	2	1,32	4,30	9,92
4	3	1,20	3,18	5,84
5	4	1,14	2,78	4,60
6	5	1,11	2,57	4,03
7	6	1,09	2,45	3,71
8	7	1,08	2,36	3,50
9	8	1,07	2,31	3,36
10	9	1,06	2,26	3,25
15	14	1,04	2,14	2,98
20	19	1,03	2,09	2,86
26	25	1,02	2,06	2,79
∞	∞	1,00	1,96	2,58

Tabela 11: Relação entre números de medidas, graus de liberdade e níveis de confiança, associados à distribuição de Student.

O resultado da leitura de uma medição deve incluir todos os dígitos que o instrumento de medição permite ler diretamente mais um dígito que deve ser estimado pelo observador.

O efeito de uma limitação instrumental pode ser avaliado a partir de um caso extremo, no qual o resultado é dado por uma única medida. Como caracterizar o resultado devido a uma única medida? Qual o *nível de confiança* que se deve atribuir a esse resultado?

A avaliação do erro associado a incertezas do tipo B é baseada em toda informação disponível sobre a variabilidade da estimativa do valor esperado, como propriedades dos materiais envolvidos ou especificações do fabricante do instrumento utilizado. O procedimento, de certo modo semelhante à avaliação dos erros associados a incertezas do tipo A, consiste em admitir que os valores possíveis para as medidas, devido a incertezas do tipo B, obedecem a uma distribuição hipotética²⁷, de acordo com o conhecimento e informação disponíveis sobre a variabilidade das medidas.

²⁷ Em geral, a própria gaussiana, e, em alguns outros casos, a distribuição uniforme ou a distribuição triangular.

3.6.1. Instrumentos analógicos

Por exemplo, em instrumentos ou aparelhos de leitura direta em escala, tais como uma régua metálica, multímetros, cronômetros, termômetros ou osciloscópios analógicos, existe uma **resolução** (Ap. F.2) ou **limite de erro** admissível (L) para leitura, que é igual ao valor nominal da menor divisão de escala do instrumento.

Para instrumentos elétricos, como por exemplo multímetros e osciloscópios, além da leitura, a resolução depende também da sensibilidade do aparelho com relação às variações de tensão ou corrente. Desse modo, a menor divisão de escala só é adotada como limite de erro, se a sensibilidade for menor do que a menor divisão.

No caso de cronômetros, acionados manualmente, a resolução depende também do intervalo de tempo entre um estímulo sensorial e o acionamento do aparelho, ou seja, do *tempo de reação* humano, que é da ordem de $[0,1]$.

É claro que a leitura em escala depende também da resolução do olho humano, que é a capacidade de distinguir dois pontos afastados. Essa resolução é caracterizada pelo ângulo mínimo subtendido pelo olho tal que a distinção seja possível. Esse ângulo, segundo o *critério de Rayleigh* para a difração da luz, é da ordem de $0,008^\circ$ ou $0,00014$ rad, significando uma resolução de $0,028$ mm a uma distância de 20 cm.

Assim, para casos dominados pela simples leitura em uma escala, dependendo da *dimensão real da menor divisão*, se da ordem de milímetro ou centímetro, o limite de erro (resolução) define um intervalo de confiança de 2σ (95 %) ou de 3σ (100 %).

Se a menor divisão da escala, *i.e.*, o comprimento de uma divisão de escala do instrumento (Ap. F.2) for, por exemplo, da ordem de 1 cm, pode-se imaginar que, se o número de medidas fosse “grande”, elas estariam distribuídas normalmente, de tal modo que 100 % delas estariam *flutuando em torno da média* com amplitude igual ao limite de erro. Nesse caso, o limite de erro define um intervalo de confiança de 3σ , correspondente a um nível de confiança de praticamente 100 %.

Usualmente se caracteriza o erro associado a uma única medida (x) de uma grandeza, por um instrumento de leitura em escala, de acordo com a geometria apresentada pela escala.

- Se a menor divisão geométrica da escala for da ordem de 1 cm, caracteriza-se o erro associado a uma única medida por $1/3$ da resolução L , ou seja, expressa-se o resultado por²⁸

$$x \pm L/3$$

²⁸ Para uma escala de tensões elétricas se, por exemplo, $L = 1$ mV, o resultado é expresso como: (valor lido $\pm 0,3$) mV.

- Se a menor divisão geométrica da escala for da ordem de 1 mm, não se pode garantir um nível de confiança de 100% ao intervalo determinado pelo limite de erro; nesses casos, o melhor é admitir simplesmente um nível de confiança de 95%, ou seja, um intervalo de confiança de 2σ , e expressar o erro associado a uma única medida (x) de uma grandeza por metade da resolução L , ou seja, expressa-se o resultado por

$$x \pm L/2$$

Essas estimativas estão associadas a intervalos de confiança da ordem de 68%, e esses erros manifestam-se como efeitos sistemáticos quando se efetua uma série de medidas de uma grandeza com um instrumento de leitura direta em escala.

Em geral, medidas resultantes de leitura em escala direta que não dependem da reação do observador são dominadas pela resolução do instrumento (quando esta é suficientemente pequena, como em escalas em milímetro) e basta que se efetue de maneira cuidadosa apenas uma leitura para a estimativa do valor da grandeza.

Por outro lado, se a leitura da medida de uma grandeza depender da reação do observador e a resolução for muito menor que essa reação, o melhor é realizar várias leituras, nas quais o tempo de observação seja muito maior que o de reação, para se diminuir a incerteza. Por exemplo, no caso da medição

do período de um pêndulo por um cronômetro de resolução da ordem de centésimo de segundo; nesse caso, pode-se medir várias vezes o intervalo de tempo correspondente a dezenas ou centenas de períodos, o valor esperado para o período do pêndulo é estimado pelo valor médio dos períodos e a incerteza como do tipo A pelo desvio-padrão.

3.6.2. Instrumentos digitais

No caso de instrumentos digitais, não há erros devido a leitura, mas podem ocorrer flutuações no último algarismo (X) mostrado. Em geral, adota-se como limite de erro (L_f), com nível de confiança de 100 %, a média entre os algarismos flutuantes máximos e mínimos, ou seja,

$$L_f = \frac{X_{\text{máx}} + X_{\text{min}}}{2}$$

e, como erro, que define um intervalo de confiança da ordem de 68 %, o valor $L_f/3$.

Mesmo nos casos nos quais não há flutuações no último algarismo do mostrador, o fabricante do instrumento fornece um erro instrumental (L_i) como²⁹

$$L_i = a \% (\text{leitura}) + b \text{ dígito (último algarismo)}$$

²⁹ Sem manual, o melhor é admitir a flutuação de um dígito na última casa decimal.

Em geral, não se pode atribuir um nível de confiança de 100 % a essa estimativa e, usualmente, atribui-se um nível de confiança de 95 %, ou seja, um erro, que define um intervalo de confiança da ordem de 68 %, igual a $L_i/2$.

Assim, se uma medida, com um instrumento digital de leitura direta, está afetada pelos dois tipos de erro, o erro final devido aos dois fatores, associado a um intervalo de confiança da ordem de 68 %, poderá ser expresso por

$$\sigma = \sqrt{(L_f/3)^2 + (L_i/2)^2}$$

Duas boas referências para discussões sobre estimativas de erros em instrumentos de leitura direta são de J. H. Vuolo [19] e J. R. Taylor [17].

3.7. Erro padrão

Uma vez determinados os erros dos tipo A e B, σ_A e σ_B , cada qual com nível de confiança da ordem de 68 %, o chamado *erro padrão* da estimativa do valor esperado de uma grandeza pode ser expresso pela combinação em quadratura,

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad \text{ou seja} \quad \sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$$

segundo a recomendação do BIPM [3].

Quando as medições são realizadas com o máximo cuidado por pessoal, processo e métodos qualificados, de modo que se conseguem identificar diversos componentes de incertezas (erros), é preferível reportá-los separada e explicitamente, de forma que quem a utilize possa levá-la à sua conveniência de uso, compondo-as adequadamente, inclusive para o computo de um valor de referência. Desse modo reporta-se o valor mais provável e (mais ou menos) cada componente de incerteza com nível de confiança de 68 %, isto é

$$\bar{x} \pm \sigma_A \pm \sigma_B$$

ou

$$\bar{x} \pm \sigma_{\text{sist}} \pm \sigma_{\text{estat}}$$

do que se pode tirar erro combinado com nível de confiança, por exemplo, de 95 %:

$$u = 2 \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

com o mesmo nível de confiança.

Do ponto de vista prático, dois procedimentos são utilizados em experimentos realizados em laboratórios de ensino:

- as incertezas do tipo B (principalmente instrumentais) são dominantes e a estimativa para o valor de uma grandeza se dá a partir de uma única medida;
- as incertezas do tipo A (aleatórias) são avaliadas e efeitos sistemáticos são procurados apenas quando houver discrepâncias significativas.

Ou seja, de modo mais realístico, apenas quando houver uma discrepância significativa entre uma estimativa e o valor de referência, ou entre duas estimativas distintas, procura-se por possíveis efeitos sistemáticos que causam (ou causaram) tal discrepância.

3.8. Algarismos significativos, arredondamento e modos de expressar medidas

Um aspecto prático na apresentação de um resultado numérico é a determinação do número de algarismos necessários, ou de *algarismos significativos*³⁰ para expressá-lo.

³⁰ Algarismos como os zeros à esquerda de um número distinto de zero, que podem ser suprimidos por uma mudança de unidades, não são significativos.

Os algarismos significativos indicam a precisão de uma estimativa, rigorosamente devem ser determinados pelo erro associado à estimativa³¹, *i.e.*, somente após o cálculo do erro padrão é possível estimar o número de algarismos com que um resultado deve ser expresso.

Em geral, expressa-se o próprio erro padrão por um único algarismo significativo e a estimativa do valor da grandeza até o último algarismo correspondente ao erro³². Por exemplo, se a média obtida a partir de um conjunto de medidas é $\bar{x}=73,64$ cm e o erro é $\sigma_{\bar{x}}=0,2$ cm, o resultado final deve ser expresso por:

$$(73,6 \pm 0,2) \text{ cm}$$

ou seja, com três algarismos significativos.

Uma outra forma de expressar esse resultado é por

$$73,6(2) \text{ cm}$$

Quando dígitos são retirados de um número, o último algarismo significativo restante deve ser arredondado. A regra prática para o *arredondamento* é

³¹ Cujo número de algarismos a ser expresso, por sua vez, para incertezas tipo A, é determinado pelo erro da média.

³² Entretanto, se o primeiro algarismo (não-nulo) do erro for 1, 2 ou 3, pode-se expressar o erro da média com 2 algarismos significativos.

truncar o número até a posição desejada, colocar um ponto decimal em frente dos algarismos retirados, e avaliar a fração resultante:

1. Se a fração for maior que $1/2$, o último algarismo significativo restante é incrementado de um dígito.
2. Se a fração for menor que $1/2$, não há incremento.
3. Se a fração for igual a $1/2$, o último algarismo restante é incrementado apenas se o penúltimo algarismo restante for^a ímpar.

^a Ou se for par, mas a adoção da convenção desse item deve ser respeitada em todo procedimento de avaliação e arredondamento do processo em questão.

3.9. Operação com medidas sem indicação explícita do erro

Uma vez que a análise de erros pode exigir um grande esforço de cálculo e, portanto, um longo período de tempo para a sua realização, freqüentemente,

na prática de laboratório, a análise é adiada para uma ocasião mais propícia, e, para isso, utilizamos algumas regras que permitem a realização de operações rápidas com medidas.

Em alguns casos, a própria incerteza não está explícita, e essas convenções podem ser utilizadas para resolver o problema.

Para estabelecer essas regras pode-se adotar como incerteza de uma medida a variação de um dígito em seu último algarismo significativo.

Por exemplo, a operação $0,91 \times 1,23$ poderia resultar em 1,1 ou 1,1193 ou 1,12. O resultado 1,1 acentua demais o erro devido ao arredondamento pois, cada um dos fatores são conhecidos com incerteza máxima de cerca de 1 %, enquanto ao resultado é atribuída uma incerteza máxima de cerca de 10 %. O valor 1,1193 é de uma pretensa exatidão absurda, pois nem todos os números são realmente significativos. O melhor valor, que mantém a margem de incerteza em 1 % para o resultado, é 1,12.

Assim, como regra prática:

- na multiplicação ou divisão, cada fator pode ser aproximado para ter a mesma precisão que a do fator menos preciso. Por exemplo,

$$2,8 \times 29,4 = 82,32 = 82$$

$$5,3 \div 748 = 0,007088 = 0,0071$$

- na adição ou subtração, como os maiores valores dominam o erro total, o resultado em geral contém, na parte inteira, o mesmo número de algarismos significativos que a maior parcela e, na parte decimal, o mesmo número de algarismos significativos que a parcela com menor parte decimal. Por exemplo,

$$\begin{array}{r} 28,5 \\ +1,87 \\ \hline 30,37 \mapsto 30,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7146 \\ -12,8 \\ \hline 7133,2 \mapsto 7133 \end{array}$$

3.10. Compatibilidade e discrepância

3.10.1. Comparação entre uma estimativa e um valor de referência

Para se avaliar a *compatibilidade* entre uma estimativa $\bar{x}$ do valor de uma grandeza x e um *valor de referência* x_{ref} , deve-se comparar a *discrepância* $|\bar{x} - x_{\text{ref}}|$ com o erro padrão $\sigma_{\bar{x}}$ da estimativa.

De acordo com a lei dos erros, a expectativa de ocorrência de discrepâncias maiores que o erro padrão é cerca de 32%.

Devido a essa expectativa, relativamente alta, não se pode dizer que uma discrepância ligeiramente maior que o erro-padrão não é aceitável, ou que é

significativa. O que se pode dizer é que a estimativa não é compatível com o *valor de referência* ao nível de confiança de cerca de 68%.

Por outro lado, uma discrepância maior que $3\sigma_{\bar{x}}$, com expectativa de cerca de 1%, é muito pouco provável e, assim, a estimativa deve ser rejeitada.

A fronteira entre a *compatibilidade* e a *incompatibilidade*, ou entre a rejeição e não-rejeição depende de um compromisso que, como prática comum, para a maioria dos pesquisadores, estabelece que qualquer discrepância maior do que $3\sigma_{\bar{x}}$ é *inaceitável* e qualificada como *estatisticamente significativa*.

Se a discrepância cai na região entre $2\sigma_{\bar{x}}$ e $3\sigma_{\bar{x}}$, ela é referida, simplesmente, como discrepância significativa, o experimento é dito inconclusivo e deve, se possível, ser repetido com novas técnicas ou maiores cuidados com as medidas.

Assim, como regra usual,

Se a discrepância entre uma estimativa $\bar{x}$ e valor de referência x_{ref} de uma grandeza x é menor que $2\sigma_{\bar{x}}$, ou seja

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}}$$

aceita-se a compatibilidade da estimativa com o valor de referência.

Mesmo baseando-se em métodos estatísticos e probabilísticos, os critérios de decisão não garantem se uma discrepância é fortuita, ou se reflete uma incompatibilidade da estimativa com o valor de referência.

Ao se aceitar a compatibilidade admite-se que a discrepância é casual e, devido a essa decisão, pode-se perder a chance de se estabelecer ou perceber a ocorrência de um fato ou efeito novo responsável pela diferença. Em linguagem estatística, diz-se que poderia haver um³³ *erro do Tipo II*. Por outro lado, ao não se aceitar a compatibilidade, admitindo que a discrepância não foi casual, mas devido a uma causa desconhecida, corre-se o risco de se anunciar uma falsa descoberta, ou de se cometer um *erro do Tipo I*. De modo geral, a ocorrência de um erro do Tipo II é preferível à de Tipo I.

3.10.2. Comparação entre duas estimativas de um valor esperado

O mesmo procedimento pode ser utilizado para compararmos duas estimativas $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ do valor de uma mesma grandeza x , caracterizadas pelos erros padrões $\sigma_{\bar{x}_1}$ e $\sigma_{\bar{x}_2}$.

³³Observação, não há relação com erro tipo A ou B.

- Se os intervalos de confiança de 68 % das estimativas interceptam-se, a compatibilidade está assegurada.
- Se os intervalos são disjuntos, aumenta-se o nível de confiança até que haja a intersecção.
- Intersecções até o nível de 95 %, ou 2σ , são julgadas aceitáveis e acima de 3σ inaceitáveis.

De maneira mais rigorosa, pode-se tentar a *compatibilidade com o zero*, ou seja, compara-se a **discrepância** $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ entre as estimativas com o valor zero, com erro dado pela composição $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$.

Outros aspectos interessantes sobre a compatibilidade entre estimativas, baseados na teoria de probabilidades, são discutidos em Macedo [11] e Taylor [17].

Exemplo de comparação entre resultados

Suponha que a densidade do ferro (Fe), cujo valor de referência é $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$, tenha sido estimada, com nível de confiança de 68%, como $\rho_1 = (8,1 \pm 0,2) \text{ g/cm}^3$.

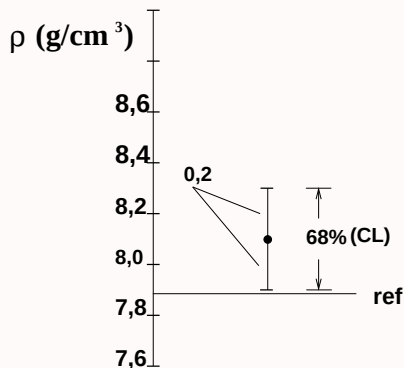


Figura 10: $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_1 = (8,1 \pm 0,2) \text{ g/cm}^3$ com nível de confiança (CL) de 68%.

A discrepância $|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24$, da ordem de 1σ não é significativa

e, portanto, a estimativa é compatível com esse valor de referência (Fig. 10).

Se $\rho_2 = (8,4 \pm 0,1) \text{ g/cm}^3$ é a estimativa de um segundo experimento, também com nível de confiança de 60%, ao se comparar com o valor de referência, constata-se que esse resultado não é compatível ao nível de 95 % (Fig. 11).

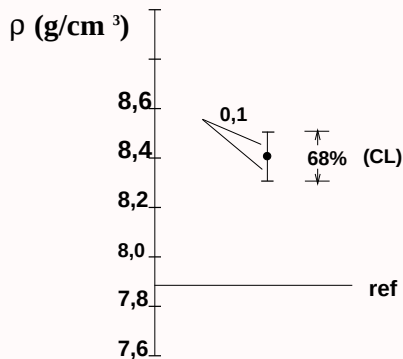


Figura 11: $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_2 = (8,4 \pm 0,1) \text{ g/cm}^3$ com nível de confiança (CL) de 68%.

Entretanto, as duas estimativas ρ_1 e ρ_2 são compatíveis entre si, uma vez

que a compatibilidade com o zero é verificada (Fig. 12).

$$|\rho_1 - \rho_2| = |8,1 - 8,4| = 0,3 \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,2^2} \approx 0,2$$

Por outro lado, calculando-se os erros relativos das duas estimativas,

$$\varepsilon_1 = 0,02 \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = 0,01$$

constata-se que o resultado do segundo experimento é mais preciso que o do primeiro.

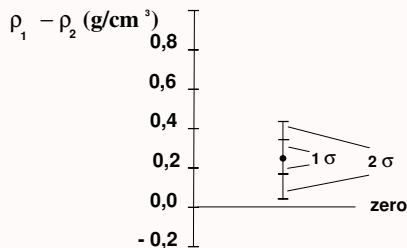


Figura 12: $\rho_1 = (8,1 \pm 0,2) \text{ g/cm}^3$ e $\rho_2 = (8,4 \pm 0,1) \text{ g/cm}^3$ (comparação com o zero).

Na falta de maiores informações sobre os procedimentos experimentais e as análises de erros, uma conclusão acerca da discrepância significativa do resultado $\rho_2 = (8,4 \pm 0,1) \text{ g/cm}^3$ com o valor de referência $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ é que, provavelmente, algum efeito sistemático não identificado ocorreu durante as medições realizadas no experimento.

Exercícios

Exercício 3.1. De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o desvio-padrão são, respectivamente, 23 e 1. Que frações percentuais de leitura espera-se nos seguintes intervalos:

- a) (22 , 24)
- b) (21 , 23)
- c) (24 , 25) .

Exercício 3.2. O conjunto abaixo representa 5 medidas da aceleração da gravidade g (m/s^2).

$$\{ 9,9 ; 9,6 ; 9,5 ; 9,7 ; 9,8 \}$$

Qual a melhor estimativa e a respectiva incerteza para o valor esperado?

Exercício 3.3. O conjunto abaixo representa 5 medidas da carga do elétron (e), em múltiplos de 10^{-19} C.

$$\{ 1,5 ; 1,7 ; 1,8 ; 1,4 ; 1,6 \}$$

Qual a melhor estimativa e a respectiva incerteza para o valor esperado?

Exercício 3.4. Após determinar a velocidade do som em várias baterias de medidas, a dispersão em cada uma das baterias, caracterizada pelo desvio-padrão, foi da ordem de $\sigma_v = 10 \text{ m/s}$. Quantas medidas são necessárias, numa bateria, para que a incerteza na estimativa seja da ordem de 3 m/s ?

Exercício 3.5. Dois experimentos em Física de Altas Energias divulgam a descoberta de uma nova partícula. As massas apresentadas, com nível de confiança de 68 %, são:

$$m_1 = (7,8 \pm 0,2) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_2 = (7,0 \pm 0,3) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Podem esses valores representarem a massa de uma mesma partícula? (argumente estatisticamente)

Exercício 3.6. As medidas da densidade de um líquido (kg/m^3) são:

$$\{1,8 ; 2,0 ; 2,0 ; 1,9 ; 1,8\}$$

- Qual a melhor estimativa para a densidade do líquido?
- Se $1,85 \text{ kg/m}^3$ é o valor de referência para a densidade do líquido, analise a discrepância entre a melhor estimativa e esse valor de referência.

Exercício 3.7. Três grupos de estudantes determinam a carga do elétron, com nível de confiança de 68%, como

$$e_1 = (1,72 \pm 0,04) \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_2 = (1,75 \pm 0,07) \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_3 = (1,62 \pm 0,04) \times 10^{-19} \text{ C}$$

Se o valor de referência para a carga do elétron é $1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$, quais das estimativas são satisfatórias?

Exercício 3.8. Ao se estudar uma reação nuclear, resulta que as energias e os respectivos erros padrões, no início (E_i) e ao final (E_f) do processo, são:

$$E_i = 75 \pm 3 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad E_f = 60 \pm 9 \text{ MeV}$$

A discrepância é significativa?

Exercício 3.9. Um estudante apresenta como estimativa da aceleração gravidade o resultado $(9,5 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$. Se o valor de referência é $9,81 \text{ m/s}^2$, analise esse resultado (estatisticamente).

4. Estimativas e erros em medidas indiretas

Outra espécie de problema de estimação do valor esperado de uma grandeza envolve as chamadas *medidas indiretas*, ou seja, experimentos nos quais as medidas de uma grandeza não são obtidas diretamente de uma escala ou por comparação. O caso mais simples é aquele no qual a estimativa para o valor esperado é determinada a partir das medidas diretas de uma ou mais grandezas, por uma expressão conhecida *a priori*³⁴. Nesse caso, o problema da estimativa do *valor esperado e sua incerteza* é chamado de *propagação de erros*.

Uma variante desse problema é aquela na qual duas grandezas x e y foram diretamente mensuradas, em um amplo domínio de variação, e resultaram numa amostra de N pares (x_i, y_i) de medidas, podem ser relacionadas por uma forma funcional, conhecida *a priori* ou postulada,

$$y = f(x; a_1, a_2 \dots a_p)$$

onde os a_j são p parâmetros, que fixam a dependência entre as grandezas diretamente medidas, e alguns dos quais podem ser estimativas de valores esperados de outras grandezas.³⁵ O problema consiste na determinação dos parâmetros

³⁴ Por uma expressão de definição ou por uma fórmula obtida por meio de uma teoria.

³⁵ Por exemplo, se a relação funcional entre as grandezas x e y for $y = ax + b$, teremos $f(x; a, b) = ax + b$, sendo $p=2$, $a_1 = a$ e $a_2 = b$.

a_j de modo que os valores de y dados pela expressão analítica, $f(x_i; a_1, a_2 \dots a_p)$, aproximem-se das medidas y_i , dentro de certos critérios estatísticos. Essa classe de problemas é denominada de *ajuste de funções*.

4.1. Propagação de erros

Em muitas situações, a determinação de uma grandeza z se dá por um processo indireto, a partir, por exemplo, de um conjunto $\{x_i, y_i\}$ de N medidas diretas de duas grandezas x e y , por uma expressão do tipo $z = f(x, y)$.

4.1.1. Medidas indiretas envolvendo adição

O caso mais simples é aquele no qual a expressão envolve apenas a adição ou subtração das grandezas,

$$z = x + y \quad \text{ou} \quad z = x - y$$

Nesse caso, se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as médias das medidas e $\sigma_{\bar{x}}$ e $\sigma_{\bar{y}}$ os respectivos erros, a melhor estimativa para o valor esperado de u é dada por

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{ou} \quad \bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$$

e o erro da estimativa, se as medidas das grandezas não são correlatas, por³⁶

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$$

ou, mais genericamente, se a correlação for não-nula, por

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 + 2\sigma_{xy}/N}$$

onde σ_{xy} é a covariância entre as medidas de x e y .

4.1.2. Medidas indiretas envolvendo multiplicação

Se a relação que determina a grandeza z , por meio das grandezas x e y , diretamente mensuradas, é dada pelo produto $z = xy$ ou pelo quociente $z = x/y$, a melhor estimativa para o valor esperado ($\bar{z}$) é dada por

$$\bar{z} = \bar{x} \bar{y} \quad \text{ou} \quad \bar{z} = \bar{x}/\bar{y}$$

³⁶ Em particular, se $z = \alpha x$, $\sigma_{\bar{z}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$.

e o erro relativo, se as medidas de x e y não são correlatas, pela soma em quadratura dos respectivos erros relativos,³⁷

$$\frac{\sigma_{\bar{z}}}{|\bar{z}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

Regra mnemônica

Adição ou subtração Como regra mnemônica, a composição de erros para a adição ou subtração de duas grandezas (x e y) não-correlatas obedece ao teorema de Pitágoras, conforme ilustra a Fig. 13a.

Em geral, dependendo do coeficiente de correlação $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$, o erro é dado pelo módulo da diferença entre os vetores de módulos $\sigma_{\bar{x}}$ e $\sigma_{\bar{y}}$, que fazem um ângulo α tal que $\cos \alpha = -r$.

Ou seja, a composição dos erros obedece a lei dos cossenos,

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 - 2\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}\cos\alpha = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 + 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}$$

³⁷ Em particular, se $z = k/x$, onde k é uma constante, $\bar{z} = k/\bar{x}$ e

$$\frac{\sigma_{\bar{z}}}{|\bar{z}|} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} \Rightarrow \sigma_{\bar{z}} = \frac{|k|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Multiplicação ou divisão Para a multiplicação ou divisão, basta substituir os erros absolutos pelos relativos (Fig. 13b).

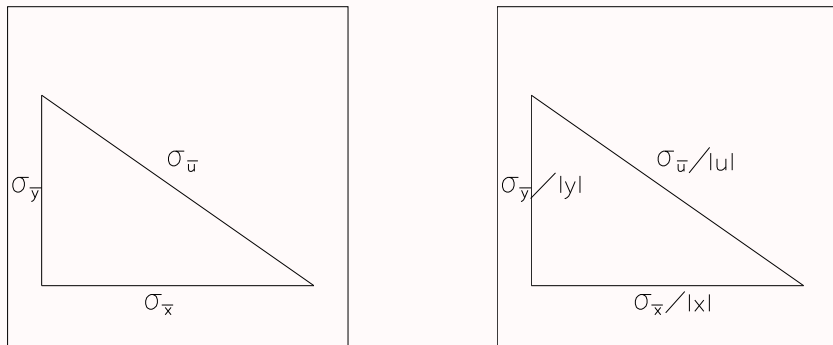


Figura 13: Ilustração da composição de erros que obedecem ao teorema de Pitágoras;

- a) para adição ou subtração,
- b) para multiplicação ou divisão.

Caso mais geral* No caso mais geral onde $z = f(x)$, em que z é resultado da medida indireta de uma única variável x , dado por uma expressão

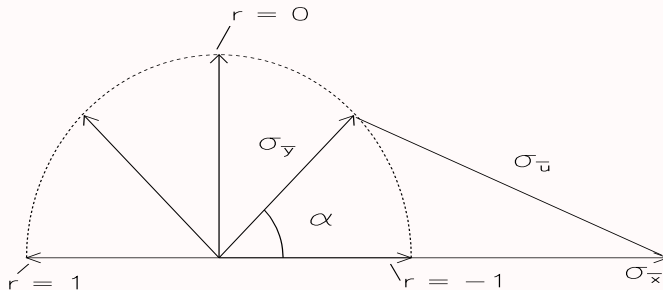


Figura 14: Ilustração da composição de erros obedecendo à lei dos cossenos.

mais complexa do que a relação proporcional a x , o valor esperado é dado por

$$\bar{z} = f(\bar{x})$$

e o erro padrão para uma amostra de N valores de x por³⁸

$$\sigma_{\bar{z}} = \left| \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}} \sigma_{\bar{x}}$$

³⁸Em particular, se $z = x^2$, então $\sigma_{\bar{z}} = 2|\bar{x}| \sigma_{\bar{x}}$ ($|\bar{x}| \neq 0$).

No caso mais geral, onde $z = f(x, y)$ é dada por uma expressão mais complexa, o *valor esperado* de z é dado por

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

e o erro padrão para uma amostra de N pares (x, y) por

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \sigma_{xy}$$

sendo as derivadas consideradas no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Observação Um procedimento alternativo para a estimativa indireta de uma grandeza a partir de medidas diretas de outras grandezas é calcular, através da expressão que a define, um conjunto de valores para a mesma e, a partir desses valores, determinar-se a média e o erro associado, de maneira análoga ao caso das medidas diretas.

4.2. Exemplos de propagação de erros

Alguns exemplos em que podemos utilizar a propagação de erros para determinar *indiretamente* o valor de uma grandeza *em termos de medidas diretas de*

outras grandezas são³⁹:

- Peso (p) de um corpo ao ser pendurado num dinamômetro de constante elástica k e alongá-lo de um comprimento ℓ :

$$p = k \ell \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = k \bar{\ell} \quad \text{e} \quad \boxed{\sigma_p = k \sigma_\ell}$$

- Corrente (I) num resistor (R) no qual a tensão em seus extremos é V :

$$I = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_I = \frac{\sigma_V}{R}}$$

- Período (T) de um pêndulo simples a partir de seu comprimento (l):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{T^2}}{T^2} = \frac{\sigma_l}{l}$$
$$T^2 = T \times T \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{T^2}}{T^2} = 2 \frac{\sigma_T}{T}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_l}{l}}$$

³⁹ Não estaremos indicando valor absoluto quando a grandeza for sabidamente positiva.

- Frequência (f) ou período (T) de um corpo de massa m ao oscilar pendurado em uma mola de constante elástica k :

$$\frac{1}{f} = T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{T^2}}{T^2} = \frac{\sigma_m}{m}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_m}{m} = \frac{\sigma_f}{f}}$$

- Velocidade (v) de uma bilha ao cair a partir do repouso de uma altura (h):

$$v = \sqrt{2gh} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{v^2}}{v^2} = \frac{\sigma_h}{h}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_v}{v} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_h}{h}}$$

- Ângulo de refração (θ_r) da luz ao incidir com ângulo θ_i num meio de índice de refração⁴⁰ n :

⁴⁰ **Nota Avançada** A propagação de erro na determinação do ângulo de refração θ_r da luz

ao incidir com ângulo θ_i num meio de índice de refração n , permite ilustrar a generalização do procedimento para qualquer forma da dependência entre duas grandezas. O problema é avaliar o erro em $y = \sin \theta$ quando a incerteza em θ é conhecida e igual a σ_θ .

Uma vez que, em geral, $\sigma_\theta/\theta \ll 1$, basta que se conheça o comportamento de y num pequeno entorno (vizinhança) de θ_i que pode ser aproximado pela reta cuja inclinação é

$$\frac{dy}{d\theta}, \text{ ou seja, } y = \left[\frac{dy}{d\theta} \right]_{\theta_i} \theta + c^{\text{te}} = \theta \cos \theta_i + c^{\text{te}}$$

Desse modo, o erro propagado será dado por

$$\sigma_y = \sigma_{\sin \theta} = |\cos \theta| \sigma_\theta$$

De maneira geral, se $y = f(x)$, a incerteza propagada de x em y é dada por

$$\sigma_y = \left| \frac{df}{dx} \right| \sigma_x$$

(a derivada sendo calculada para $x = \bar{x}$).

$$n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} \Leftrightarrow \sin \theta_r = \frac{\sin \theta_i}{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\sin \theta_r} = \frac{\cos \theta_i}{n} \sigma_{\theta_i} \\ \sigma_{\sin \theta_r} = \cos \theta_r \sigma_{\theta_r} \end{cases}$$

$$\sigma_{\theta_r} = \frac{1}{n} \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} \sigma_{\theta_i}$$

NOTA: para as incertezas, os ângulos devem ser expressos em *radianos*.

- Comprimento de onda (λ) de luz difratada por um ângulo (θ) em uma rede de difração na qual a distância entre as fendas é d :

$$\lambda = d \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_\lambda = d \sigma_{\sin \theta} = d \cos \theta \sigma_\theta$$

Em todos esses exemplos os valores dos parâmetros (Sec. 4.5) g , k , R , n e d foram considerados como constantes e, portanto, isentos de erros.

4.2.0.1. Erro da média ($\sigma_{\bar{z}}$) A própria estimativa do erro da média ($\sigma_{\bar{z}}$) pode ser derivada da fórmula de propagação, se admitirmos como estimativa do erro em cada medida o desvio-padrão (σ_z) de uma amostra $\{z_i\}$ de N medidas

diretas e independentes.

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_N}{N}$$
$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{\sigma_{z_1}^2}{N^2} + \frac{\sigma_{z_2}^2}{N^2} + \dots + \frac{\sigma_{z_N}^2}{N^2} = N \frac{\sigma_z^2}{N^2} = \frac{\sigma_z^2}{N}$$

$$\sigma_{\bar{z}} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{N}}$$

4.3. Regressão ou ajuste linear

Há casos em que, além de uma forte correlação entre as medidas associadas a um par de grandezas (x, y) , há indícios experimentais ou teóricos, convicção ou intuição de que existe uma *relação de causa e efeito* entre elas, descrita por uma relação funcional $y = f(x)$. A determinação dessa relação de causa e efeito é denominada *ajuste de função*.

Por exemplo, a Tab. 12 e a figura correspondente apresentam os dados levantados para a calibração de uma mola (M), a partir de medições do comprimento l (mm) de sua elongação em função da força F (gf) exercida por *pesos padrões*, realizadas no laboratório de Mecânica do IF-UERJ.

Do ponto de vista estatístico, o problema de estabelecer uma relação entre um par de variáveis correlatas é denominado, por um motivo histórico [6, 16], de *regressão*.

A situação mais simples e imediata, como no caso da mola, é aquela em que o coeficiente de correlação linear (r) entre o par de grandezas (x, y) é bem próximo da unidade e, portanto, a variação de y em função de x pode ser expressa por uma relação linear,

$$y = ax + b$$

onde os parâmetros da reta, os coeficientes angular a e linear b , são estimados por

$$a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

e onde σ_x e σ_y são os desvios padrão das medidas de x e y .

A expressão para o coeficiente linear indica que a reta de regressão sempre passa pelo ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ definido pelas médias $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

A plausibilidade dessas expressões é evidenciada na Fig. 15, onde se nota, claramente, que a inclinação da reta de ajuste depende sensivelmente da dispersão e da correlação dos dados.

As expressões para determinação dos parâmetros a e b podem ser deduzidas a partir do chamado *Método dos Mínimos Quadrados* (Apêndice D). Seu principal

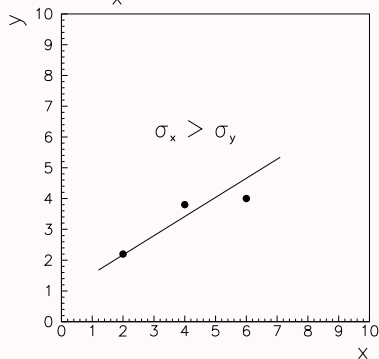
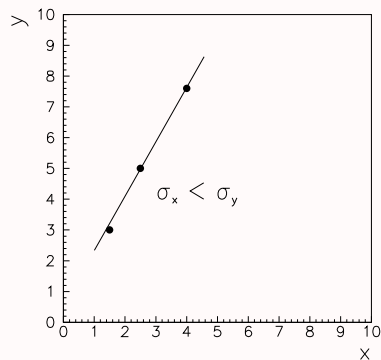
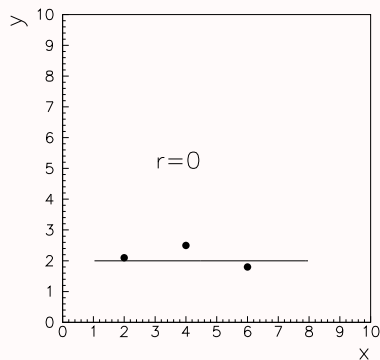


Figura 15: Relação entre a inclinação da reta de ajuste, do coeficiente de correlação e dos desvios padrão.

argumento é que os parâmetros da reta são aqueles que minimizam a soma dos quadrados das distâncias das medidas observadas y_i aos correspondentes valores previstos pela equação da reta $y(x_i) = ax_i + b$, ou seja, pela minimização da quantidade

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2$$

quando as medidas y_i possuem a mesma incerteza.

4.4. Exemplos clássicos de uso de ajuste linear

Deve-se notar que a relação entre as grandezas não precisa ser necessariamente linear. Por exemplo, várias relações podem ser transformadas em relações

lineares⁴¹.

- $P = \frac{a}{V} \quad \Rightarrow \quad y = ax \quad \left(y = P ; x = \frac{1}{V} \right)$
- $s = aT^2 + b \quad \Rightarrow \quad y = ax + b \quad \left(y = s ; x = T^2 \right)$
- $T^2 = ax + b \quad \Rightarrow \quad y = ax + b \quad \left(y = T^2 \right)$
- $h = h_0 e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y = ax + b \quad \left(y = \log h ; b = \log h_0 \right)$

Exemplos clássicos, na Física, do estabelecimento de uma relação causal entre duas grandezas, a partir de um ajuste linear, são:

- lei de Boyle (Boyle – 1662)

⁴¹ **Nota Avançada** A grande vantagem de se colocar um problema como um ajuste linear é que os erros podem ser estimados a partir dos próprios dados. Para o ajuste de uma função que não seja linear, mesmo que, as incertezas nas medidas de y sejam resultantes de medições muito mais acuradas e precisas que as de x ou, as variações de y resultantes das de x não sejam bem menores que as incertezas nas medidas y_i , deve-se levar em conta o erro individual (σ_i) de cada medida y_i de y e minimizar a quantidade

$$S = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 .$$

- lei de Hooke (Hooke – 1676)
- lei de Ohm (Ohm – 1826)
- relação carga–massa do elétron (Thomson – 1897)
- lei de Einstein para o efeito fotoelétrico (Millikan – 1914)

4.5. Determinação de parâmetros

Outra classe de problemas que podem ser resolvidos por um ajuste linear é a *determinação indireta* de parâmetros (a_j) de um sistema a partir de uma amostra de medidas de duas ou mais grandezas, em dado intervalo de variação.

Parâmetros de um sistema são propriedades (constantes, em algumas circunstâncias) que caracterizam o comportamento do sistema em resposta a um estímulo ou excitação.

Por exemplo, a massa (m) é o parâmetro de uma partícula necessário para se calcular a sua aceleração ($\vec{a}$) quando sujeita a uma força resultante conhecida ($\vec{F}$), ou vice-versa, para se calcular a força resultante correspondente a uma dada aceleração.

Outros exemplos clássicos de parâmetros que podem ser determinados por ajuste linear são:

- a aceleração local da gravidade (g)
- o calor específico (c) de um sólido
- a resistência (R) de um condutor
- a susceptibilidade (χ) de um dielétrico
- a constante elástica (k) de uma mola
- a indutância (L) de um indutor linear
- a capacitância (C) de um capacitor
- o índice de refração (n) de um meio dielétrico
- o momento de inércia axial (I) de um sólido
- a relação carga–massa (e/m) do elétron
- a constante (h) de Planck
- a velocidade da luz (c) no vácuo
- a constante (k) de Boltzmann.

Apesar de se considerar uma relação explícita entre as variáveis x e y que descrevem a resposta e a excitação de um sistema, que envolve os seus parâmetros $(a_1, a_2, \dots, a_p)$, esses não devem ser determinados diretamente, a partir da expressão funcional, por apenas um par particular de medidas (x_1, y_1) .

Uma relação funcional pressupõe que existam domínios nos quais as variáveis estão definidas e a expressão (funcional) é válida. Como as medidas estão associadas a incertezas (que implicam dispersões das médias), o cálculo a partir de pares distintos de medidas leva a distintos valores para o parâmetro.

Nesse sentido, a determinação de parâmetros a partir de um *ajuste de função*, além de levar em conta todas as medidas realizadas, leva em conta também as incertezas associadas a cada par de medidas.

Uma vez determinados os parâmetros, torna-se importante avaliar também as incertezas de suas estimativas.

Para um *ajuste linear*, as incertezas associadas aos coeficientes angular e linear são, respectivamente, (Apêndice D)

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x} \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sigma_a \sqrt{x^2}$$

onde ε_y é o erro em cada medida de y e σ_x é o desvio-padrão das medidas de

x , que pode ser estimado a partir dos dados por (Sec. 4.6)

$$\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{N - 2}}$$

Exercícios

Exercício 4.1. Determine a reta que mais bem se ajusta aos seguintes conjuntos pontos (x,y) :

- a) $(1, 5), (3, 5), (5, 1)$
- b) $(-3, 3), (-1, 4), (1, 8), (3, 9)$

Exercício 4.2. Os dados abaixo representam a posição y e o tempo t de deslocamento de um objeto em movimento uniforme em um trilho de ar.

t (s)	4	6	8	10	12
d (cm)	13	25	34	42	56

Determine a velocidade do objeto.

Exercício 4.3. Se o volume (V) de uma amostra de gás é mantido constante, enquanto sua pressão (P) varia, a temperatura (T) em graus celsius obedece a relação

$$T = aP + b ,$$

onde a e b são constantes e b é denominada *temperatura do zero absoluto*, cujo valor de referência é $-274,15^{\circ}\text{C}$.

- (a) Verifique a compatibilidade desse valor de referência com o seguinte conjunto de dados:

P (mm de Hg)	T ($^{\circ}\text{C}$)
65	-20
75	17
85	42
95	84
105	127

- (b) Qual a temperatura que corresponde a 80 mm de Hg?

Exercício 4.4. Em um experimento sobre o efeito fotoelétrico realizado em nosso Laboratório de Estrutura da Matéria, a partir de fontes de luz de frequências (ν) conhecidas, foram medidas tensões (V) de corte da corrente em uma fotocélula.

ν (10^{14} Hz)	V (volts)
5,19	0,75
5,49	0,84
6,88	1,41
7,41	1,61
8,22	1,95

Essas tensões e frequências estão relacionadas, segundo a teoria de Einstein, por:

$$V = (h/e)\nu + b$$

onde h é a constante de Planck, e é a carga do elétron, e b é um parâmetro característico do material fotossensível.

Verifique a compatibilidade dos dados com o valor de referência

$$4,1356692(12) \times 10^{-15} \text{ eV s}$$

para o parâmetro $a = h/e$.

Exercício 4.5. Determine a lei de calibração do dinamômetro de mola a que se refere a Tab. 12. Compare seus resultados com os do exemplo do §4.6.2. indicação em newton.

Exercício 4.6. A partir da minimização da soma dos quadrados dos resíduos,

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2$$

mostre que para um ajuste linear no qual a reta passa pela origem, $y = ax$, o coeficiente angular (a) é dado por

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$

com incerteza

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N \overline{x^2}}}$$

onde

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2}{N - 1}}$$

4.6. Reta de calibração

Outra situação na qual o *ajuste linear* é extensivamente utilizado é na *calibração* e utilização de instrumentos de medição, como um espectrômetro óptico de

rede de difração ou mesmo de um dinamômetro de mola.

A partir das medidas de duas grandezas, como o comprimento de onda (λ) e o ângulo (θ) de difração, no caso do espectrômetro, ou a força (F) e o comprimento (l), no caso do dinamômetro, determina-se uma *reta de calibração*, cujos parâmetros podem ter (ou não ter) significados físicos diretos.⁴²

Assim, para um dado valor de força ou comprimento de onda, a partir da reta de calibração (Fig. 16), ou melhor, de sua expressão analítica, é possível prever qual seria a deformação da mola ou o ângulo de difração correspondente. Esse processo é denominado de *interpolação direta*. Uma vez estabelecida uma reta de calibração, de um dinamômetro ou de um espectrômetro, essa pode ser utilizada de modo inverso, ou seja, como um instrumento para medir forças ou comprimentos de onda. Esse processo é conhecido como *interpolação inversa*.

Algumas questões que se colocam são: Qual a *incerteza* nessa previsão? Qual o *nível de confiança*?

De N dados utilizados na estimativa do erro em uma medida, apenas $N-1$ são independentes (ver §3.5.1). Analogamente, no caso de um ajuste linear, no qual dois parâmetros da reta são utilizados, apenas $N-2$ dados são independentes, e a *incerteza* dos valores de y em torno da reta de calibração é dada

⁴² No caso do dinamômetro, o coeficiente angular determina a constante de elasticidade da mola e, assim, torna-se importante avaliar também os erros nas estimativas dos parâmetros da reta.

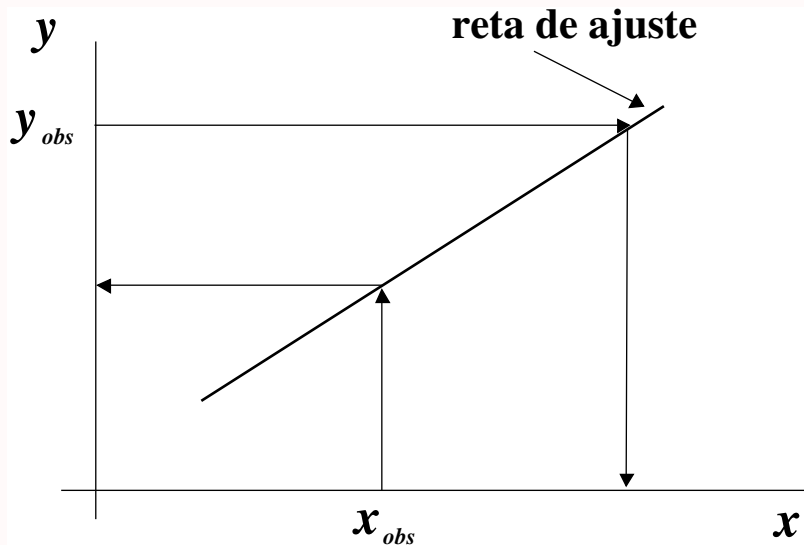


Figura 16: $\begin{cases} x_{obs} \mapsto y \pm \varepsilon_y & \text{(interpolação direta)} \\ y_{obs} \mapsto x \pm \varepsilon_x & \text{(interpolação inversa).} \end{cases}$

por

$$\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{N-2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{[y_i - ax_i - b]^2}{N-2}}$$

Essa expressão, na ausência de estimativas diretas das incertezas nas medidas de y , é a melhor estimativa para o erro em cada uma das medidas de y , a partir dos dados.

4.6.1. Faixa de confiança e interpolação inversa

No exemplo do dinamômetro, denotando-se a força por x e o comprimento por y , a partir da estimativa do erro (ε_y) nas medidas de y , define-se uma *faixa de confiança* cujo nível de confiança pode ser determinado a partir de uma distribuição de Student com $N-2$ graus de liberdade (Tab. 11).

Em primeira aproximação, uma *faixa de confiança* padrão associada a um nível de confiança de 68% é a região (Fig. 17) entre duas retas paralelas que distam verticalmente ε_y para cima e para baixo da reta de regressão (Apêndice E). Analogamente, faixas de confiança de 95% e 99% podem ser construídas.

Para cada valor de x , a faixa de confiança padrão limita o intervalo

$$(y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$$

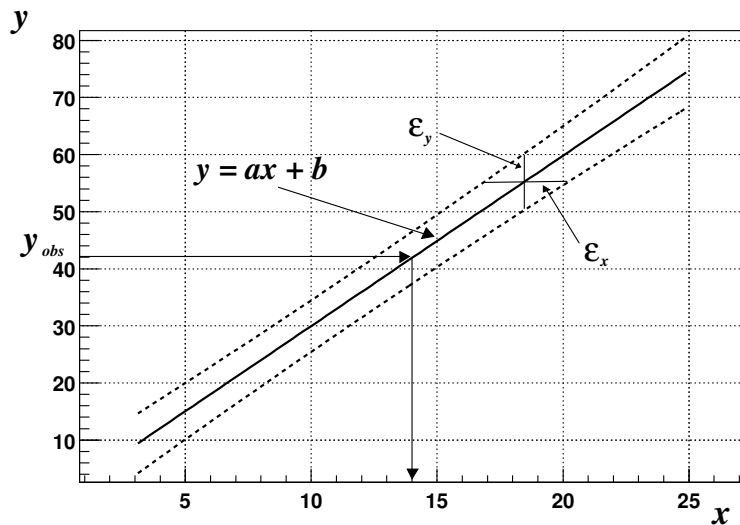


Figura 17: Faixa de confiança padrão associada ao ajuste da mola M_1 (Tab. 12); o valor de ϵ_y é igual a 0,3 mm e a faixa de confiança está exageradamente representada.

de valores compatíveis para a variável y e, reversamente, para cada valor de y , a faixa de confiança define também um conjunto de valores $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$ compatíveis para x .

A avaliação da incerteza numa interpolação inversa se dá a partir da *faixa de confiança* estabelecida na reta de calibração.

De acordo com a Fig. 17, a estimativa para o erro ε_x na interpolação inversa é dada por

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_y}{a}$$

onde a é o coeficiente angular da reta de calibração.

Assim, a partir de um valor observado y_{obs} , a estimativa para o valor interpolado de x será dada por

$$\underbrace{(y_{\text{obs}} - b)/a}_x \pm \underbrace{\varepsilon_y/a}_{\varepsilon_x}$$

4.6.2. Exemplo com o dinamômetro de mola

Utilizando-se os dados da mola M que constam da Tab. 12, pode-se calcular:

$$\begin{cases} r = 0,999955 & \varepsilon_\ell = 0,3 \text{ mm} \\ a = 2,98 \text{ mm/gf} \\ b = 0,14 \text{ mm} \end{cases}$$

de modo que a reta de calibração pode ser expressa por:

$$\begin{cases} \ell(\text{mm}) = 2,8 F(\text{gf}) + 1,14 \\ \varepsilon_\ell = 0,3 \text{ mm} \end{cases}$$

Inversamente, a (intensidade da) força F necessária para provocar uma dada elongação ℓ é dada por

$$\begin{cases} F(\text{gf}) = \frac{\ell(\text{mm}) - 1,14}{2,98} \\ \varepsilon_F = 0,1 \text{ gf} \end{cases}$$

Por exemplo, para M se distender cerca de 20 mm é necessário aplicar uma força da ordem de

$$F \pm \varepsilon_F = (6,7 \pm 0,1) \text{ gf}$$

Exercício

Exercício 4.7. Uma mola a ser usada como dinamômetro deve ser calibrada a partir dos dados

F (gf)	200	400	600	800	1000
l (mm)	42,0	48,4	51,3	56,3	58,6

onde F são intensidades de força (em hgf) de “pesos padrões” e l os comprimentos (em mm) da mola com os pesos padrões pendurados na extremidade inferior.

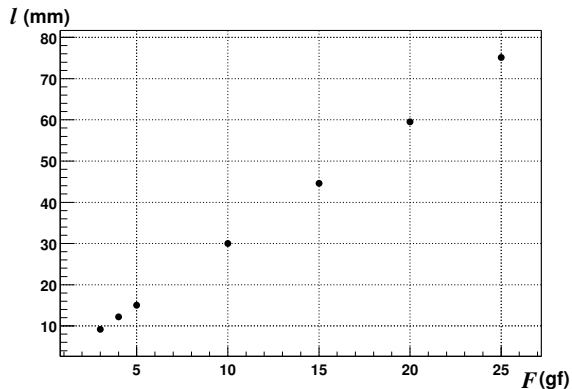
Qual a força que mantém a mola com o comprimento igual a 52 cm?

Exercício 4.8 (*). Baseado no procedimento realizado no Apêndice **E**, mostre que a faixa de confiança para o ajuste linear do tipo $y = ax$ é determinado pelas curvas

$$y_1 = ax \pm \frac{\xi_y}{\sqrt{N}} \sqrt{N + \frac{x^2}{|x^2|}}$$

onde $\xi_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2}{N - 1}}.$

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Representação dos pontos associados à Tab. 12,
($r = 0,9999550$)

Tabela 12: Dados para calibração de um dinamômetro de mola.

5. Conclusão

O relacionamento entre experimentos, tratamento estatístico de dados, leis e teorias pode ser ilustrado de modo simples, a partir de um exemplo baseado nas notas⁴³ do Professor Armando Dias Tavares.

Considere uma esfera que, após rolar sem deslizar sobre uma calha de uma altura h , é lançada horizontalmente no espaço, e cai então de uma altura H até um plano horizontal π , conforme o esquema da Fig. 18. Qual o alcance s da esfera após a queda? Esse problema pode ser abordado de duas maneiras: uma **experimental** e outra **teórica**.

Do ponto de vista experimental, a solução do problema envolve, primeiro, a concepção e a montagem de um aparato baseado no esquema da Fig. 18. Em seguida, deixando-se a esfera rolar de várias alturas determinam-se os correspondentes alcances, obtendo-se, por exemplo, N pares de **medidas** de s e h (Tab. 13). Se as medidas forem cuidadosamente realizadas, o **diagrama de dispersão** para $y = h$ e $x = s^2$ e o **coeficiente de correlação linear** sugerirão a existência de uma relação linear entre x e y , $y = ax$ (Fig. 19). Ou seja, uma relação quadrática entre a altura h e o alcance s , $h = as^2$.

Em seguida, utilizando-se, por exemplo, o **Método dos Mínimos Quadrados** para **ajuste de uma reta** aos valores de x e y , obtém-se uma **expressão**

⁴³ *Introdução à Acústica*, vol. 1, Convênio NEPEC-UERJ, IF/UERJ, 1981.

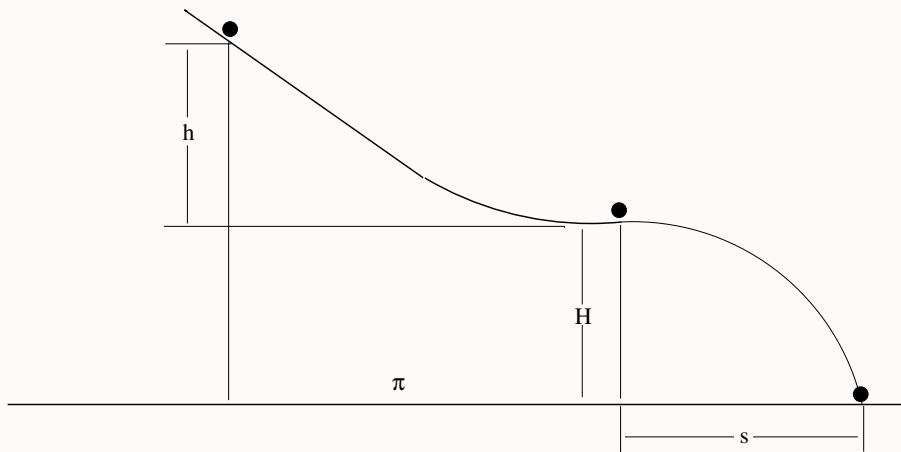


Figura 18: Rolamento e queda de uma esfera.

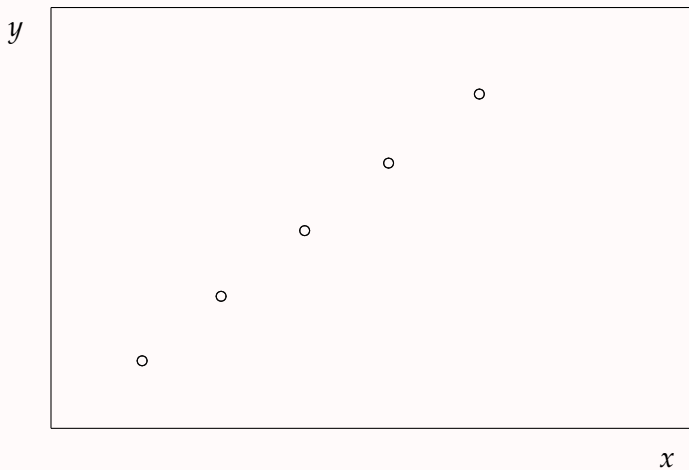


Figura 19: Diagrama de dispersão entre $y=h$ e $x=s^2$.

s (cm)	h (cm)
s_1	h_1
s_2	h_2
$\vdots$	$\vdots$
s_N	h_N

Tabela 13: Medidas das alturas (h) e dos alcances (s).

empírica entre as grandezas h e s , ou uma **lei experimental**, se a expressão for suficientemente geral para que se verifique de maneira unívoca, para várias esferas, num amplo domínio de medidas das grandezas h e s .

$$h = as^2$$

Por outro lado, a partir das **leis da Mecânica**, pode-se estabelecer uma fórmula teórica que relaciona essas grandezas como:

$$h = \left(\frac{7}{20H} \right) s^2$$

Ou seja, pode-se prever a existência de uma interdependência linear entre a altura h que rola a esfera e o quadrado de seu alcance s ao cair da calha.

Desse modo, a partir da medida da altura H , a qual a esfera cai em queda livre, é possível comparar o resultado experimental e o teórico, e verificar a **compatibilidade** entre as duas estimativas, por meio da comparação do **parâmetro** $a \pm \sigma_a$ com $7/20H$.

O exemplo apresentado é suficientemente trivial para que todo estudante de um curso de Física possa, facilmente, compreender e utilizar tanto a abordagem experimental como a teórica.

Em geral, os problemas defrontados em trabalhos de pesquisa requerem a utilização de **métodos experimentais e teóricos** tão complexos e distintos que as duas abordagens são feitas de forma mais ou menos independente e complementar, por pesquisadores com mesma formação básica, mas com treinamentos profissionais distintos. Essa dicotomia levou à divisão dos Físicos em duas classes: os **experimentais** e os **teóricos**.⁴⁴

Desse modo, por um lado, um **físico experimental** pode, a partir de motivações próprias, obter uma fórmula ou lei empírica que descreva um determinado fenômeno ou, “*verificar*” uma fórmula ou lei, proposta ou descoberta por um **teórico**.

Por outro lado, um **físico teórico**, também a partir de motivações próprias, pode obter uma fórmula ou lei teórica para descrever um fenômeno ou,

⁴⁴ Historicamente, essa divisão ocorreu em meados do séc. XIX. Até a época de Galileu, Kepler, Brahe, Hooke, Snell, Boyle, Fresnel, Young, Malus, Huygens e Newton, não havia essa distinção.

“*explicar*” uma fórmula ou lei, proposta ou descoberta por um **experimental**.

E assim, a partir de atividades mais ou menos independentes, mas complementares, **a Física vai progredindo**.

É importante salientar que essa dicotomia, **experimento**×**teoria**, não deveria ocorrer durante a formação básica (Graduação) de um aluno de Física, onde tanto métodos experimentais como teóricos deveriam ser apresentados ao estudante. A definição da metodologia utilizada na abordagem de fenômenos físicos é uma escolha individual, que só acontece durante e após um nível de especialização profissional, como o Mestrado ou Doutorado.

Alguns exemplos nos quais o aluno, nesse curso de Física, terá a oportunidade de realizar tanto abordagens teóricas simples como experimentais, da montagem à análise de dados, baseadas em ajustes lineares, são:

- Oscilador harmônico massa–mola
- Pêndulo simples
- Lei de Hooke – Dinamômetro
- Refração da luz
- Lei de Ohm
- Lei de Faraday

- Espectroscopia de gases com redes de difração
- Relação carga-massa do elétron
- Efeito foto-elétrico

Notação de índice e de somatório

Quando se está trabalhando diretamente com poucos dados e de modo não apenas simbólico, como por exemplo: $q_1 = 150,3$ cm, $q_2 = 150,2$ cm e $q_3 = 151,5$ cm, não há desconforto em os escrever a cada momento, assim, a soma desses três números será (em termos da mesma unidade):

$$150,3 + 150,2 + 151,5 = 452,0 \text{ (cm)}$$

mas isso pode ser escrito simbólica e compactamente da seguinte maneira:⁴⁵

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 q_k &= q_{k=1} + q_{k=2} + q_{k=3} \\ &= q_1 + q_2 + q_3 \\ &= 150,3 + 150,2 + 151,5 \\ &= 452,0 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

e lido como “somatório de q índice k com k variando de 1 a 3”, ou “somatório de quê cá, com cá variando de 1 a 3”.

⁴⁵ O que se está a indicar é o procedimento implícito na notação relativamente ao conjunto bruto de dados. Note-se que o conjunto bruto de dados pode conter dados em unidades diferentes. Nesse caso deve-se levar todos os dados brutos à mesma unidade.

Com referência a uma amostra de N dados, a soma s de todas as medidas consideradas será expressa compactamente por:

$$\begin{aligned}s &= \sum_{k=1}^N q_k = q_{k=1} + q_{k=2} + \dots + q_{k=N} \\ &= q_1 + q_2 + \dots + q_N\end{aligned}$$

Se o valor a_i ocorre f_i vezes, então, face as propriedades associativa e comutativa dos reais, tem-se:

$$\begin{aligned}s &= \sum_{k=1}^N q_k = \sum_{j=1}^n a_j f_j \\ &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n\end{aligned}$$

Principais propriedades do somatório

Listamos a seguir as principais propriedades envolvendo somatórios.

$$\sum_{i=1}^N (a x_i) = a \left(\sum_{k=1}^N x_k \right)$$

$$\sum_{i=1}^N 1 = N$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i + y_i) = \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + \left(\sum_{j=1}^N y_j \right)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^M x_i + \sum_{i=M+1}^N x_i, \quad \text{onde } M < N$$

$$\left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{j=1}^N y_j \right) = \sum_{i,j=1}^N x_i y_j$$

- A primeira identidade traduz a *distributividade da multiplicação de números reais em relação à adição*.
- A segunda identidade indica a soma de N parcelas iguais a 1.

- A terceira identidade traduz a *comutatividade* e a *associatividade* da *adição* de números reais.
- A quarta identidade traduz um outro aspecto da *associatividade da adição* de números reais.
- A quinta, e última, identidade segue diretamente da distributividade a multiplicação em relação a adição.

A. Distribuição gaussiana

A expressão analítica para a *distribuição gaussiana* é dada por

$$\rho(x|\mu, \sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

onde o valor médio (μ) e a variância (σ_x^2) são os dois parâmetros da distribuição. Usualmente, é representada também por

$$\mathcal{N}_x(\mu, \sigma_x^2)$$

Em relação à variável reduzida adimensional $z = \frac{x - \mu}{\sigma_x}$, obtém-se a chamada *distribuição normal padrão*

$$\mathcal{N}_z(0, 1)$$

de desvio-padrão unitário e simétrica em relação ao seu valor médio nulo.

A distribuição de Gauss é uma (função) densidade de probabilidade⁴⁶, para a qual as probabilidades de ocorrências dos valores da variável reduzida z , no

⁴⁶ Em geral se usa a sigla p.d.f., do inglês *probability density function*.

intervalo $(-\infty, t)$, são encontradas em diversas tabelas [13, 10, 2].

$$P(z \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Algumas de suas propriedades são:

$$P(z < -t) = P(z > t) = 1 - P(z \leq t)$$

$$P(-t \leq z \leq t) = 1 - 2P(z > t) = 2P(z \leq t) - 1$$

$$P(-1 \leq z \leq 1) = P(\mu - \sigma_x \leq x \leq \mu + \sigma_x) = 2 \overbrace{P(z \leq 1)}^{0,8413} - 1 = 0,683$$

$$P(-2 \leq z \leq 2) = P(\mu - 2\sigma_x \leq x \leq \mu + 2\sigma_x) = 2 \overbrace{P(z \leq 2)}^{0,9772} - 1 = 0,954$$

$$P(-3 \leq z \leq 3) = P(\mu - 3\sigma_x \leq x \leq \mu + 3\sigma_x) = 2 \overbrace{P(z \leq 3)}^{0,9987} - 1 = 0,997$$

A partir desses valores é que os valores extremos de intervalos associados a uma dada probabilidade ou expectativa são fixados.

B. Erro da média

Sejam M amostras de N medidas diretas de uma grandeza x ,

$$\{x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kN}\} \quad (\text{amostra } k)$$

cujo valor esperado é μ .

Para cada amostra ($k = 1, 2, \dots, M$), além da média (amostral) $\bar{x}_k$, pode-se definir

- $\sigma_{x_k}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{ki} - \bar{x}_k)^2$ variância em relação à sua média $\bar{x}_k$
- $\sigma_{\hat{x}_k}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{ki} - \mu)^2$ variância em relação ao valor esperado μ

Desse modo, a variância das médias de cada amostra em relação ao valor esperado μ , cuja raiz é o erro associado a cada média amostral, pode ser expressa

por

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}}^2 &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\bar{x}_k - \mu)^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{ki} - \mu) \right]^2 \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^M \underbrace{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{ki} - \mu)^2 \right]}_{\sigma_{\hat{x}_k}^2} +\end{aligned}\tag{1a}$$

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{i,j \neq i}^N \underbrace{\left[\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (x_{ki} - \mu)(x_{kj} - \mu) \right]}_{\sigma_{\hat{x}_{k_i} \hat{x}_{k_j}}}\tag{1b}$$

Uma vez que as covariâncias entre pares de medidas de amostras distintas são praticamente nulas (*i.e.*, $\sigma_{\hat{x}_{k_i} \hat{x}_{k_j}} \approx 0$), apenas a primeira parcela (1a) da eq. (1) contribui para o erro da média. Ou seja,

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sigma_{\hat{x}_k}^2 \right) = \frac{1}{N} \langle \sigma_{\hat{x}_k}^2 \rangle\tag{2}$$

Apesar de praticamente idênticas ($\sigma_{x_1}^2 \approx \sigma_{x_2}^2 \approx \dots \approx \sigma_{x_M}^2$), a variância de cada amostra em relação ao valor esperado não pode ser calculada, uma vez que o valor esperado, em geral, é desconhecido.

Entretanto, para grandes amostras ($N \gg 1$), a variância de cada amostra em relação ao valor esperado pode ser aproximada por sua variância em relação a média e, uma vez que essas são também praticamente idênticas ($\sigma_{x_1}^2 \approx \sigma_{x_2}^2 \approx \dots \approx \sigma_{x_M}^2$), denotando-as por σ_x , pode-se estabelecer que

O erro da média de uma grande amostra de N medidas diretas de uma grandeza x pode ser estimado por

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Pequenas amostras Se o número N de medidas em cada amostra não for suficientemente grande ($N < 30$), a variância em relação a média (σ_x) não é uma boa aproximação para a variância de cada amostra em relação ao valor esperado. Entretanto, a partir da decomposição dos desvios das medidas de

uma amostra k por

$$x_{k_i} - \bar{x}_k = (x_{k_i} - \mu) - (\bar{x}_k - \mu)$$

a relação entre a variância em relação a média e ao valor esperado pode ser expressa por

$$\begin{aligned}\sigma_{x_k}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{k_i} - \bar{x}_k)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{k_i} - \mu)^2 - 2(\bar{x}_k - \mu) \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{k_i} - \mu \right)}_{\bar{x}_k} + (\bar{x}_k - \mu)^2 \\ &= \sigma_{\hat{x}_k}^2 - (\bar{x}_k - \mu)^2\end{aligned}$$

e as médias das variâncias, como

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{x_k}^2 \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sigma_k^2 - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\bar{x}_k - \mu)^2 \\ &= \langle \sigma_{\hat{x}_k}^2 \rangle - \sigma_{\bar{x}}^2\end{aligned}\tag{3}$$

De acordo com a eq. (2), $\langle \sigma_{\bar{x}_k}^2 \rangle = N\sigma_{\bar{x}}^2$, e levando-se em conta que $\sigma_{x_1}^2 \approx \sigma_{x_2}^2 \approx \dots \approx \sigma_{x_M}^2 \approx \sigma_x$, uma estimativa para o erro da média de uma pequena amostra de N medidas diretas de uma grandeza x pode ser expressa por

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N-1} \quad (4)$$

Por outro lado, escrevendo-se a eq. (3) como

$$\langle \sigma_{\bar{x}_k}^2 \rangle = \sigma_x^2 + \sigma_{\bar{x}}^2$$

de acordo com a eq. (4), a média das variâncias de cada amostra em relação ao valor esperado pode ser estimada por

$$\langle \sigma_{\bar{x}_k}^2 \rangle = \frac{N}{N-1} \sigma_x^2$$

Assim, uma estimativa para o erro em cada medida de uma amostra é dada por

$$s_x = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_x \quad (5)$$

Nesse sentido, s_x é denominado desvio-padrão experimental (Ap. F).

Em resumo,

As incertezas associadas a uma amostra de N medidas diretas de uma grandeza x podem ser estimadas por

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (\text{erro em cada medida})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (\text{erro da média})$$

C. Propagação de erros

Seja uma grandeza w que se relaciona com M grandezas

$$\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$$

por uma dada função f ,

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_M)$$

tal que, a partir de amostras de N medidas diretas de cada grandeza x_k ,

$$\{x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kN}\} \quad k = 1, 2 \dots M$$

deve-se determinar as estimativas de seu valor esperado e de sua incerteza.

C.1. Caso de uma variável

• Linear

Se as variações da grandeza w são proporcionais às variações de apenas uma outra grandeza x , isto é, w depende linearmente de x ,

$$w = f(x) = ax + b$$

a cada medida direta x_i de x corresponde uma medida indireta $w_i = ax_i + b$ de w , tal que a estimativa para o valor esperado de w , dada pela média

$$\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i}_{\bar{w}} = a \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}_{\bar{x}} + b = a\bar{x} + b$$

é igual ao valor da função f no ponto médio das medidas de x , ou seja

$$\boxed{\bar{w} = f(\bar{x})}$$

Desse modo, uma vez que $w_i - \bar{w} = a(x_i - \bar{x})$, a variância (σ_w^2) das medidas de w é dada por

$$\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}_{\sigma_w^2} = a^2 \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}_{\sigma_x^2}$$

o erro associado a cada medida indireta de w , com nível de confiança de 68,3 %, é dado por

$$\boxed{\sigma_w = |a| \sigma_x}$$

e o erro na estimativa para o valor esperado de w , por

$$\sigma_{\bar{u}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{N}} = |a| \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = |a| \sigma_{\bar{x}}$$

• Geral

Se a grandeza w depende de uma outra grandeza x , segundo uma função genérica f ,

$$w = f(x)$$

e as medidas de x se distribuem em torno da média $\bar{x}$ tal que, nessa vizinhança, ela possa ser representada pelos primeiros termos de sua série de Taylor, ou seja, como uma função linear de x ,

$$w = f(x) = f(\bar{x}) + \left(\frac{df}{dx} \right)_{\bar{x}} (x - \bar{x})$$

a estimativa para o valor esperado de w será dada por

$$\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i}_{\bar{w}} = f(\bar{x}) + \left(\frac{df}{dx} \right)_{\bar{x}} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})}_0$$

ou seja, pelo valor da função f no ponto médio das medidas de x ,

$$\overline{w} = f(\overline{x})$$

Assim, o erro associado a cada medida indireta de w , com nível de confiança de 68,3%, será dado por

$$\sigma_w = \left| \frac{df}{dx} \right|_{\overline{x}} \sigma_x$$

e o erro na estimativa para o valor esperado de w , por

$$\sigma_{\overline{w}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{N}} = \left| \frac{df}{dx} \right|_{\overline{x}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \left| \frac{df}{dx} \right|_{\overline{x}} \sigma_{\overline{x}}$$

C.2. Caso de duas variáveis

• Linear

Considere agora, que a grandeza w é função de duas outras grandezas, $x_1 = x$ e $x_2 = y$. Se as variações de u são proporcionais às de x de y , isto é, w depende linearmente de x e y ,

$$w = f(x, y) = ax + by + c$$

de modo análogo ao caso de uma variável, a estimativa para o valor esperado de w é dada pelo valor da função f no ponto médio dos N pares (x_i, y_i) de

medidas de x e y ,

$$\overline{w} = a\overline{x} + b\overline{y} + c = f(\overline{x}, \overline{y})$$

e a variância das medidas indiretas de w , por

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w_i - \overline{w})^2 &= a^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2 + b^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \overline{y})^2 \\ &\quad + 2ab \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \\ \sigma_w^2 &= a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + 2ab \sigma_{xy}\end{aligned}$$

Assim, o erro associado a cada medida indireta de w , com nível de confiança de 68,3%, será dado por

$$\sigma_w = \sqrt{a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + 2ab \sigma_{xy}}$$

e o erro na estimativa para o valor esperado de w , por

$$\sigma_{\overline{w}} = \sqrt{a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + 2ab \frac{\sigma_{xy}}{N}}$$

Nesse caso, além dos erros associados a cada conjunto de medidas diretas, os erros associados as medidas indiretas dependem também da covariância entre os conjuntos.

Se as medidas das grandezas x e y são independentes, ou seja, se não há correlação ($\sigma_{xy} = 0$), a incerteza em cada medida indireta de w e o erro na estimativa para o valor esperado serão dados por

$$\sigma_w = \sqrt{a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\bar{w}} = \frac{\sigma_w}{\sqrt{N}}$$

• Geral

Por outro lado, se a grandeza w depende das grandezas x e y , segundo uma função genérica, $w = f(x, y)$, mas as medidas de x e y se distribuem em torno do ponto médio $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que, nessa vizinhança, ela possa ser representada pelos primeiros termos de sua série de Taylor, ou seja, como uma função linear de x e y ,

$$w = f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{y}} (x - \bar{x}) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{\bar{x}, \bar{y}} (y - \bar{y})$$

a estimativa para o valor esperado de w será dada por

$$\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i}_{\bar{w}} = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{y}} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})}_0 + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{\bar{x}, \bar{y}} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})}_0$$

ou seja, pelo valor da função f no ponto médio das medidas de x e y ,

$$\boxed{\bar{w} = f(\bar{x}, \bar{y})}$$

Nesse caso, o erro associado a cada medida indireta de w , com nível de confiança de 68,3 %, será dado por

$$\boxed{\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \sigma_y^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}} \sigma_{xy}}}$$

e o erro na estimativa para o valor esperado de w , por

$$\sigma_{\bar{w}} = \frac{\sigma_w}{\sqrt{N}} = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x},\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\bar{x},\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{xy}}$$

Se considerarmos a matriz (2×2) de covariância (Sec. 2.6.1)

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

e a matriz (2×1) das derivadas parciais de w ,

$$\mathbf{D}_w = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\bar{x},\bar{y}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_w^t = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{x},\bar{y}}$$

a variância de w pode ser escrita mais compactamente como

$$\sigma_w = \sqrt{\mathbf{D}_w^t \mathbf{V} \mathbf{D}_w}$$

Se as medidas das grandezas x e y são independentes, ou seja, se não há correlação ($\sigma_{xy}=0$), então a matriz V será diagonal,

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

a incerteza em cada medida indireta de w será dada pela variância

$$\sigma_w = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x},\bar{y}}^2 \sigma_x^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\bar{x},\bar{y}}^2 \sigma_y^2}$$

e o erro na estimativa para o valor esperado de w por

$$\sigma_{\bar{w}} = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x},\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\bar{x},\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{y}}^2}$$

C.3. Caso de M variáveis

Para o caso no qual a grandeza w depende de M outras grandezas, $X = (x_1 \dots x_M)$, segundo uma dada função $f(X)$, e as N medidas de cada uma das grandezas se distribuem em torno do ponto médio $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_M)$, de modo

que, nessa vizinhança, ela possa ser representada pelos primeiros termos de sua série de Taylor,

$$w = f(X) = f(\bar{X}) + \sum_{k=1}^M \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \right]_{\bar{X}} (x_k - \bar{x}_k)$$

a generalização dos resultados anteriores é tal que a estimativa para o valor esperado de w é dada pelo valor da função f no ponto médio $\bar{X}$,

$$\bar{w} = f(\bar{X})$$

o erro associado a cada medida indireta de w , com nível de confiança de 68,3%, por

$$\sigma_w = \sqrt{\sum_{k,l}^M \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \right]_{\bar{X}} V_{kl} \left[\frac{\partial f}{\partial x_l} \right]_{\bar{X}}}$$

e o erro na estimativa para o valor esperado de w , por

$$\sigma_{\bar{w}} = \frac{\sigma_w}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k,l}^M \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \right]_{\bar{X}} V_{kl} \left[\frac{\partial f}{\partial x_l} \right]_{\bar{X}}}$$

onde

$$V_{kl} = \sigma_{x_k x_l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{k_i} - \bar{x}_k)(x_{l_i} - \bar{x}_l)$$

é o termo kl da matriz ($M \times M$) de covariância

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1 x_1} & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_M} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2 x_2} & \cdots & \sigma_{x_2 x_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_M x_1} & \sigma_{x_M x_2} & \cdots & \sigma_{x_M x_M} \end{pmatrix}$$

Considerando a matriz ($M \times 1$) D_w das derivadas calculadas no ponto $\bar{X}$, tal que

$$D_w^t = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_M} \right)_{\bar{X}}$$

os erros associados a cada medida indireta de w e a estimativa de seu valor esperado podem ser escritos mais compactamente como

$$\sigma_u = \sqrt{D_w^t V D_w} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\frac{1}{N} D_w^t V D_w}$$

Se as medidas das grandezas x_k forem independentes, ou seja, se não houver correlações ($\sigma_{x_k x_l} = 0$), as incertezas em cada medida indireta de w e na estimativa de seu valor esperado serão dadas por

$$\sigma_w = \sqrt{\sum_{k=1}^M \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \right]_{\bar{X}}^2 \sigma_{x_k}^2} \Rightarrow \sigma_{\bar{w}} = \frac{\sigma_w}{\sqrt{N}}$$

C.4. Exemplos

Exemplificaremos a propagação de incertezas em uma série de uma (1) medição para cada grandeza envolvida para a determinação indireta de uma grandeza que delas dependa.

C.4.1. Resultante de duas forças

Avaliaremos, a título de exemplo, a *incerteza na medida indireta* da intensidade da resultante $\vec{R}$ de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ por meio de amostra única de medição, ou seja de uma série de uma (1) medição para cada grandeza envolvida. Sabe-se que

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta$$

onde F_1 , F_2 e θ são os valores centrais das medidas das intensidades das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e do ângulo por elas definido; sendo ε_{F_1} , ε_{F_2} e ε_θ as respectivas incertezas. Então, como em amostra única as correlações são nulas,

$$\begin{cases} \sigma_{R^2}^2 = (2F_1 + 2F_2 \cos \theta)^2 \varepsilon_{F_1}^2 + (2F_2 + 2F_1 \cos \theta)^2 \varepsilon_{F_2}^2 \\ \quad + (2F_1 F_2 \sin \theta)^2 \varepsilon_\theta^2 \\ \sigma_R^2 = \frac{1}{4R^2} \sigma_{R^2}^2 \end{cases}$$

Daí

$$\sigma_R^2 = \left[\frac{F_1 F_2}{R} \right]^2 \left\{ \left(\frac{1}{F_2} + \frac{\cos \theta}{F_1} \right)^2 \varepsilon_{F_1}^2 + \left(\frac{1}{F_1} + \frac{\cos \theta}{F_2} \right)^2 \varepsilon_{F_2}^2 + (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \varepsilon_\theta^2 \right\}$$

Para determinar o ângulo ϕ entre a resultante e a força F_1 podemos usar a expressão:

$$\tan \phi = \frac{F_2 \sin \theta}{F_1 + F_2 \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan\left(\frac{F_2 \sin \theta}{F_1 + F_2 \cos \theta}\right)$$

Então

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\tan \phi}^2 = \left(\frac{F_2 \sin \theta}{R} \right)^2 \varepsilon_{F_1}^2 + \left(\frac{F_1 \sin \theta}{R} \right)^2 \varepsilon_{F_2}^2 \\ \quad + \left(\frac{F_2(F_1 \cos \theta + F_2)}{R} \right)^2 \varepsilon_{\theta}^2 \\ \sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{1 + \phi^2} \sigma_{\tan \phi}^2 \end{array} \right.$$

Daí

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{1 + \phi^2} \left\{ \left(\frac{F_2 \sin \theta}{R} \right)^2 \varepsilon_{F_1}^2 + \left(\frac{F_1 \sin \theta}{R} \right)^2 \varepsilon_{F_2}^2 + \left(\frac{F_2(F_1 \cos \theta + F_2)}{R} \right)^2 \varepsilon_{\theta}^2 \right\}$$

Em resumo:

$$\sigma_R^2 = \left[\frac{F_1 F_2}{R} \right]^2 \left\{ \left(\frac{1}{F_2} + \frac{\cos \theta}{F_1} \right)^2 \varepsilon_{F_1}^2 + \left(\frac{1}{F_1} + \frac{\cos \theta}{F_2} \right)^2 \varepsilon_{F_2}^2 + (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \varepsilon_{\theta}^2 \right\}$$
$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{1 + \phi^2} \left\{ \left(\frac{F_2 \sin \theta}{R} \right)^2 \varepsilon_{F_1}^2 + \left(\frac{F_1 \sin \theta}{R} \right)^2 \varepsilon_{F_2}^2 + \left(\frac{F_2(F_1 \cos \theta + F_2)}{R} \right)^2 \varepsilon_{\theta}^2 \right\}$$

Observação A incerteza ε_{θ} deve ser expressa em *radiano*.

C.4.2. Medida do momento de força

Para medir o módulo do momento de uma força $\vec{F}$ aplicada no ponto A em relação ao polo P podemos usar a expressão

$$M_P(\vec{F}, A) = d F \sin \theta = M$$

onde $d = \overline{PA}$, $F = |\vec{F}|$ e θ é o ângulo entre a força $\vec{F}$ e a reta definida pelos pontos P e A . Portanto

$$\sigma_M^2 = (d \operatorname{sen} \theta)^2 \varepsilon_F^2 + (F \operatorname{sen} \theta)^2 \varepsilon_d^2 + (F d \cos \theta)^2 \varepsilon_\theta^2$$

Assim:

$$\sigma_M^2 = M^2 \left\{ \left(\frac{1}{F} \right)^2 \varepsilon_F^2 + \left(\frac{1}{d} \right)^2 \varepsilon_d^2 + (\cot \theta)^2 \varepsilon_\theta^2 \right\}$$

C.4.3. Estimativa da incerteza em medição direta de ângulo por meio de transferidor escolar

Como $\theta = \frac{\ell}{r}$, onde r é o raio do transferidor e ℓ o comprimento de arco no transferidor, então $\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \sigma_\ell$. Para um transferidor de 180° de raio r graduado em graus, $\varepsilon_\ell = 0,5 \frac{\pi r}{180}$, daí $\varepsilon_\theta = 0,5 \frac{\pi}{180} = 0,0087 \text{ rad} = 0,5^\circ$, sendo a incerteza na medida dos ângulos consideradas em *radiano* na propagação de incertezas.

D. Ajuste linear por meio do método dos mínimos quadrados⁴⁷

Apresentamos neste apêndice o procedimento conhecido como *ajuste linear* e apontamos algumas generalizações para o ajuste de outras famílias de funções (ou curvas).

O problema pode ser posto como:

A partir de N pares (x_i, y_i) de medidas obtidas em N medições das grandezas x e y , como determinar a reta de ajuste,

$$y = ax + b ,$$

caracterizada pelos parâmetros a e b , que melhor se ajuste a esses pontos experimentais?

Estamos supondo que cada par de valores conjugados é fruto de medição única em que a grandeza x é variada, tendo-se maior confiança sobre as medidas de x do que as do correspondente valor da grandeza y ; ou porque se tem maior controle de x , ou porque se usam valores de referência para cada situação distinta; sendo as incertezas nas medidas de y consideradas iguais (por exemplo,

⁴⁷ Legendre – 1806, Gauss – 1809.

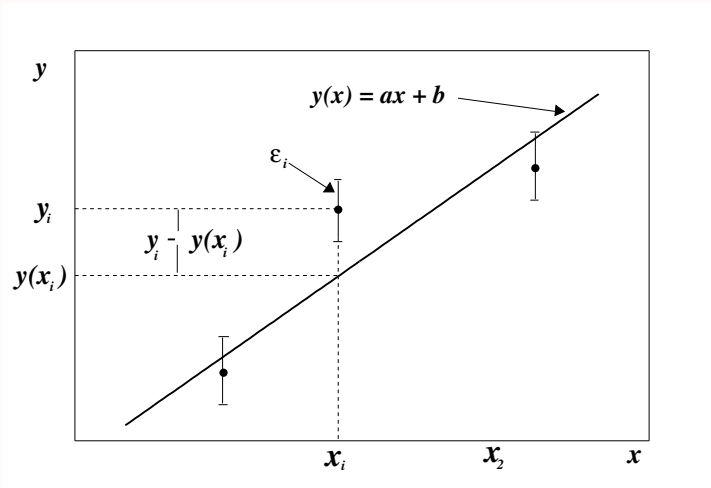


Figura 20: *Diagrama de dispersão* de alguns pares (x, y) , onde se ilustram: a reta $y(x) = ax + b$; três desses pares; o *resíduo* $y_i - y(x_i) = y_i - (ax_i + b)$ do par genérico (x_i, y_i) em relação a referida reta e, também a *incerteza* ε_i da medida y_i .

não há mudança de instrumento de medição ou de escala nesse instrumento durante as medições da grandeza y para todos os N pares).

O método dos mínimos quadrados⁴⁸ consiste em minimizar o *resíduo médio quadrático* das medidas da grandeza y em relação a reta a estimar⁴⁹. Por esse procedimento se determinam os parâmetros a e b que melhor estimam a função de ajuste. Por *resíduo* de uma medida em relação a uma *função de ajuste*⁵⁰ $y = f(x; \alpha)$, entende-se a diferença $(y_i - f(x_i))$. (Fig. 20)

Dessa forma, devemos estudar o extremo da função: (o resíduo médio quadrático)

$$R(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y_k - f(x_k; \alpha)]^2$$

que é expresso no caso da reta de ajuste [*i.e.*, no caso em que $\alpha = (a, b)$] por

$$R(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i - (a x_i + b)]^2$$

⁴⁸ Em inglês: *method of least squares*.

⁴⁹ Ou equivalentemente para a situação de extremo, a soma dos quadrados dos resíduos.

⁵⁰ Onde α indica os parâmetros característicos da família de funções que se pretende interpolar. No caso da reta de ajuste: $\alpha = (a, b)$.

Neste ponto se pode identificar inicialmente dois casos distintos a estudar:⁵¹

(a) $b=0$,

(b) $b \neq 0$.

D.1. Função de ajuste $y=ax$ ($b=0$)

Nesse caso, o resíduo médio quadrático se reduz a uma função de uma variável, *i.e.*,

$$R(a) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - a x_k)^2$$

As condições para que se tenha um mínimo para R em um determinado valor do parâmetro a são:

$$\frac{dR}{da} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2R}{da^2} > 0$$

Da primeira condição:

$$\frac{dR}{da} = 0 \Rightarrow \frac{-2}{N} \sum_i x_i (y_i - ax_i) = 0$$

⁵¹ Deve-se lembrar que os valores x_i e y_i são $2N$ valores conhecidos numericamente, enquanto os parâmetros α são ainda desconhecidos.

daí

$$\frac{1}{N} \sum_i (x_i y_i) - a \frac{1}{N} \sum_i (x_i)^2 = 0 \Rightarrow \overline{xy} - a \overline{x^2} = 0$$

donde se tira:

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$

e como

$$\frac{d^2 R}{da^2} = \frac{2}{N} \sum_i x_i^2 = 2 \overline{x^2} > 0$$

qualquer que seja $\overline{x}$ e para qualquer valor de a , então

$$a = (\overline{xy})/(\overline{x^2})$$

determina o mínimo de R .

D.1.1. Estimativa das incertezas associadas ao ajuste $y = ax$

Se o ajuste $y = ax$ for usado para medida indireta de y por meio de medida direta da grandeza x , fazendo-se uso da função interpolada, então o resíduo quadrático para a função de ajuste fornece uma estimativa para a incerteza na

medição⁵² de y :

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_k - a x_k)^2}$$

Se o ajuste $y = ax$ estiver sendo usado para medida indireta da grandeza a , então precisamos estimar a incerteza σ_a de sua medida. Como o valor do parâmetro a é determinado em função dos valores amostrais pela expressão:

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}} = \frac{1}{\overline{x^2}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k$$

então podemos avaliar a incerteza σ_a em a como obtido por N medias dos pares (x_k, y_k) , levando em conta a propagação das incertezas das medidas de cada y_k e tendo em vista a hipótese de que as contribuições das incertezas propagadas por x_k são desprezíveis comparadas com as advindas de y_k e que estas, por sua

⁵² Note-se a distinção entre a medição indireta de uma grandeza por meio de uma função de origem teórica (como o que trata o Apêndice C) e a medição indireta por meio de uma função ajustada.

vez, são iguais, *i.e.*, $\sigma_{y_1} \approx \dots \approx \sigma_{y_N} \approx \varepsilon_y$. Assim, da propagação dessas incertezas,

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial a}{\partial y_j} \right]^2 \sigma_{y_j}^2 = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{x^2} \frac{1}{N} x^j \right]^2 \varepsilon_y^2 = \frac{1}{(x^2)^2} \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N (x^j)^2 \varepsilon_y^2 \\ &= \frac{1}{(x^2)^2} \frac{1}{N} \overline{x^2} \varepsilon_y^2\end{aligned}$$

portanto

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N \overline{x^2}}}$$

Se, por outro lado, o ajuste for usado para medida indireta da grandeza x a partir de medição direta de y , por interpolação, então

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial(y/a)}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_y^2 = \left(\frac{\varepsilon_y}{a} \right)^2 \Rightarrow \sigma_x = \frac{\varepsilon_y}{|a|}$$

D.1.2. Parâmetro do ajuste linear $y=ax$ e as incertezas (resumo)

Daí, o resíduo médio quadrático será mínimo para a reta que passa pela origem e possui coeficiente angular:

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$

E as incertezas estimadas por:⁵³

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_k - a x_k)^2}$$

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N \overline{x^2}}} \quad \text{e}$$

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_y}{|a|}$$

⁵³ Note-se como a , assim determinado, torna as incertezas mínimas para esses N pares de medidas.

D.2. Função de ajuste $y=ax+b$

No caso em que não há evidência que a reta de ajuste passe pela origem, devemos estudar a condição de mínimo da função de duas variáveis:⁵⁴

$$R(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i - (a x_i + b)]^2$$

As condições para que se tenha um mínimo para R para determinados valores dos parâmetros a e b são:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial b} = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} - \left[\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} \right]^2 \neq 0, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} > \sqrt{\left[\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} \right]^2 + 4 \left[\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} \right]^2} > 0 \end{cases}$$

⁵⁴ O estudante de primeiro período não deve ter estudado Cálculo de Funções de Várias Variáveis; no presente, basta que se tenha em mente que a derivada parcial em relação a uma das variáveis é calculada fixando-se as outras variáveis e derivando-se na variável considerada como no Cálculo de 1 variável.

Do primeiro par de condições:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{N} \sum_i x_i (y_i - ax_i - b) = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial b} = -\frac{2}{N} \sum_i (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \overline{xy} - a\overline{x^2} - b\overline{x} = 0 \\ \overline{y} - a\overline{x} - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{y}\overline{x} \\ \overline{x}a + b = \overline{y} \end{cases} \end{aligned}$$

Esse sistema linear não-homogêneo em a e b pode ser facilmente⁵⁵ resolvido, do que se obtém que o resíduo médio quadrático R tem um extremo para:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (6)$$

Para verificar se a função $R(a, b)$ apresenta valor mínimo para (a, b) dado por (6), devemos investigar o segundo par das condições de extremo mínimo. Como

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} = 2\overline{x^2} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} = 2\bar{x}$$

⁵⁵ Note-se que

$$a = \frac{\det \begin{pmatrix} \overline{xy} & \bar{x} \\ \bar{y} & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \overline{x^2} & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\overbrace{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}^{\sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y}}{\underbrace{\overline{x^2} - \bar{x}^2}_{\sigma_x^2}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$b = \frac{\det \begin{pmatrix} \overline{x^2} & \overline{xy} \\ \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\overline{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\overbrace{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)\bar{y} - \bar{x}\sigma_{xy}}^{\sigma_x^2}}{\sigma_x^2} = \bar{y} - a\bar{x}.$$

portanto

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4\overline{x^2} - 4\bar{x}^2 = 4\sigma_x^2 > 0$$

o que garante que o extremo é definido, e como (para garantir que os autovaleiros sejam positivos)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} = 2\overline{x^2} + 2$$

e

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} \right)^2} = 2 \sqrt{(\overline{x^2} - 1)^2 + 4\bar{x}^2}$$

o que confirma que (a, b) dado por (6) se trata de mínimo para a função $R(a, b)$.

A expressão para a pode ser trabalhada para evidenciar sua dependência em relação aos parâmetros de dispersão:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

um vez que $r = \sigma_{xy}/(\sigma_x \sigma_y)$ é o coeficiente de correlação linear das medidas⁵⁶ (x, y) .

D.2.1. Estimativa das incertezas associadas ao ajuste $y = ax + b$

Com os parâmetros a e b determinados pelas expressões (6) e pelos mesmos argumentos do §D.1.1, temos do desvio médio quadrático:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{k=1}^N (y_k - a x_k - b)^2}$$

⁵⁶ Se houver evidência dos pontos estarem alinhados, o valor desse parâmetro (r) deve ser fornecido, uma vez que avalia a qualidade dos dados, o que também reflete os cuidados na montagem do dispositivo experimental.

Para a incerteza em $a = \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k y_k - \bar{x} y_k)$:

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{N} (x_i - \bar{x}) \right)^2 \varepsilon_y^2 \\ &= \frac{1}{(\sigma_x^2)^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (x_i - \bar{x})^2 \varepsilon_y^2 \\ &= \frac{1}{(\sigma_x^2)^2} \frac{\varepsilon_y^2}{N^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{(\sigma_x^2)^2} \frac{\varepsilon_y^2}{N} \sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_a = \frac{1}{\sigma_x} \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}}\end{aligned}$$

Para a incerteza em $b = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k - a \bar{x}$:

$$\begin{aligned}\sigma_b^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \right)^2 \varepsilon_y^2 + (\bar{x})^2 \sigma_a^2 \\ &= N \frac{1}{N^2} \varepsilon_y^2 + (\bar{x})^2 \sigma_a^2 = \frac{1}{N} (\sigma_x \sqrt{N} \sigma_a)^2 + (\bar{x})^2 \sigma_a^2 \\ &= (\sigma_x^2 + \bar{x}^2) \sigma_a^2 = \overline{x^2} \sigma_a^2 \Rightarrow \sigma_b = \sqrt{\overline{x^2}} \sigma_a\end{aligned}$$

Para a incerteza em $x = \frac{1}{a}(y - b)$:

$$\varepsilon_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_y^2 = \frac{1}{a^2} \varepsilon_y^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1}{|a|} \varepsilon_y$$

D.2.2. Parâmetros do ajuste linear $y=ax+b$ e as incertezas (resumo)

Daí, o resíduo médio quadrático será mínimo para a reta $y = ax + b$ para os parâmetros a e b determinados por:

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}$$

E as incertezas estimadas por:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{k=1}^N (y_k - a x_k - b)^2}$$

a ainda

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x} \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sigma_a \sqrt{x^2}$$

No caso do ajuste ser usado para medições da grandeza x por meio de medições da grandeza y , tem-se ainda:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_y}{|a|}$$

D.3. Ajuste da função $y = f(x; \alpha)$

O caso mais geral em que se pode empregar o *método dos mínimos quadrados*, como essa método é historicamente conhecido, pode ser tratado sistematicamente procedendo a minimização do resíduo médio quadrático (ou o erro médio quadrático)

$$R(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y_i - f(x_i; \alpha)]^2$$

onde $y = f(x; \alpha)$ é uma família de funções que dependem de parâmetros α , denotados compactamente. Ou seja, a minimização de R determina os melhores valores dos parâmetros α para a função-ajuste dessa família.

Aspectos gerais de um experimento e outras discussões dos fundamentos estatísticos e probabilísticos, necessários a um amadurecimento dos tópicos citados, podem ser encontradas em vários textos básicos [1, 11, 14, 2, 22, 19, 17, 7].

E. Faixa de confiança

Em um ajuste linear, os *afastamentos* ou *desvios* (Δy_i) das medidas y_i de uma grandeza y com relação aos valores dados *hipoteticamente* por uma *reta de referência*, $f(x; \alpha, \beta) = \alpha x + \beta$, que relaciona as medidas de y com as medidas x_i de uma outra grandeza x são estimados a partir da reta ajustada $f(x; a, b) = ax + b$

$$\Delta y_i = y_i - f(x_i; \alpha, \beta) \approx y_i - f(x_i; a, b)$$

O procedimento rigoroso para estabelecermos uma faixa de confiança, a um determinado nível de confiança, para esses desvios começa a partir das incertezas nos parâmetros da reta de ajuste, (ver Apêndice D, [pág. 182](#))

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_y}{\sigma_x \sqrt{N}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sigma_a \sqrt{x^2}$$

Como esses parâmetros não são independentes, escrevendo-se a reta de ajuste como⁵⁷

$$f(x_i; a, b) = ax_i + b = \bar{y} + (x_i - \bar{x})a$$

⁵⁷ Estaremos usando as relações $\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$, $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ e $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$.

a incerteza dos valores ajustados é dada por

$$(\Delta f_i)^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{N} + (x_i - \bar{x})^2 \varepsilon_a$$
$$\Delta f_i = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}}$$

[uma vez que $\sigma_a^2 = \varepsilon_y^2 / (\sigma_x^2 N)$]. Desse modo, a variância dos dados em relação a uma reta de referência é dada por

$$(\Delta y_i)^2 = \varepsilon_y^2 + (\Delta f_i)^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{N} \left[(N+1) + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} \right]$$
$$\Delta y_i = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \sqrt{(N+1) + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}}$$

Para valores de x não muito afastados do valor médio $\bar{x}$ e $N \geq 5$

$$\Delta y \approx \varepsilon_y$$

Uma vez que ε_y é estimado a partir dos dados e dos dois parâmetros a e b , a variável $y/\Delta y$ obedece a uma distribuição de Student com $N-2$ graus de liberdade, e as curvas

$$y_1 = \underbrace{(ax + b)}_y \pm \underbrace{\frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \sqrt{(N+1) + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}}}_{\Delta y}$$

definem uma *faixa de confiança* (ver Fig. 21) para as estimativas de y a partir de x (interpolação direta).

Para as estimativas de x a partir de y (interpolação inversa), o intervalo de confiança correspondente a x será dado por⁵⁸

$$x_2 - x_1 = (x + \Delta x_2) - (x - \Delta x_1)$$

$$x_2 - x_1 \approx 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_a^2}{a^2} (x - \bar{x})^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon_a^2}{a^2}\right) \frac{\varepsilon_y^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{N}\right)}$$

e

$$x = \bar{x} + \frac{y_{\text{obs}} - \bar{y}}{a}$$

⁵⁸ Em geral, $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$.

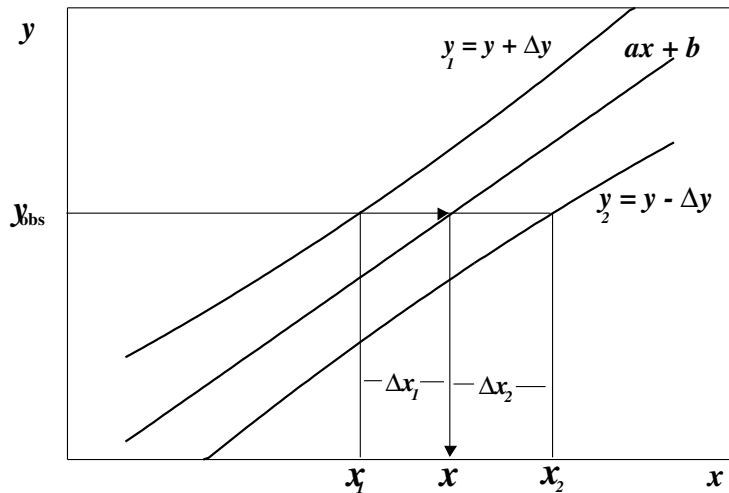


Figura 21: Faixa de confiança do ajuste linear.

Uma vez que

$$y_{\text{obs}} - y = \pm \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \sqrt{(N+1) + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}}$$

fazendo $y = \bar{y} + a(x - \bar{x})$ e elevando ao quadrado cada membro

$$\left[(y_{\text{obs}} - y) + a(x - \bar{x}) \right]^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{N} \left[(N+1) + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} \right]$$

$$\left[\left(\frac{y_{\text{obs}} - y}{a} \right) + (x - \bar{x}) \right]^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{a^2 N} \left[(N+1) + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} \right]$$

obtém-se

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\varepsilon_y^2}{Na^2\sigma_x^2}\right)}_{\alpha} \underbrace{(x - \bar{x})^2}_{X^2} + 2 \underbrace{\left(\frac{y_{\text{obs}} - \bar{y}}{a}\right)}_{\beta} \underbrace{(x - \bar{x})}_X +$$
$$\underbrace{\left[-\frac{\varepsilon_y^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{y_{\text{obs}} - \bar{y}}{a}\right)^2 \right]}_{\gamma^2 = \beta^2 - \delta^2} = 0$$

cujas soluções são dadas por

$$X = \frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma^2}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x} + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma^2} \\ x_2 = \bar{x} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma^2} \end{cases}$$

assim,

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= \frac{2}{\alpha} \sqrt{\beta^2 - \alpha \gamma^2} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\beta^2 - \alpha \beta^2 + \alpha \delta^2} \\&= \frac{2}{\alpha} \sqrt{(1 - \alpha) \beta^2 + \alpha \delta^2}\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \frac{\varepsilon_y^2}{Na^2 \sigma_x^2} = 1 - \frac{\varepsilon_a^2}{a^2} \\ \beta &= \frac{y_{\text{obs}} - \bar{y}}{a} = x - \bar{x} \quad \text{e} \\ \delta^2 &= \frac{\varepsilon_y^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{N}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= \frac{2}{1 - \frac{\varepsilon_a^2}{a^2}} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2 (x - \bar{x})^2 + \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2\right] \frac{\varepsilon_y^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{N}\right)} \\ x_2 - x_1 &\approx 2 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2 (x - \bar{x})^2 + \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2\right] \frac{\varepsilon_y^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{N}\right)}\end{aligned}$$

as incertezas inferiores e superiores são

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x - x_1 \\ &= -\left[\frac{\varepsilon_a}{a}\right]^2 (x - \bar{x}) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2 (x - \bar{x})^2 + \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2\right] \frac{\varepsilon_y^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{N}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &= x_2 - x \\ &= +\left[\frac{\varepsilon_a}{a}\right]^2 (x - \bar{x}) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2 (x - \bar{x})^2 + \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2\right] \frac{\varepsilon_y^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{N}\right)}\end{aligned}$$

Para $r \approx 1$ (i.e., $\left|\frac{\varepsilon_a}{a}\right| \ll 1$) e $N \gtrsim 5$

$$x_2 - x_1 \approx 2 \frac{\varepsilon_y}{a} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 \approx \Delta x_2 \approx \frac{\varepsilon_y}{a} = \varepsilon_x$$

F. Observações

F.1. Grandezas

O Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais em Metrologia [4], conhecido como VIM, após a definição de grandeza, faz as observações que transcrevemos:

1. O termo “grandeza” pode referir-se a uma *grandeza em um sentido geral* ou a uma *grandeza específica*.
 - (a) Grandezas em um sentido geral:
 - comprimento,
 - tempo,
 - massa,
 - temperatura,
 - resistência elétrica,
 - quantidade de matéria.
 - (b) Grandezas em um sentido específico:
 - comprimento de uma barra,
 - resistência elétrica de um fio,
 - concentração de etanol em uma amostra de vinho.

2. Grandezas que podem ser classificadas, uma em relação a outra, em ordem crescente ou decrescente são denominadas *grandezas de mesma natureza*.
3. Grandezas de mesma natureza podem ser agrupadas em conjuntos de categorias de grandezas, por exemplo:
 - trabalho, calor, energia;
 - espessura, circunferência, comprimento de onda.
4. Os símbolos das grandezas são dados na norma ISO 31.

No presente texto estaremos empregando o termo *grandeza* no sentido específico.

F.2. Algumas definições retiradas do VIM

Além das observações sobre grandeza, o VIM estabelece o significados dos principais termos utilizados em metrologia e no tratamento de dados obtidos por medições. Listamos, em seguida, alguns desses termos em ordem alfabética e os seus significados.

Calibração (aferição)	Conjunto de operações que estabelece, sob condições específicas, a relação entre os valores indicados por um instrumento de medição ou sistema de medição ou valores representados por uma medida materializada ou um material de referência, e os correspondentes das grandezas estabelecidas por padrões. 1. O resultado de uma calibração permite tanto o estabelecimento dos valores do mensurando para as indicações como a determinação das correções a serem aplicadas. 2. Uma calibração pode, também, determinar outras propriedades metrológicas como efeito das grandezas de influência. 3. O resultado de uma calibração pode ser registrado em um documento, algumas vezes denominado certificado de calibração ou relatório de calibração.
-----------------------	---

desvio-padrão experimental	Para uma série de n medições de uma grandeza, o parâmetro (s) que caracteriza a dispersão dos dados, é dada pela fórmula $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$ onde x_i representa o resultado da “i-ésima” medição e $\bar{x}$ a média aritmética dos n resultados considerados. 1. Considerando uma série de n valores como uma amostra de uma distribuição, $\bar{x}$ é uma estimativa não tendenciosa da média μ e s^2 é uma estimativa não tendenciosa da variância desta distribuição. 2. A expressão $s/\sqrt{n}$ é uma estimativa do desvio-padrão da distribuição de $\bar{x}$ e é denominada erro padrão experimental.
Grandeza	Atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado.
Indicação (de um instrumento de medição)	Valor de uma grandeza fornecido por um instrumento de medição. Para uma medida materializada, a indicação é o valor a ela atribuído.
Medição	Conjunto de operações que tem por objetivo determinar um valor de uma grandeza.

Medição, faixa de, (faixa de trabalho)	Conjunto de valores de um mensurando para o qual se admite que o erro de um instrumento de medição mantém-se dentro dos limites especificados.
Medição, incerteza de,	Parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentalmente atribuídos a um mensurando. 1. O parâmetro pode ser, por exemplo, um desvio-padrão (ou múltiplo dele), ou a metade de um intervalo correspondente de um intervalo a um nível de confiança estabelecido. 2. A incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados das séries de medições e podem ser caracterizados por desvios-padrão experimentais. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvios-padrão, são avaliados por meio de distribuição de probabilidades assumidas, baseadas na experiência ou em outras informações. 3. Entende-se que o resultado da medição é a melhor estimativa do valor do mensurando, e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

Medição, resultado de uma,	Valor atribuído a um mensurando obtido por medição. 1. Quando o resultado é dado, deve-se indicar claramente se ele se refere: à indicação; ao resultado não corrigido; e se corresponde ao valor médio de várias medições. 2. Uma expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza de medição.
Medições, reprodutibilidade dos resultados de,	Grau de concordância entre os resultados das medições de um mesmo mensurando efetuadas sob condições variadas de medição.
Medições, repetitividade de resultados de,	Grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando efetuadas sob as mesmas condições de medição. 1. Estas condições são denominadas condições de repetitividade. 2. Condições de repetitividade incluem: mesmo procedimento de medição; mesmo observador; mesmo instrumento de medição, utilizado nas mesmas condições; mesmo local; repetição em curto período de tempo. 3. Repetitividade pode ser expressa, quantitativamente, em função das características da dispersão dos resultados.

Valor (de uma grandeza)	Expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número.
Sensibilidade	Varição da resposta de um instrumento de medição dividida pela correspondente variação do estímulo.
Escala	Conjunto ordenado de marcas, que faz parte de um dispositivo mostrador de um instrumento de medição. Cada marca é denominada marca da escala.
Comprimento de escala	Para uma dada escala, é o comprimento da linha compreendida entre a primeira e a última marca, passando pelo centro de todas as marcas menores. 1. A linha pode ser real ou imaginária, curva ou reta. 2. O comprimento da escala é expresso em unidades de comprimento, qualquer que seja a unidade do mensurando ou a unidade marcada sobre a escala.
Divisão de escala	Parte de uma escala compreendida entre duas marcas sucessivas quaisquer.

Comprimento de uma divisão	Distância entre duas marcas sucessivas quaisquer, medida ao longo da linha de comprimento de escala. O comprimento de uma divisão é expresso em unidades de comprimento, qualquer que seja a unidade do mensurando ou a unidade marcada sobre a escala.
Resolução (de um dispositivo mostrador)	Menor diferença entre indicações de um dispositivo mostrador que pode ser significativamente percebida. 1. Para dispositivos mostrador digital, é a variação na indicação quando o dígito menos significativo varia de uma unidade. 2. Este conceito também se aplica a um dispositivo registrador.
Limites de erros admissíveis (de um instrumento de medição)	Valores extremos de um erro admissível por especificações, regulamentos, etc., para um dado instrumento de medição.

G. Alguns valores de referência

G.1. Constantes Físicas Fundamentais⁵⁹

Grandeza	Símb.	Valor	Unid.	Incerteza relativa padrão
veloc. da luz no vácuo	c	299.792.458	m s^{-1}	(exato)
carga elementar	e	$1,602.176.462(63) \times 10^{-19}$	C	$3,9 \times 10^{-8}$
massa do elétron	m_e	$9,109.381.88(72) \times 10^{-31}$	kg	$7,9 \times 10^{-8}$
massa do proton	m_p	$1,672.621.58(13) \times 10^{-27}$	kg	$7,9 \times 10^{-8}$

Tabela 15: Constantes físicas fundamentais.

O valor c exato da velocidade da luz no vácuo é o adotado pelo SI para definição atual do metro⁶⁰.

⁵⁹ Fonte: Peter J. Mohr and Barry N. Taylor, CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, Vol. 28, No. 6, 1999 and *Reviews of Modern Physics*, Vol. 72, No. 2, 2000.

⁶⁰ **Transcrição da definição da unidade de comprimento (metro) do SI**

“A definição do metro baseada no protótipo internacional em platina iridiada, em vigor desde 1889, foi substituída na 11ª CGPM (1960) por uma outra definição baseada no comprimento de onda de uma radiação do criptônio 86, com a finalidade de aumentar a exatidão da realização

G.2. Aceleração da gravidade

Aceleração da gravidade local no *Rio de Janeiro*

Região	aceleração
A	$9,78789849(14) \text{ m s}^{-2}$
B	$9,78791660(15) \text{ m s}^{-2}$
E	$9,78782905(15) \text{ m s}^{-2}$

Tabela 16: Valores de referência da aceleração da gravidade local no Rio de Janeiro.

do metro. A 17ª CGPM (1983, Resolução 1; CR 97 e Metrologia, 1984, 20, 25) substituiu, em 1983, essa última definição pela seguinte:

‘O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299.792.458$ de segundo.’

Essa definição tem o efeito de fixar a velocidade da luz em $299.792.458 \text{ m s}^{-1}$, exatamente. O antigo protótipo internacional do metro, que fora sancionado pela 1ª CGPM em 1889, é conservado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas nas mesmas condições que foram fixadas em 1889.”

Fonte: COORDENAÇÃO DA ÁREA DE GEOFÍSICA – CGE
Ajustamento da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira
ON–OBSERVATÓRIO NACIONAL. Disponível em:
www.on.br/institucional/geofisica/areapage/gravimetria/rgfbabs.html

Nota Transcrevemos a *Decisão relativa às unidades de base do Sistema Internacional*, “3ª CGPM, 1901(CR, 70): DECLARAÇÃO RELATIVA À UNIDADE DE MASSA E À DEFINIÇÃO DO PESO; VALOR CONVENCIONAL DE g_n ”, 3º item: (sic)

O número adotado no Serviço Internacional de Pesos e Medidas para o valor da aceleração normal da gravidade é $980,665 \text{ cm/s}^2$, valor já sancionado por diversas legislações.

H. Resumo

Apresentamos nesse apêndice o resumo dos principais conceitos introduzidos no texto, seguindo a ordem com que foram introduzidos.

Grandeza atributo de um fenômeno ou sistema físico que pode ser distinguido qualitativamente e determinado quantitativamente. (pág. 12)

Dados valores ou qualificações de atributos associados aos elementos de um conjunto⁶¹. (pág. 13)

Medidas dados numéricos associados às grandezas relativas a um fenômeno ou sistema físico, resultantes de medições. (pág. 13)

Medição ato ou processo de aquisição de dados que tem como objetivo associar um valor (uma medida) a uma grandeza. (pág. 13)

⁶¹ Dados em estado bruto: listagem de dados conforme obtidos, sem ordenamento ou divisão em classes de frequências.

População conjunto ou coleção, hipotético ou não, da totalidade dos dados associados a um fenômeno ou sistema. (pág. 13)

Amostra subconjunto acessível e disponível de uma população, do qual se pode ou deseja-se extrair conclusões acerca da população. (pág. 13)

Classes intervalos de valores (ou qualificações) os quais os dados de uma coleção são agrupados. (pág. 18)

Frequência número de ocorrências dos dados de uma população em determinada classe de seu conjunto de dados. (pág. 18)

Histograma (de barras) representação gráfica de uma distribuição de frequência em que as frequências de classes são representadas pelas áreas de retângulos contíguos e verticais, com as bases colineares e proporcionais aos intervalos das classes. (Auréliio)

Histograma setorial representação gráfica de uma distribuição de frequência em que as frequências de classes são representadas pelas áreas de setores

circulares contíguos proporcionais às frequências das classes.

Média aritmética

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{pág. 27})$$

Média quadrática

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (\text{pág. 27})$$

Valor eficaz

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{x^2}} \quad (\text{pág. 28})$$

Moda (x_{mod}) o valor mais freqüente em uma coleção de dados ou numa subcoleção de classes desses dados. (pág. 28)

Mediana (x_{med}) o valor que divide uma distribuição ordenada de dados, tal que metade dos dados estão acima e metade abaixo desse valor. (pág. 28)

Amplitude (A) diferença entre os valores máximo e mínimo do conjunto de dados. (pág. 30)

Desvio médio absoluto
$$|\overline{\delta x}| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta x_i|$$
 (pág. 30)

Variância
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$
 (pág. 31)

Desvio-padrão

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$
 (pág. 33)

Largura a meia altura (Γ) amplitude dos dados correspondentes à metade da frequência máxima ($f_{\max}$) do conjunto de dados. (pág. 33)

Parâmetros de correlação (pág. 40)

Covariância entre N pares (x_i, y_i) de medidas associadas às grandezas x e y : (pág. 41)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)(\delta y_i) = \overline{xy} - \bar{x} \bar{y}$$

Coefficiente de correlação linear de Pearson

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (\text{pág. 43})$$

Resultado da medição de uma grandeza

RESULTADO DA MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

estimativa do valor esperado $\pm$ estimativa do erro
(e o correspondente nível de confiança)

Medidas diretas Valores resultantes de medições de uma mesma grandeza, realizadas por um mesmo experimentador, com um mesmo instrumento de leitura e nas mesmas condições ambientais. (pág. 54)

Estimativa do *valor esperado* A melhor estimativa para o *valor esperado* de uma grandeza a partir de um conjunto de medidas diretas e cuidadosas da mesma, é a *média*. (pág. 55)

Exatidão ou acurácia Conceito qualitativo para o afastamento entre uma estimativa final e o valor esperado de uma grandeza; associado em geral a *efeitos sistemáticos* aditivos, resultantes de imperfeições instrumentais, observacionais ou teóricas, que provocam desvios regulares em todas as medidas. (pág. 58)

Precisão Conceito qualitativo para a dispersão das medidas de uma grandeza em torno da média; associada em geral a *efeitos aleatórios*, resultantes de flutuações inevitáveis no processo de medição. (pág. 58)

Erro relativo Conceito quantitativo para a dispersão das medidas de uma grandeza em torno da média

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} \quad \text{e} \quad \varepsilon\% = 100 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{|\bar{x}|}$$

se $\bar{x} \neq 0$, onde $\sigma_{\bar{x}}$ é a incerteza considerada para a amostra. (pág. 73)

Lei dos erros A característica fundamental de um conjunto $\{x_i\}$ de N medidas de uma grandeza x que se distribuem normalmente com média $\bar{x}$ e desvio-padrão σ_x , é: (pág. 65)

68,3% das medidas estão entre $\bar{x}-\sigma_x$ e $\bar{x}+\sigma_x$

95,5% das medidas estão entre $\bar{x}-2\sigma_x$ e $\bar{x}+2\sigma_x$

99,7% das medidas estão entre $\bar{x}-3\sigma_x$ e $\bar{x}+3\sigma_x$

Erro em cada medida

(pág. 67)

Uma estimativa para o *erro em cada medida* a partir de um conjunto $\{x_i\}$ de medidas diretas de uma grandeza x , é o *desvio-padrão* (σ_x).

Erro da média

(pág. 68)

Uma estimativa para o **erro na estimativa do valor esperado**, ou seja, para o **erro da média**, a partir de um conjunto de N medidas diretas $\{x_1, x_2, x_3 \dots x_N\}$ de uma mesma grandeza x , com desvio-padrão σ_x é dada pelo *desvio-padrão amostral* ($\sigma_{\bar{x}}$),

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

A melhor estimativa para o valor esperado e a incerteza associados a uma grandeza x , extraída de uma amostra de N medidas diretas $\{x_1, x_2 \dots x_N\}$ é dada por

$$\boxed{\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}} \quad \text{onde}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{média das medidas}),$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{erro da média}).$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (\text{erro em cada medida}),$$

INTERVALO DE CONFIANÇA	NÍVEL DE CONFIANÇA
$(\bar{x} - 0,67 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 0,67 \sigma_{\bar{x}})$	50,0%
$(\bar{x} - 1,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,00 \sigma_{\bar{x}})$	68,3%
$(\bar{x} - 1,65 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,65 \sigma_{\bar{x}})$	90,0%
$(\bar{x} - 1,96 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,96 \sigma_{\bar{x}})$	95,0%
$(\bar{x} - 2,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2,00 \sigma_{\bar{x}})$	95,5%
$(\bar{x} - 3,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 3,00 \sigma_{\bar{x}})$	99,7%

A partir da amostra $\{x_1, x_2 \dots x_N\}$ de N medidas, diretas e independentes, de uma grandeza x , o *nível de confiança* de que o intervalo $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$ contenha o seu *valor esperado* é de 68,3%,

$$\text{onde } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Erro padrão

(pág. 84)

Uma vez determinados os erros dos tipo A e B, σ_A e σ_B , com nível de confiança da ordem de 68 %, o chamado *erro padrão* da estimativa do valor esperado de uma grandeza pode ser expresso pela combinação em quadratura,

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Arredondamento

(pág. 86)

A regra prática para o *arredondamento* é truncar o número até a posição desejada e tratar os algarismos retirados como uma fração decimal do seguinte modo:

1. Se a fração for maior que $1/2$, o último algarismo significativo restante é incrementado de um dígito.
2. Se a fração for menor que $1/2$, não há incremento.
3. Se a fração for igual a $1/2$, o último algarismo restante é incrementado apenas se o penúltimo algarismo for ímpar.

Compatibilidade e significância

(pág. 90)

A *compatibilidade* entre uma estimativa $\bar{x}$ do valor de uma grandeza x e um valor de referência x_{ref} pode ser avaliada comparando-se a *discrepância* $|\bar{x} - x_{\text{ref}}|$ com o erro padrão $\sigma_{\bar{x}}$ da estimativa.

Se a discrepância cai na região entre $2\sigma_{\bar{x}}$ e $3\sigma_{\bar{x}}$, ela é referida, simplesmente, como “significante”, o experimento é dito inconclusivo e deve, se possível, ser repetido com novas técnicas ou maiores cuidados com as medidas.

Comparação entre duas estimativas

(pág. 92)

- Se os intervalos de confiança de 68 % das estimativas interceptam-se, a compatibilidade está assegurada.
- Se os intervalos são disjuntos, aumenta-se o nível de confiança até que haja a intersecção.
- Intersecções até o nível de 95 %, ou 2σ , são julgadas aceitáveis e acima de 3σ inaceitáveis.

Propagação de incertezas

Medidas indiretas envolvendo adição ou subtração

(pág. 102)

se $z = x + y$ ou $z = x - y$,

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \text{ ou } \bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$$

Medidas indiretas envolvendo multiplicação ou divisão

(pág. 103)

se $z = x y$ ou $z = x/y$,

$$\bar{z} = \bar{x} \bar{y} \text{ ou } \bar{z} = \bar{x} / \bar{y} \quad \text{e} \quad \frac{\sigma_{\bar{z}}}{|\bar{z}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

Ajuste linear de N pares conjugados (x_i, y_i) à reta de equação

$$y = ax + b$$

$$a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

onde:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

(coeficiente de correlação linear)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

(desvio-padrão)

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2} = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

(desvio-padrão)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ &= \overline{xy} - \bar{x} \bar{y}\end{aligned}$$

(covariância)

Erros (incertezas) no ajuste linear

$$\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{N-2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - a x_i - b)^2}{N-2}}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_y}{a}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x} \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{\sigma_x^2 N}}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{\bar{x}^2}{\sigma_x^2}}$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Prefixos SI

Fator	Nome	Símbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	quilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z

A fonte dos símbolos⁶² é o documento oficial do SI (BIPM–1998; NIST–2001).

A fonte da ortografia em português é o INMETRO (Portaria nº 002, de 06 de janeiro de 1993).

Note-se o equivalente aos seguintes prefixos:

k = um mil da unidade indicada = 10^3 = 1.000

M = um milhão da unidade indicada = 10^6 = 1.000.000

G = um bilhão da unidade indicada = 10^9 = 1.000.000.000

T = um trilhão da unidade indicada = 10^{12} = 1.000.000.000.000

⁶² O símbolo para o *micro* é a letra grega μ , desse modo não-inclinado, e não μ , em itálico, que fica reservado para variável matemática, p.ex., $\mu = 12,3 \mu m$, que se lê “mi igual a 123 décimos de micro metro”.

Alfabeto grego

	minúscula	maiúscula
alfa (alpha)	α	A
beta	β	B
gama (gamma)	γ	Γ
delta	δ	Δ
épsilon (epsilon)	ϵ, ε	E
zeta (dzeta)	ζ	Z
eta	η	H
teta (theta)	θ, ϑ	Θ
iota	ι	I
capa (kappa)	κ	K
lambda	λ	Λ
mi (mu)	μ	M
ni (nu)	ν	N
csi (xi)	ξ	Ξ
ômicron (omicron)	$\omicron$	O
pi	π, ϖ	Π
rô (rho)	ρ, ϱ	P
sigma	σ, ς	Σ
tau	τ	T
ípsilon (upsilon)	υ	Υ
fi (phi)	ϕ, φ	Φ
qui (ou chi)	χ	X
psi	ψ	Ψ
ômega (omega)	ω	Ω

Tabelas

1	Idades, massas e alturas	21
2	Comprimentos de bancadas do laboratório	22
3	Distribuição de frequência de comprimentos das bancadas . . .	22
4	Distribuição de frequência e histograma das idades	23
5	Distribuição de frequência e histograma das massas	24
6	Distribuição de frequência das alturas por classes	25
7	Distribuição de frequência dos comprimentos de bancadas . . .	26
8	Resumo dos dados referentes às turmas de Física Geral	36
9	Correlações e variâncias dos pares de grandezas da Tab. 1	45
10	Intervalos de confiança e níveis de confiança	75
11	Relação entre números de medidas, graus de liberdade e níveis de confiança, associados à distribuição de Student	78
12	Dados para calibração de um dinamômetro de mola	131
13	Medidas das alturas (h) e dos alcances (s).	135
15	Constantes físicas fundamentais	200

16	Valores de referência da aceleração da gravidade local no	
	Rio de Janeiro.	201
	Prefixos SI	223
	Alfabeto grego	225

Figuras

1	Diagrama de um experimento genérico em Física	16
2	Exemplo da <i>largura a meia altura</i> Γ	34
3	Diagramas de dispersão de dados obtidos de uma turma	41
4	Efeitos de incertezas aleatórias e de incertezas sistemáticas	59
5	Tiro ao alvo.	61
6	Tiro ao alvo?	62
7	Distribuição das medidas e a distribuição gaussiana limite	66
8	Distribuições amostrais das medidas de uma grandeza	70
9	Distribuição das médias amostrais	71
10	Comparação entre resultados	94
11	Comparação entre resultados	95
12	Comparação entre resultados	96
13	Composição de erros e o teorema de Pitágoras	105
14	Composição de erros e a lei dos cossenos	106
15	Relação entre a inclinação da reta de ajuste, do coeficiente de correlação e dos desvios padrão	114

16	Reta de calibração de um dinamômetro, parâmetros de ajuste e coeficiente de correlação	125
17	Faixa de confiança padrão associada ao ajuste de uma mola . . .	127
18	Rolamento e queda de uma esfera.	133
19	Diagrama de dispersão entre $y=h$ e $x=s^2$	134
20	Resíduo para o ajuste linear, método dos mínimos quadrados .	169
21	Faixa de confiança do ajuste linear	187

Bibliografia

- [1] R. J. Barlow, *Statistics — a guide to the use of statistical methods in the physical sciences*, John Wiley & Sons, 1997.
- [2] P. R. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed., MacGraw-Hill, Inc., 1992.
- [3] BIPM/IEC/IFCC/ISO/IUPAC/IUPAP/OIML, *Guia para expressão da incerteza de medição*, 2ª ed., Versão Brasileira⁶³, INMETRO, 1998.
- [4] ———, *Vocabulário internacional de termos fundamentais e gerais de metrologia — VIM*, 2ª ed., Versão Brasileira⁶⁴ — INMETRO, Brasília, 2000, Disponível em formato PDF em inmetro.gov.br/infotec/vim.asp.
- [5] Coordenação da Área de Geofísica – CGE – ON, *Ajustamento da rede gravimétrica fundamental brasileira*, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, 1995, Valores de referência para aceleração local de gravidade no Brasil

⁶³Tradução do *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, first edition, 1993, corrected and reprinted 1995, ISO; documento conhecido como ISO-GUM.

⁶⁴Tradução do *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology* – ISO, second edition 1993; documento conhecido como VIM.

disponível em

on.br/institucional/geofisica/areapage/gravimetria.

- [6] S. F. Costa, *Introdução ilustrada à estatística*, Editora Harbra, 1999.
- [7] G. Cowan, *Statistical data analysis*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [8] H. Crámer, *Mathematical methods of statistical*, Princeton University Press, 1999.
- [9] A. Crespo, *Estatística fácil*, Editora Saraiva, 1999.
- [10] P. L. de O. Costa Neto, *Estatística*, Editora Egdard Blücher Ltda., 1977.
- [11] H. Macedo, *Teoria dos erros experimentais*, Monografias de Física XIV, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1963.
- [12] Marcos Nascimento Magalhães and Antonio Carlos Pedroso de Lima, *Noções de probabilidade e estatística*, 4ª ed., Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [13] P. L. Meyer, *Probabilidade — aplicações à estatística*, 2ª ed., Livros Técnicos e Científicos Editora, 1983.

- [14] J. Orear, *Notes on statistics for physicists* — 1958, Laboratory for Nuclear Studies (1982), Cornell University, Ithaca, NY 14853, (Revised), Lawrence Radiation Laboratory, 1982.
- [15] W. Spinelli and M. H. S. de Souza, *Introdução à estatística*, Editora Ática, 1997.
- [16] S. M. Stigler, *The history of statistical (the measurement of uncertainty before 1900)*, Harvard University Press, 1986.
- [17] J. R. Taylor, *Error analysis: The study of uncertainties in physical measurements* — 1982, 2nd ed., University Science Books, 1997.
- [18] S. Vieira, *Elementos de estatística*, Editora Atlas, 1999.
- [19] J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria de erros*, 2ª ed., Editora Egdard Blücher Ltda., São Paulo, 1996.
- [20] ———, *Avaliação e expressão de incerteza em medição*, Revista Brasileira de Ensino de Física **21** (1999), no. 3.
- [21] W. A. Wallis and H. V. Roberts, *Curso de estatística* — 1956, Editora Fundo de Cultura, 1964.

- [22] E. B. Wilson Jr, *An introduction to scientific research* — 1952, Dover Publications, Inc., 1990.
- [23] G. U. Yule and M. G. Kendall, *An introduction to the theory of statistics*, Griffin & Co., 1968.

Índice

aceleração

da gravidade no Rio de Janeiro, 201

acurácia, 58

ajuste

de função, 102, 112, 119

linear, 112, 119, 123, 168

alfabeto

grego, 225

algarismos

significativos, 86

amostra, 13, 53

amplitude, 30

arredondamento, 87, 215

calibração

reta de, 123

causa e efeito, 112

classes

de frequências, 18, 19

coeficiente

de correlação, 43

de correlação linear

de Pearson, 43

compatibilidade, 63, 90, 91, 136, 216

com o zero, 93

comprimento

de escala, 198

de uma divisão, 199

confiança

faixa de, 126, 128, 186

intervalo de, 75

nível de, 74, 124, 214

correlação, 40, 44

coeficiente de, 43

linear, 44

negativa, 42

parâmetro de, 40

positiva, 42

covariância, 41

matriz de, 47

critério

de Rayleigh, 80

dados, 12, 13

- brutos, 17
- coleta de, 13
- descrição de, 14
- desvio, 30, 41, 90, 184
 - médio
 - absoluto, 30
- desvio-padrão, 33, 67, 211
 - amostral, 212
 - experimental, 72, 195
- determinação
 - de parâmetros, 117
 - indireta, 117
- discrepância, 63, 90, 216
 - significativa, 91
- dispersão, 58
 - diagramas de, 40
 - parâmetros de, 30
- distribuição
 - amostral, 55
 - de frequência, 18
 - de Gauss, 65, 76, 143
 - de Student, 76
 - gaussiana, 65, 76, 143
 - normal, 65

- padrão, 143
- divisão
 - de escala, 198
- erro, 52
 - da média, 68, 69, 77, 212
 - do erro da média, 68
 - do Tipo I, 92
 - do Tipo II, 92
 - em cada medida, 72
 - em medida, 211
 - em uma medida, 67
 - na estimativa
 - do valor esperado, 69, 212
 - padrão, 84, 215
 - experimental, 195
 - relativo, 73
 - percentual, 73
- erros
 - análise de, 12
 - lei dos, 65
 - tipos de, 55
- escala, 198
- estado

bruto, 17
Estatística, 12, 15
exatidão, 58, 60
exercícios, 37, 51, 98, 120, 121, 130
experimento, 2, 13, 14
 em Física, 12
 esquema de um, 16

faixa
 de confiança, 126
Fisher
 Ronald A. (1890–1962), 55
frequência
 distribuição de, 18
frequências, 18
 classes de, 18, 19
 tabelas de, 18
função
 de ajuste, 170
Física, 2
 experimento em, 12

Gauss
 distribuição, de, 76, 143

Gosset
 Willian S. (1876 – 1937), 76
grandezas, 12
 não-correlatas, 43
graus de liberdade, 76

histograma, 18, 19

incerteza, 12, 67
 aleatória, 55, 63
 do tipo B, 79
 do tipo A, 64
 do tipo B, 64, 77
 estatística, 55
 sistemática, 55, 63
 aditiva, 56
 multiplicativa, 57
incompatibilidade, 91
instrumento
 analógico, 80
 digital, 83
interpolação
 direta, 124
 inversa, 124

intervalo

de confiança, 74, 75

largura a meia altura (Γ), 33

least squares, 170

lei

dos erros, 65

experimental, 135

Física, 2

limite

de erro, 80, 199

marca

da escala, 198

matriz

de covariância, 47, 48

de dados, 47

medição, 13

resultado da, 53

resultado de uma, 72

mediana, 28

medidas, 12, 13

diretas, 54

indiretas, 101

envolvendo multiplicação, 103

moda, 28

média, 55, 209

amostral, 68

aritmética, 27

quadrática, 27

método

da máxima verossimilhança, 55

dos mínimos quadrados, 113, 168,
170, 183

nível

de confiança, 74, 79, 124, 214

de pequenas amostras, 77

parâmetro

de correlação, 40

de dispersão, 30

de posição, 27

central, 27

de um sistema, 117

pdf, 143

Pearson

coeficiente de, 43

Karl (1857–1936), 43
pequenas amostras, 72
Poincaré
 J. Henri (1854–1912), 65
população, 13, 53
precisão, 57, 58, 60, 73
prefixos
 SI, 222
propagação
 de erros, 101, 152, 155, 160
 exemplos, 163
 fórmula de, 111

radiano, 111, 166, 167
raiz
 da média quadrática, 28
referência
 valor de, 63
regressão, 113
 linear, 112
relação de causa e efeito, 112
resolução, 80, 199
resultado
 de uma medição, 72

reta
 de calibração, 124
 de referência, 184
rms (root mean square), 28

sensibilidade, 77, 198
Student
 t de, 77
 distribuição de, 76

tabelas, 17
 de frequências, 18
tempo
 de reação, 80
teoria
 física, 2

valor
 de referência, 63, 90, 91
 eficaz, 28
 esperado, 52, 55, 60, 107, 209, 213
 médio, 52
variância, 31, 32