



# **Cinemática Relativística em Física de Partículas**

**Professores**

**Sandro Fonseca de Souza**

**Dilson de Jesus Damião**

# Sumário

- **Motivações**
- **Transformações de Lorentz**
- **Sistemas de referência para processos de colisão em FAE**
- **Variáveis cinemáticas**
- **Variáveis de Mandelstam**
- **Seção de Choque**
- **Espaço de Fase para decaimento de dois corpos**

# Bibliografia Sugerida

- **E. Byckling and K. Kajantie - *Particle Kinematics, March 1971, Finland.***
- **R. Hagedorn - *Relativistic Kinematics: A guide to the Kinematic problems of High Energy Physics***
- **S. Novaes - *Cinemática Relativística, UNESP-SP, Brasil***

# Motivações

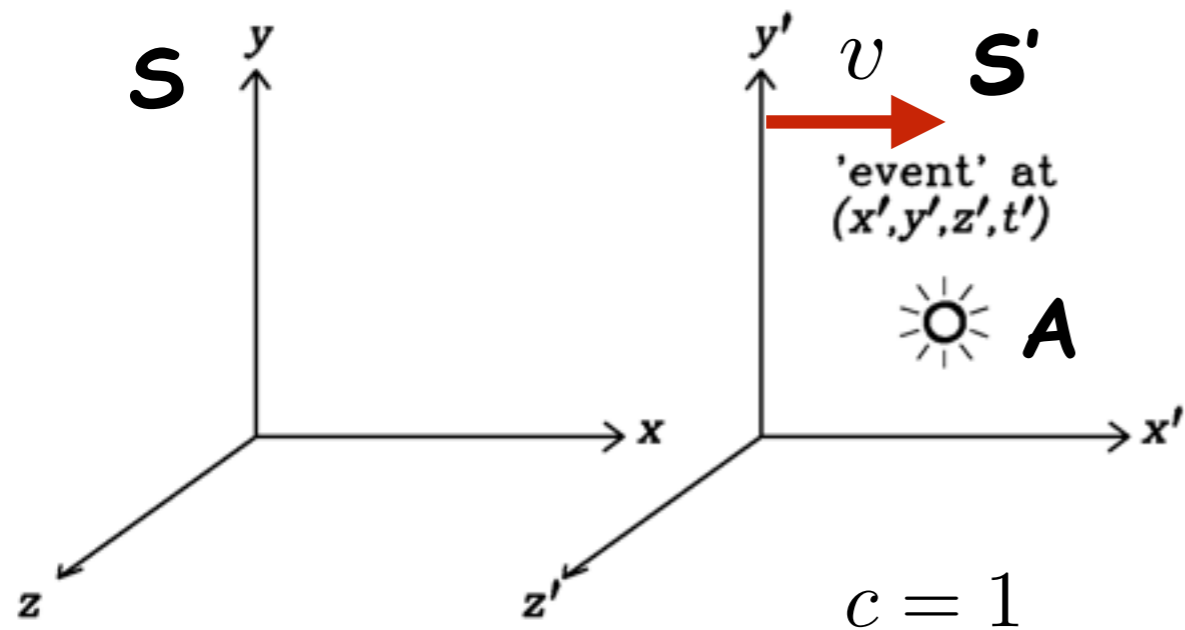
- **Introdução dos princípios básicos, aplicações práticas e métodos conhecidos dos aspectos da FAE que são baseados puramente na cinemática.**
- **Cinemática pode ser definida como “a geometria do movimento”**
- **Cinemática relativística é uma aplicação da relatividade especial para reações com partículas elementares.**

# Motivações

- **Do ponto de vista da puramente cinemático, partículas são completamente caracterizados por suas energias e momentum (ex. seus quadrimomentum  $p$ );**
- **As reações de partículas observáveis são por tanto os decaimentos ou colisões;**
- **Os números quânticos internos são irrelevantes para a cinemática das partículas elementares.**

# Transformações de Lorentz

$$v_x = |v| = v$$



- Considerando um ponto  $A$  no espaço tempo onde:
  - ▶  $S$  pode ser descrito  $(x, y, z, t)$
  - ▶ e  $S'$  (em movimento) pode ser descrito  $(x', y', z', t')$
- (1) Considerando que o sistema  $S'$  se move com uma velocidade constante  $v$  ao longo do eixo  $x$

$$S \Rightarrow S'$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx) \end{aligned}$$

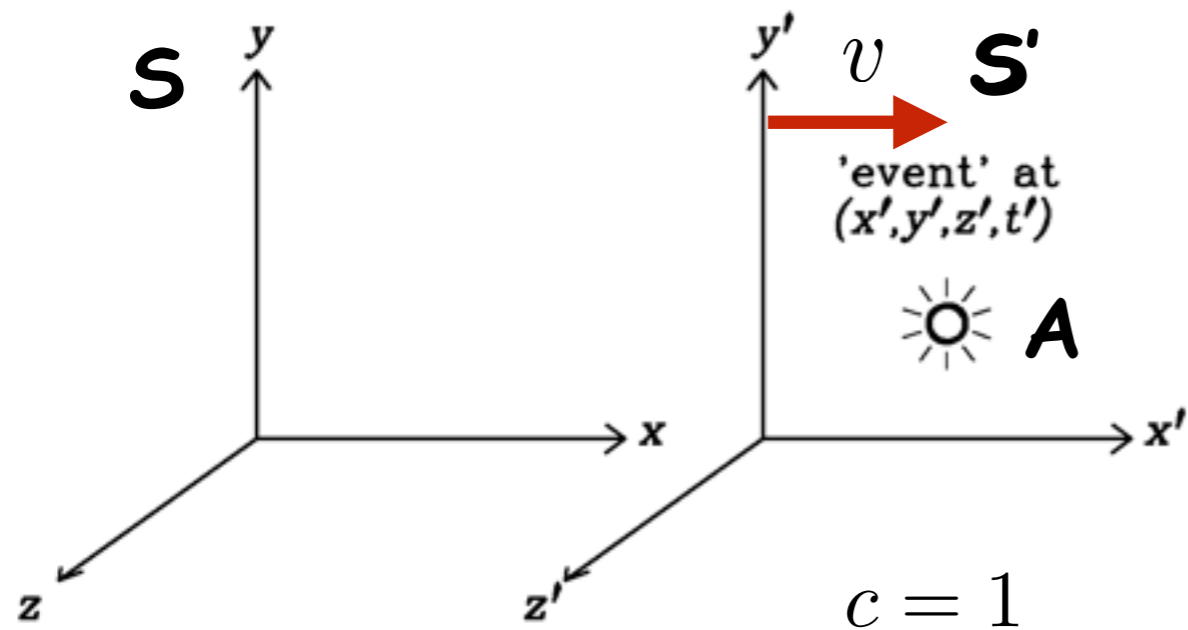
$$S' \Rightarrow S$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx') \end{aligned}$$

$$\text{fator de Lorentz } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

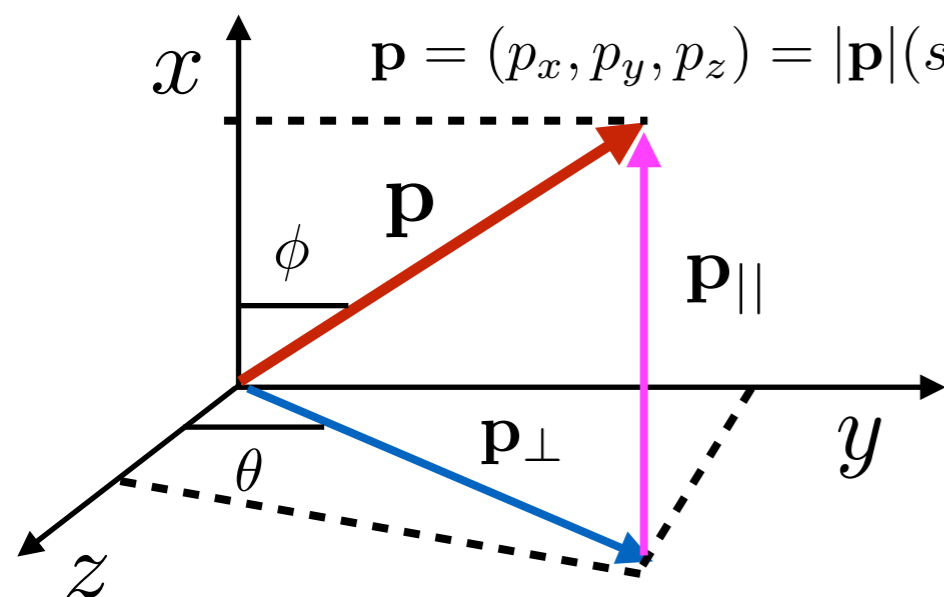
# Transformações de Lorentz

$$v_x = |v| = v$$



- Considerando o quadri-momentum
  - $S$  pode ser descrito  $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{E}, p) = (\mathbf{E}, p_x, p_y, p_z)$
  - e  $S'$  (em movimento) pode ser:  $\mathbf{p}' \equiv (\mathbf{E}', p') = (\mathbf{E}, p'_x, p'_y, p'_z)$
  - As transformações de Lorentz para o quadri-momentum são:

fator de Lorentz  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$



$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = |\mathbf{p}|(\text{sen}\theta\text{cos}\phi, \text{sen}\theta\text{sen}\phi, \text{cos}\theta)$$

$$\mathbf{p}_{||} = p_x = \mathbf{p}\text{cos}\theta$$

$$\mathbf{p}_{\perp} = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$$

Cinemática Relativística

$$S \Rightarrow S'$$

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - vE) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma(E - vp_x) \end{aligned}$$

# Noções e Convenções



Unidades Naturais

$$c = \hbar = 1$$

**Exercício 0 : Quando um pión decai em dois fótons, qual a energia do fóton?**

Coordenadas Espaço-Tempo  
Vetor contravariante

$$x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) = (t, x, y, z)$$

Momentum e Energia Relativística

$$p = \gamma\beta m \quad E = \gamma m \quad m = \text{massa de repouso}$$

Vetor quadrimomentum

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}) = (E, \vec{p}_T, p_z) = (E, p_x, p_y, p_z)$$

Momentum escalar de dois quadrivetores a e b

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Relação entre energia e momentum

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

Velocidade da partícula:

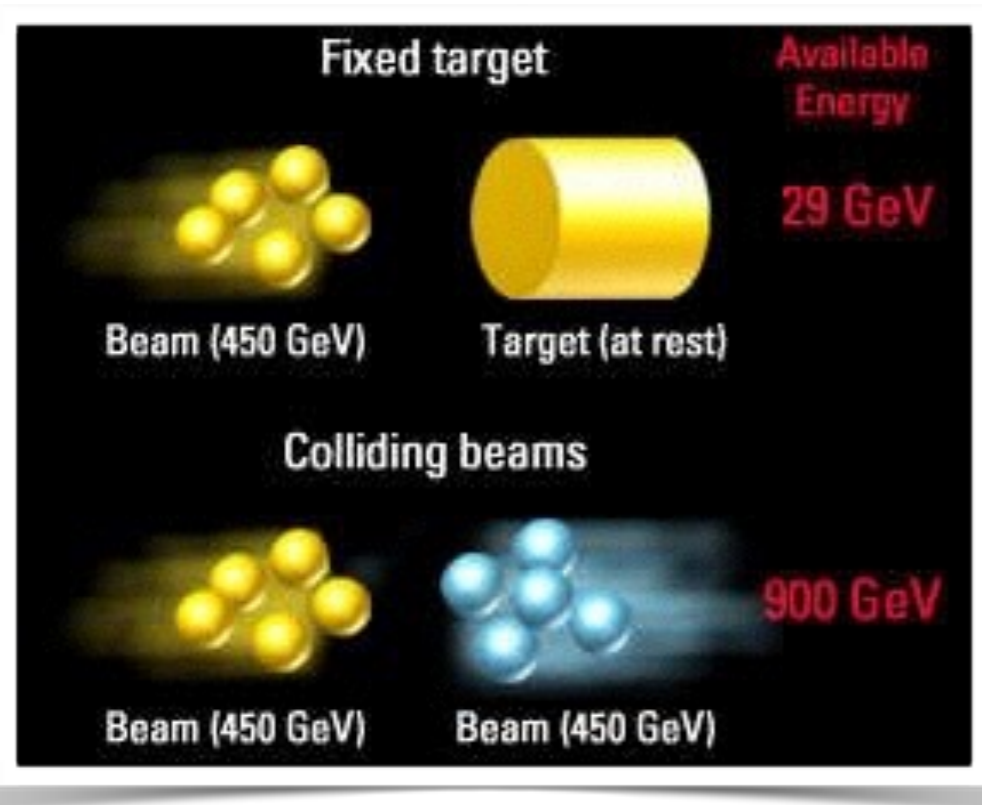
$$\beta = \frac{\mathbf{p}}{E} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = E/m$$



# Sistemas de coordenadas

Consideremos a colisão de duas partículas de quadrimomentum

$$(E_a, \vec{p}_a) \quad (E_b, \vec{p}_b)$$



Na descrição destas colisões, dois sistemas de referência são usualmente utilizados:

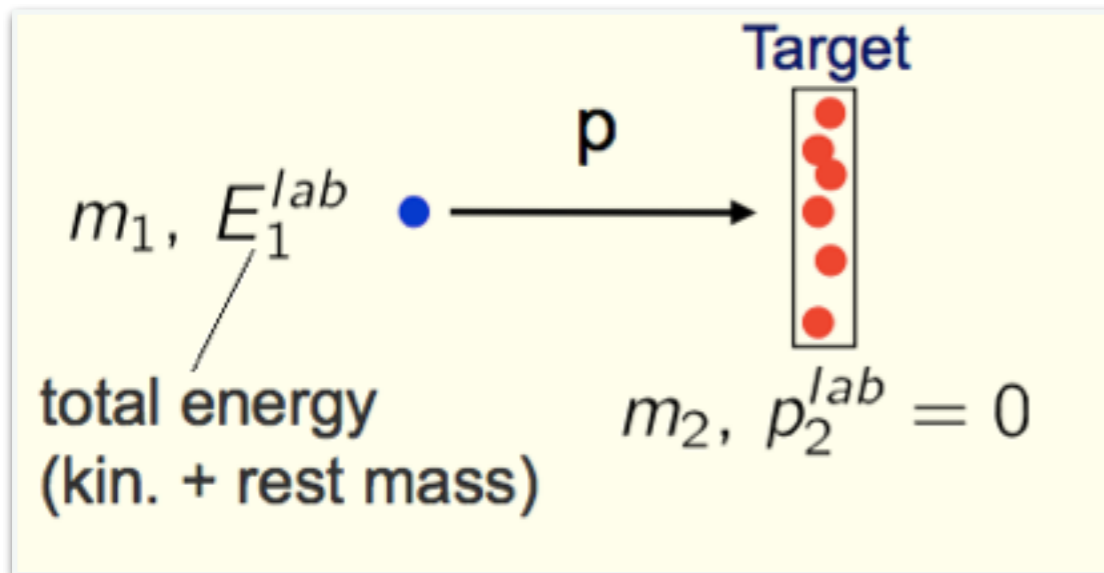
- **Sistema de Centro de Massa (CM):** é o sistema onde:

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$$

- **Sistema de Laboratório (LAB):** é o sistema no qual são feitas as medidas.
  - Em experimentos de alvo fixo este sistema coincide com o sistema do alvo, onde uma das partículas encontra-se em repouso (e.g. b):
$$\vec{p}_b = 0$$
  - Nos experimentos de anéis de colisão, onde feixes de partículas idênticas colidem em direções opostas, este sistema coincide com o CM.

# Sistemas de coordenadas

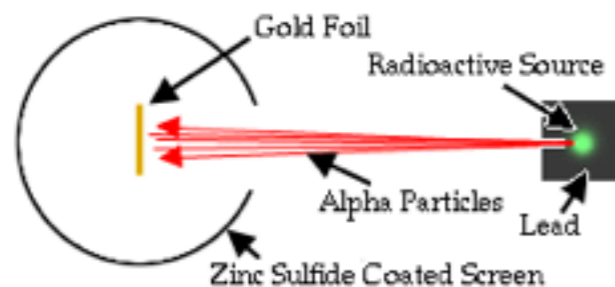
## Sistema de Laboratório (LAB)



A energia total da colisão como sendo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab}m_2}$$

Exercício 1: Prove a equação acima.



Exercício 2: Considerando

$$E_1^{lab} \gg m_1, m_2$$

Prove está aproximação;

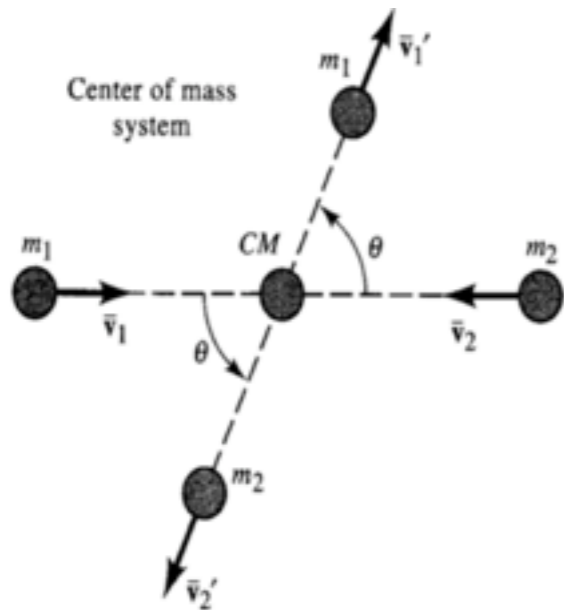
$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab}m_2}$$

Experimento de Rutherford (1908)

$$\beta = \frac{p}{E}$$

# Sistemas de coordenadas

## Sistema de Centro de Massa (CM)

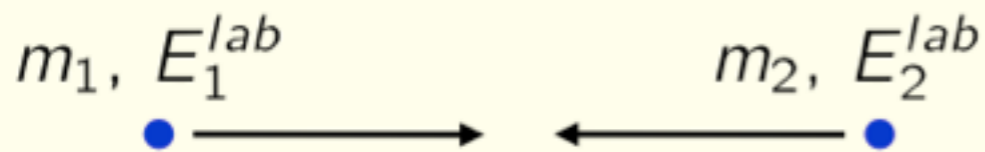


A energia total da colisão como sendo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)}$$

Exercício 3: Prove a equação acima.

Collider:

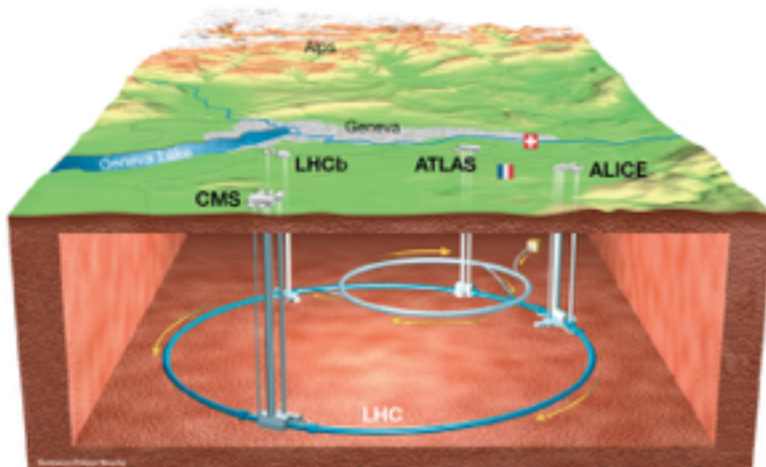


Exercício 4: Considerando

Prove está aproximação;

$$\begin{aligned} p_1 &= -p_2 \\ m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1$$



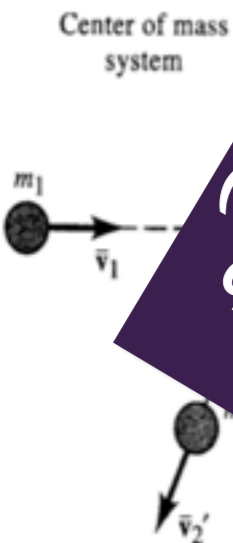
$$\beta = \frac{p}{E}$$

# Sistemas de coordenadas

## Sistema de Centro de Massa (CM)

A energia total da colisão como sendo:

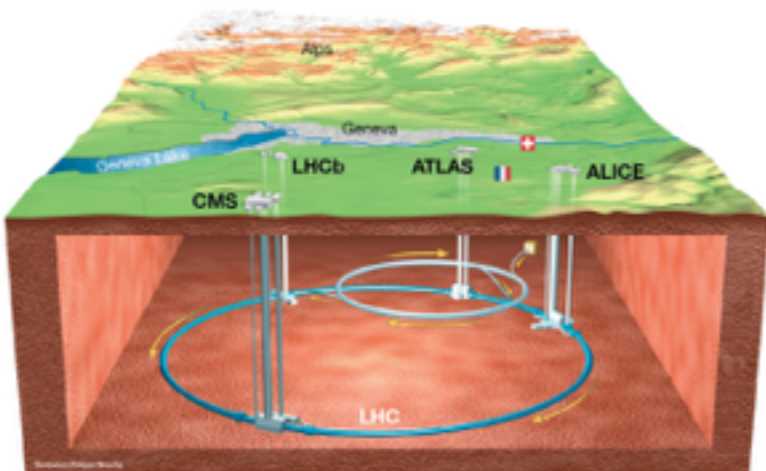
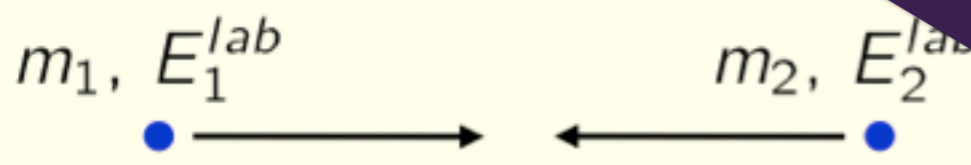
$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)}$$



**Exercício 5:** Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.

(a) Qual é a energia de centro de massa para esta interação?  
 (b) Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?  
 (c) Quais os colisores assimétricos usados atualmente e por que não usar um colisor mais potente?

### Collider:



# Sistemas de coordenadas

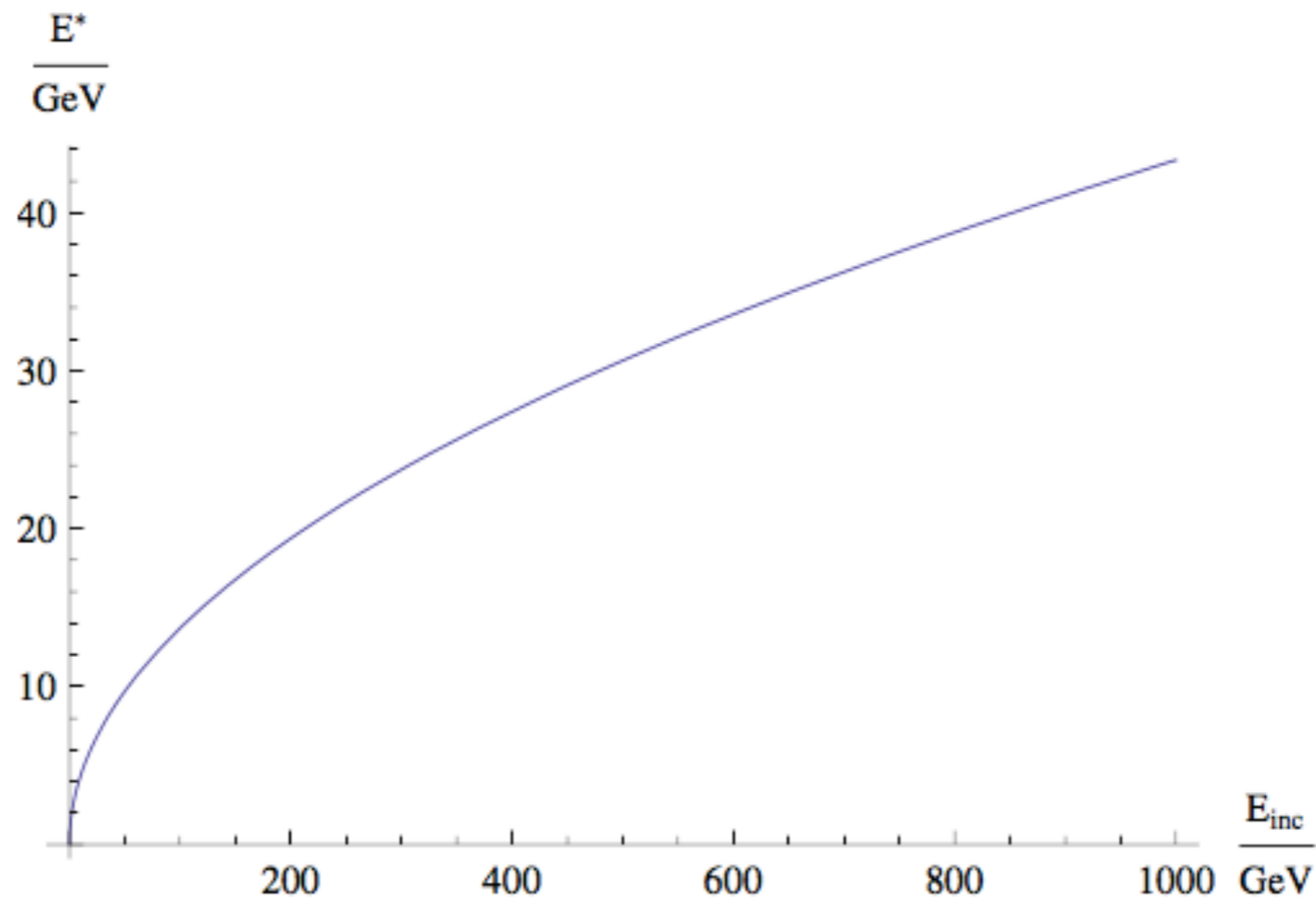


Figure 4.3: *Center of mass energy of the colliding beam for a fixed target experiment. The energy increases with the square root of the beam energy.*



# Comparando Colisores

Apresentamos na tabela abaixo os valores da energia total ( $E_T$ ) e do momento ( $p_a^*$ ) no CM para a colisão de **feixes de elétrons** ( $m_a = m_e \cong 0$ ) e **prótons** ( $m_a = m_p \cong 0.938$  GeV) colidindo com um **próton fixo** em função do momento do feixe ( $p_a^{lab}$ ).

$p_a^{lab}$ (GeV)	$E_T$ (GeV)		$p_a^*$ (GeV)	
	ep	pp	ep	pp
1	1.66	2.08	0.57	0.45
10	4.43	4.54	2.12	2.07
100	13.73	13.76	6.83	6.82
500	30.65	30.66	15.3	15.3
1000	43.33	43.34	21.7	21.6
10000	137.0	137.0	68.5	68.5

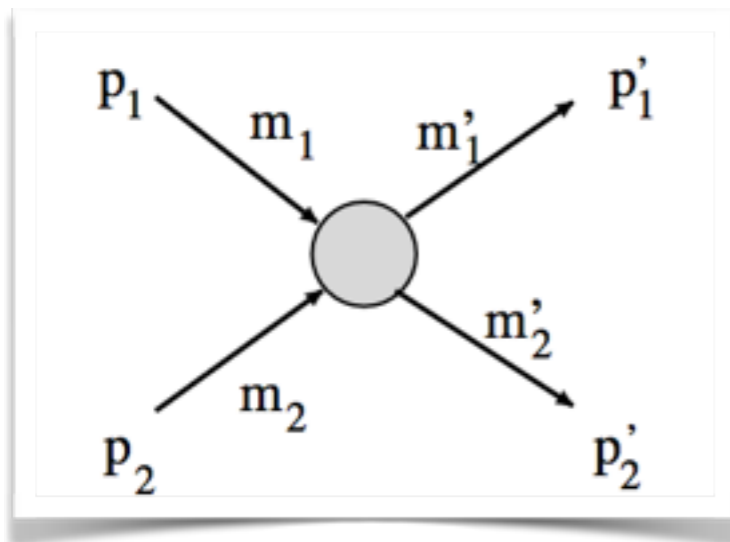
# Comparando Colisores

Apresentamos na tabela abaixo os valores da energia total ( $E_T$ ) e do momento ( $p_a^*$ ) no CM para a colisão de **feixes de elétrons** ( $m_a = m_e \cong 0$ ) e **prótons** ( $m_a = m_p \cong 0.938$  GeV) colidindo com um **alvo fixo** em função do momento do feixe ( $p_a^{lab}$ ).

$p_a^{lab}$ (GeV)	$E_T$ (GeV)	$p_a^*$ (GeV)	
		e-p	pp
1	1.02	0.57	0.45
10	10.02	2.12	2.07
100	100.02	6.83	6.82
1000	1000.02	15.3	15.3
10000	10000.02	21.7	21.6
100000	100000.02	68.5	68.5

Exercício 5 a: Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo o feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV.

# Variáveis de Mandelstam



Em Física de Altas Energias seção de choque e razão de decaimentos são descritos por variáveis cinemáticas que são invariantes relativistísticos.

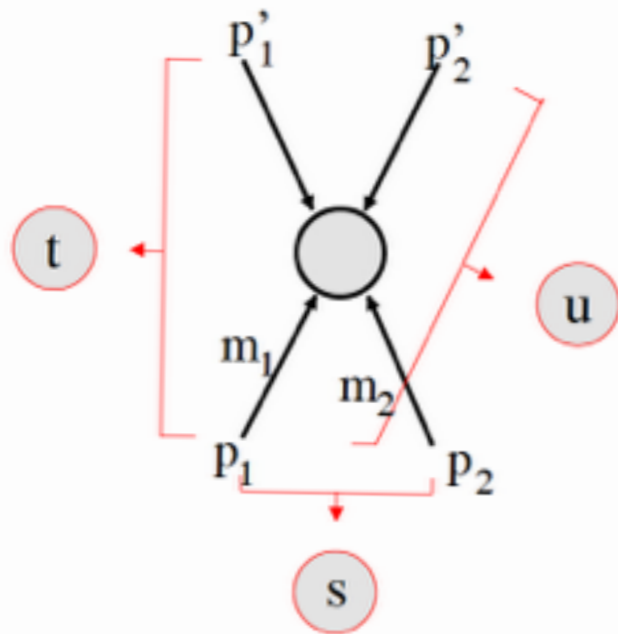
Nos decaimentos de dois corpos existem de fato quatro invariantes disponíveis desde que a energia e momentum seja conservada de somente dois deles para definir a cinemática do evento.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelstam\\_variables](https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelstam_variables)



# Variáveis de Mandelstam

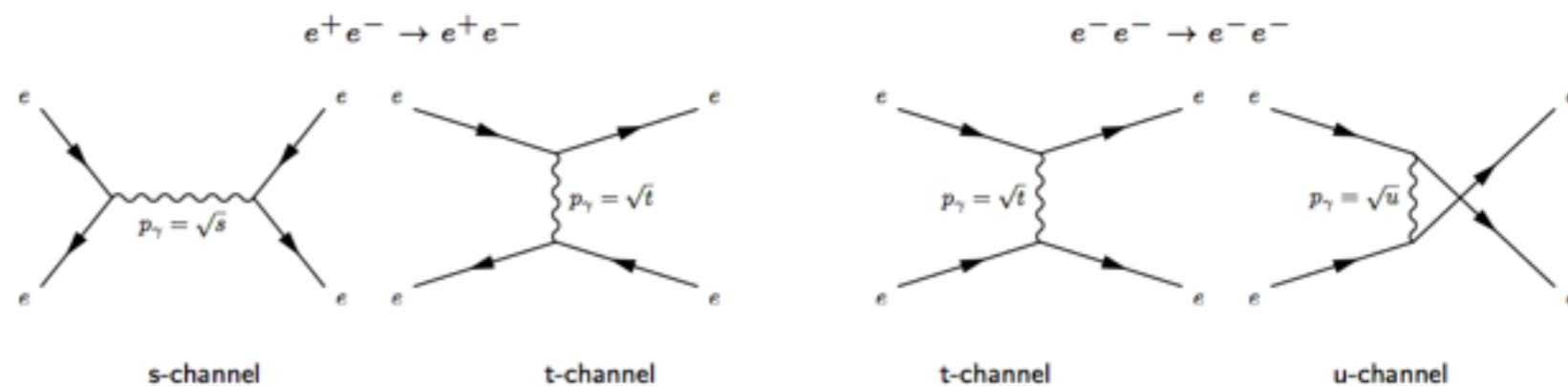
As variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz em decaimentos de tipo 2->2



$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 = -(p_1 + p_2)(p'_1 + p'_2)$$

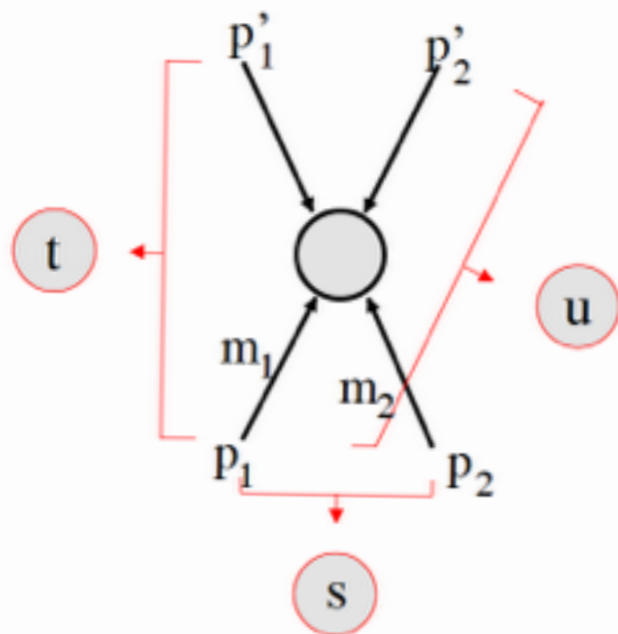
$$t = (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 = -(p_1 - p'_1)(p_2 - p'_2)$$

$$u = (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2 = -(p_1 - p'_2)(p_2 - p'_1)$$



# Variáveis de Mandelstam

As variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz em decaimentos de tipo 2->2



$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 = -(p_1 + p_2)(p'_1 + p'_2)$$
$$t = (p_1 + p'_1)^2 = (p_2 + p'_2)^2 = -(p_1 + p'_1)(p_2 + p'_2)$$
$$u = (p_1 + p'_2)^2 = (p_2 + p'_1)^2 = -(p_1 + p'_2)(p_2 + p'_1)$$

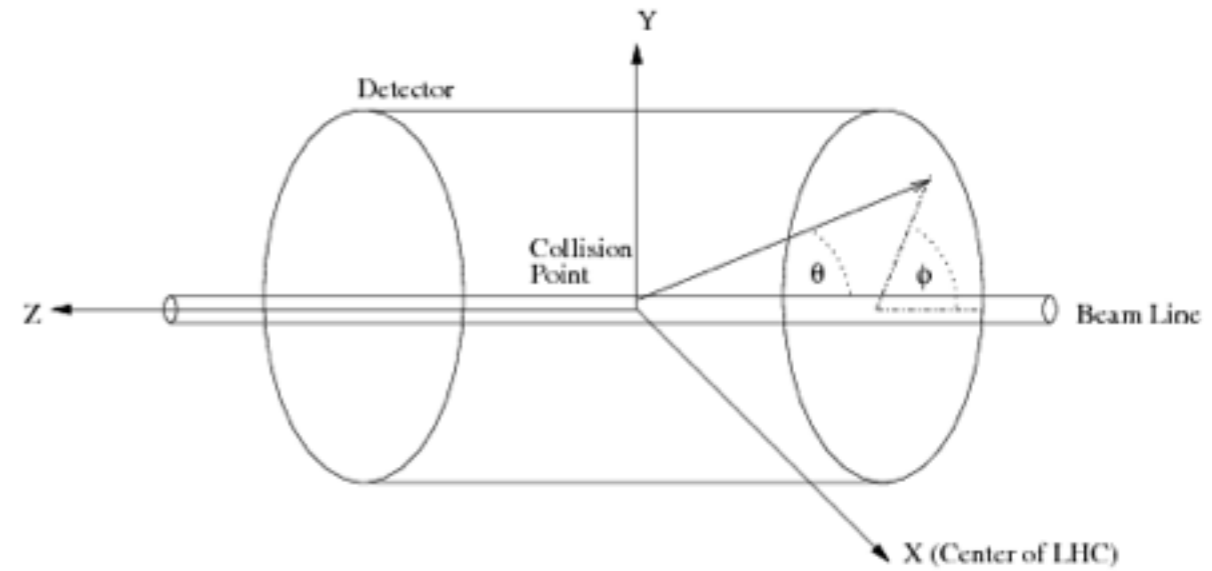
**Exercício 6 : Em espalhamento elástico do tipo:  $A+A \rightarrow A+A$ , quais são as variáveis de Mandelstam?**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelstam\\_variables](https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelstam_variables)

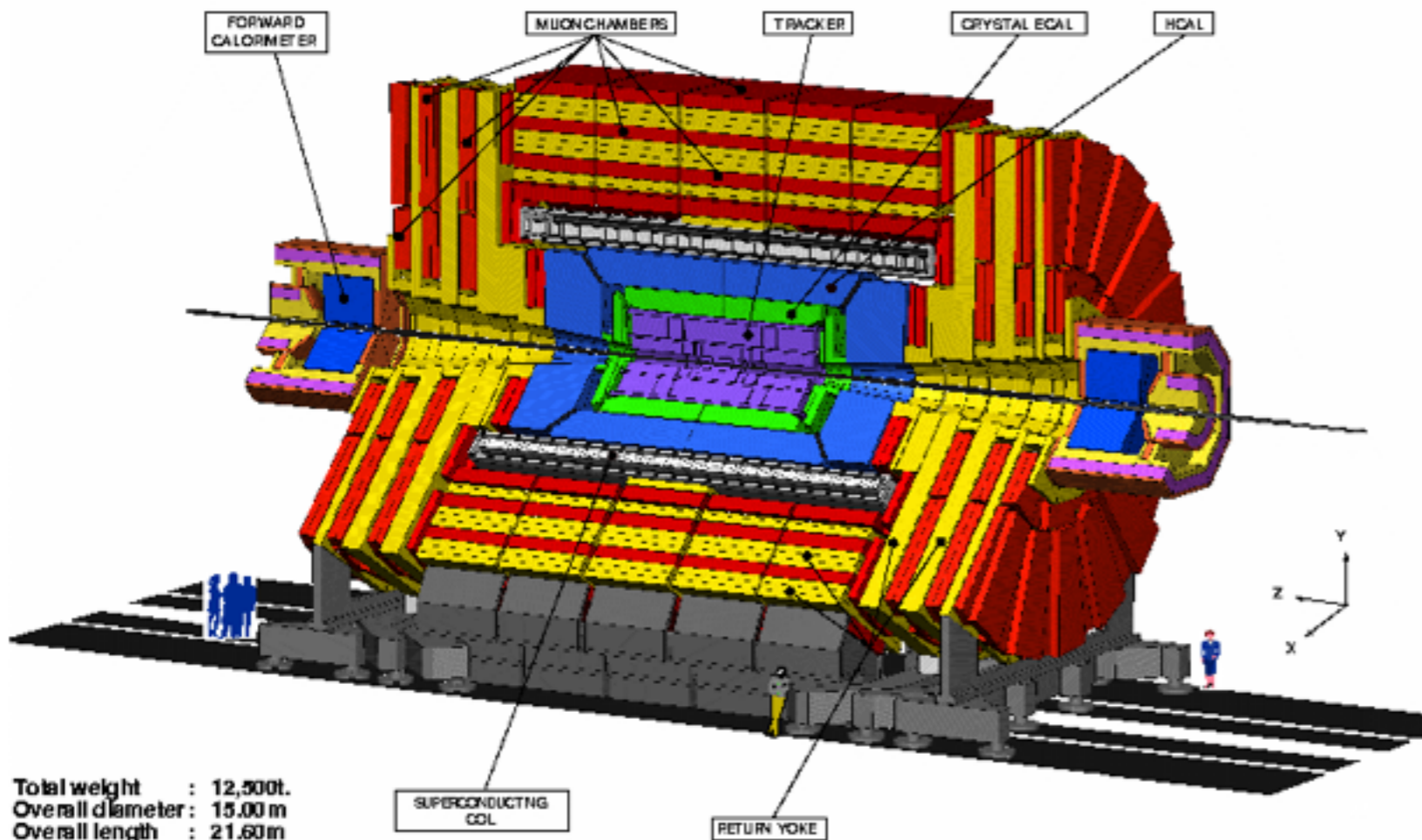
# Backup slides

# Rapidez

# Rapidez



## CMS A Compact Solenoidal Detector for LHC

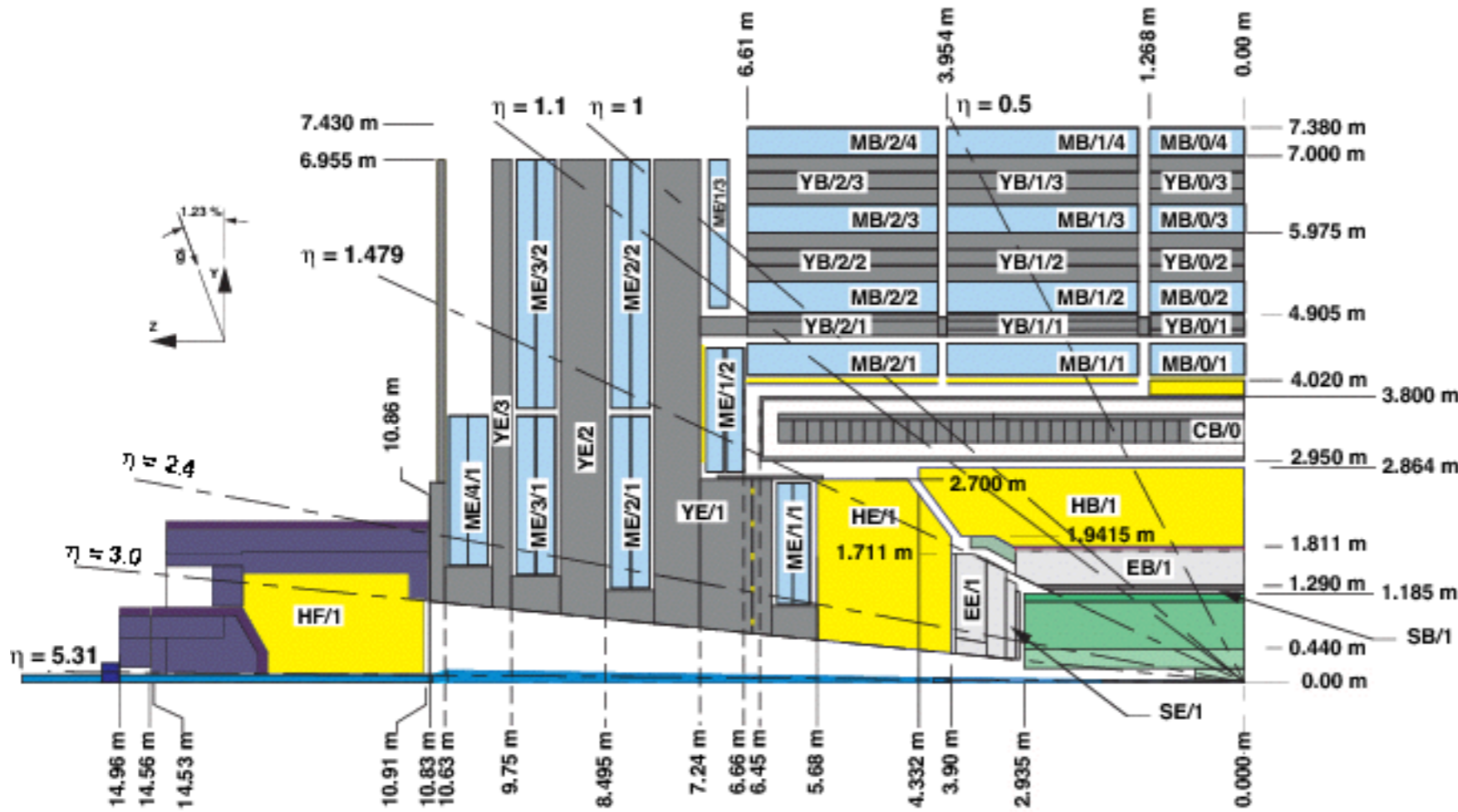
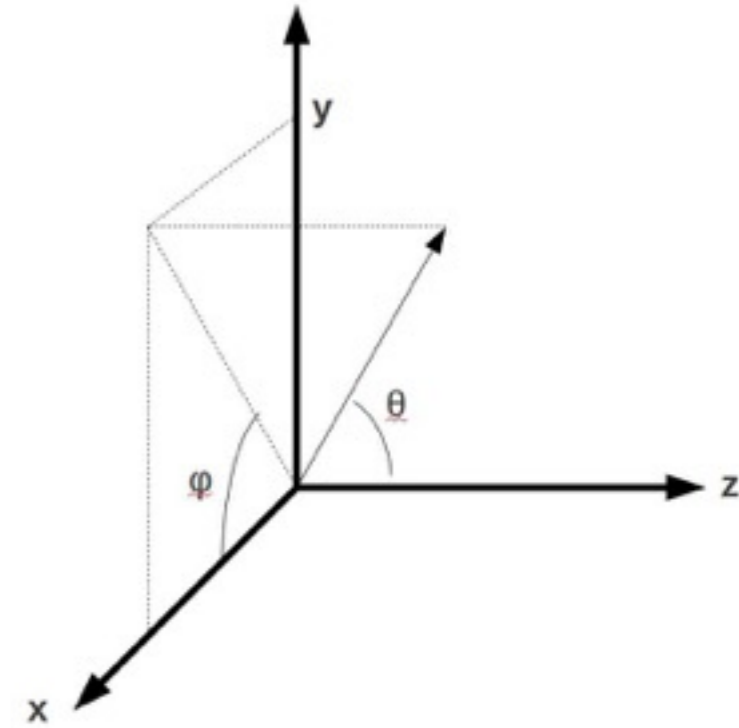
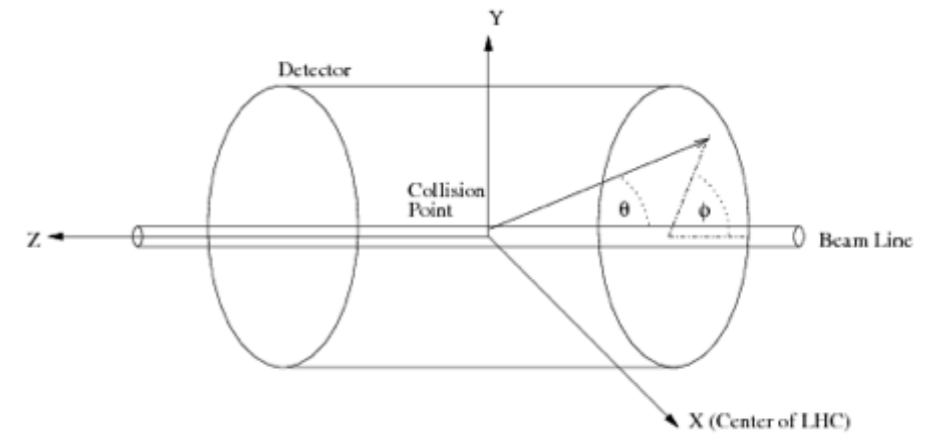
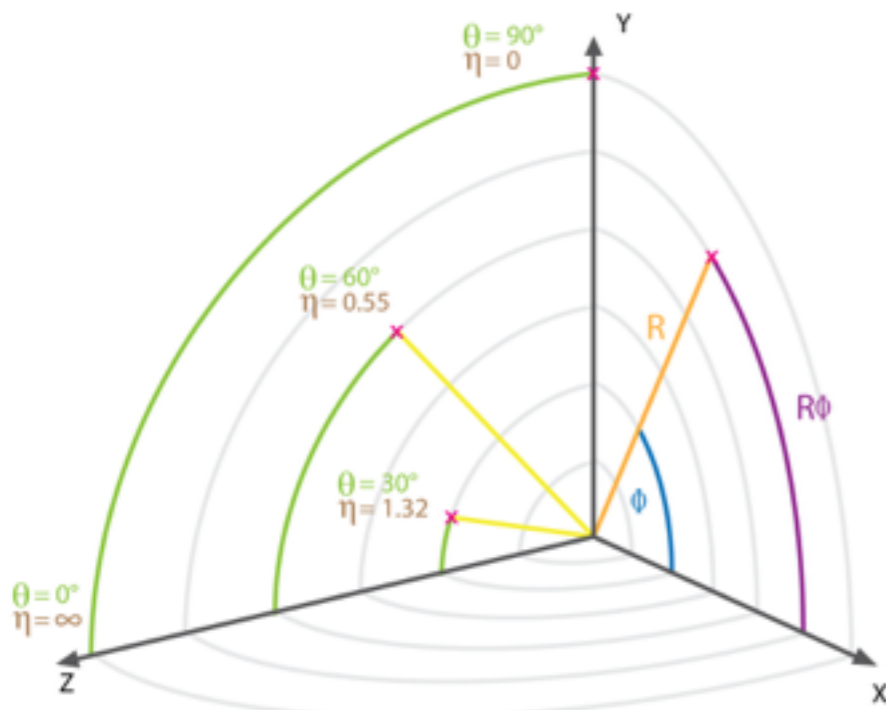


Total weight : 12,500t.  
Overall diameter : 15.00 m  
Overall length : 21.60 m  
Magnetic field : 4 Tesla

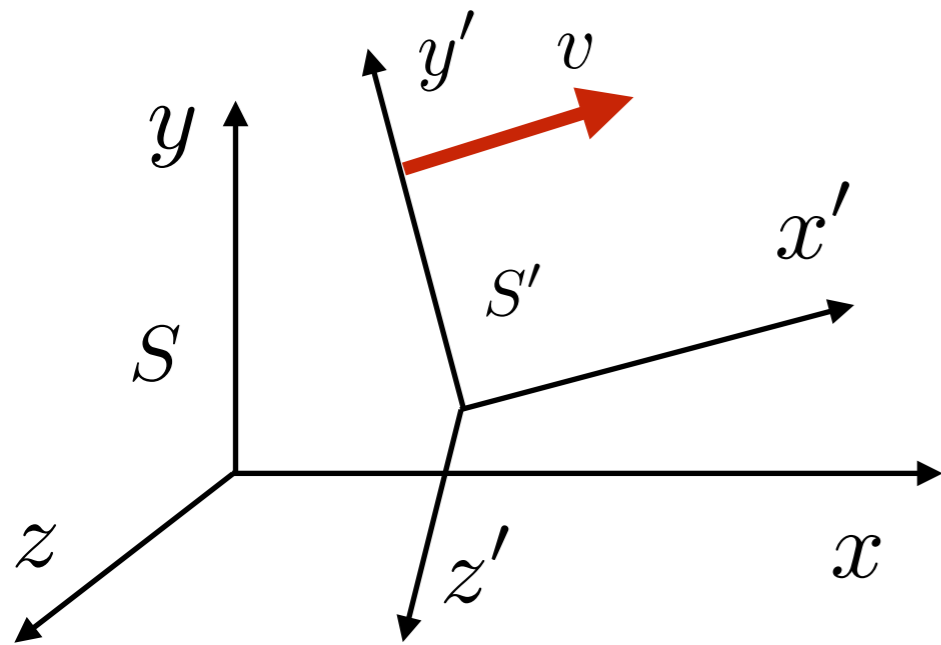
CMS-PARA-001-11/07/97

J.L.B.PP

# Rapidez

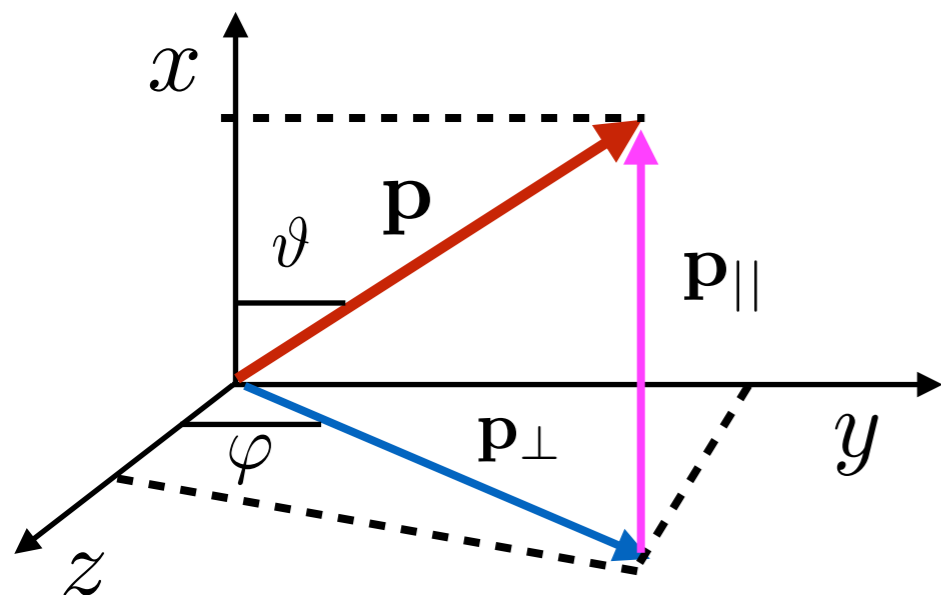


# Transformações de Lorentz



$$\mathbf{p}_{\parallel} = p_x = \mathbf{p} \cos \vartheta$$

$$\mathbf{p}_{\perp} = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$$





# Sistemas de coordenadas

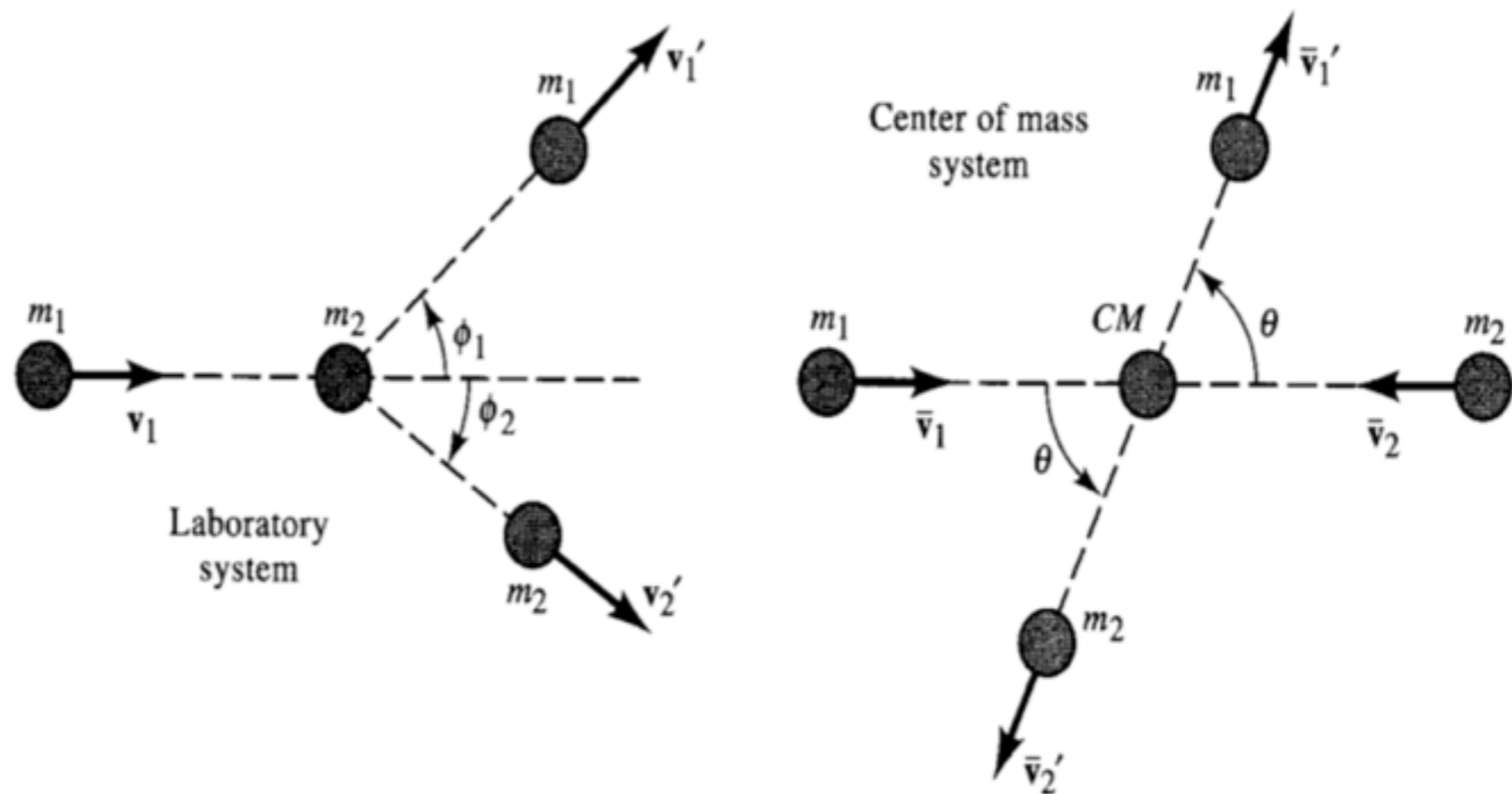
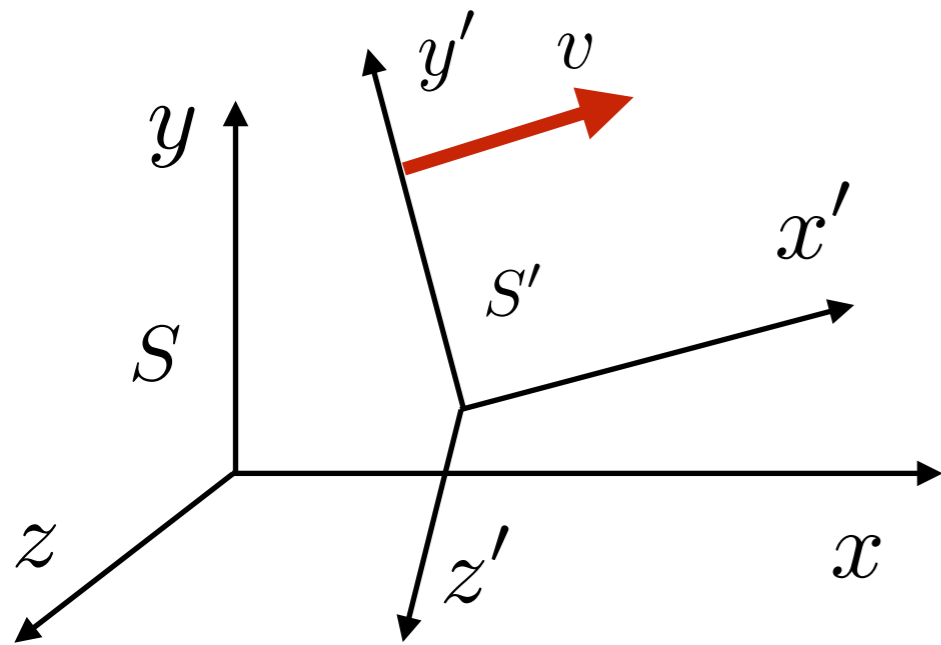


Figure 7.6.1 Comparison of laboratory and center of mass coordinates.



# Transformações de Lorentz



$$\mathbf{p}_{||} = p_x = \mathbf{p} \cos \vartheta$$

$$\mathbf{p}_{\perp} = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$$

