# APRENDIZADO DE MÁQUINAS PARA FÍSICA

Aula II

Distribuições de Probabilidade

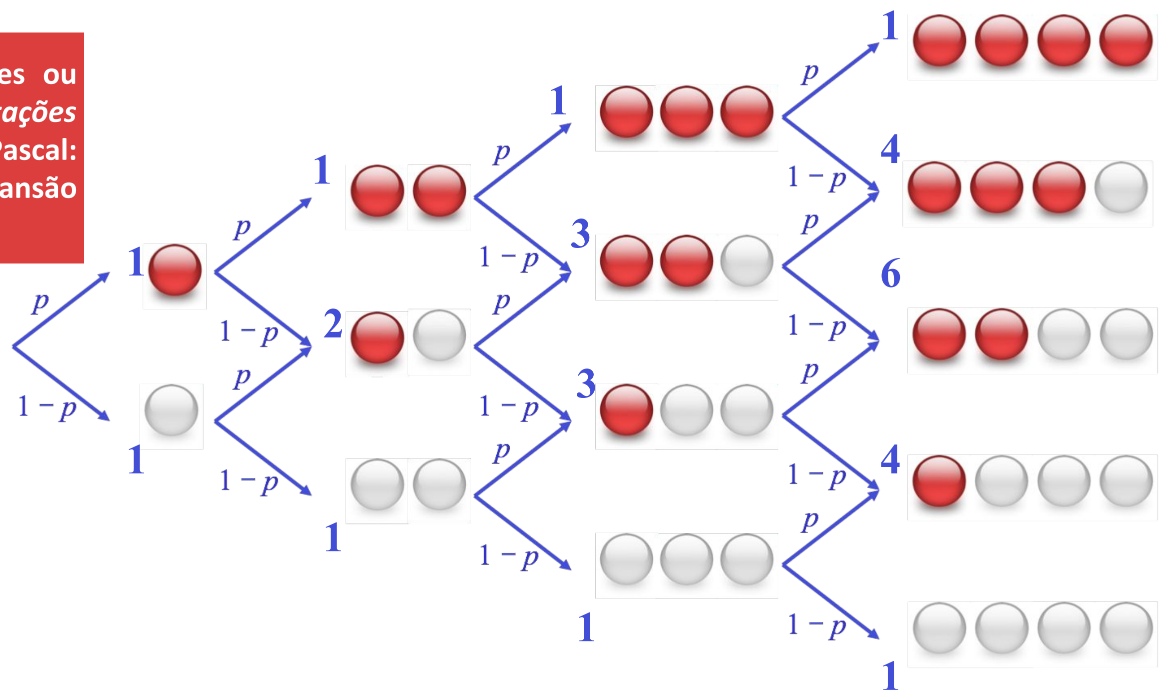
# PROCESSOS DE BERNOULLI

- Distribuição Binomial (discreta entre 2 opções: moeda cara/cruz, sim/não, extrair bola vermelha ou branca de uma urna). A cada experimento

★ Probabilidade de sucesso $p$ e probabilidade de "fracasso" $(1\text{-}p)$.

★ A probabilidade de $n$ sucessos após N experimentos, onde $0 \leq n \leq N$ , é $P(n) \propto p^n(1\text{-}p)^{N\text{-}n}$ … mas a ordem não tem importância (cara-cruz-cruz é o mesmo que cruz-cruz-cara)

**Para múltiplas extrações ou lançamentos, as *permutações* levam ao triângulo de Pascal: coeficientes da expansão binomial de Newton**



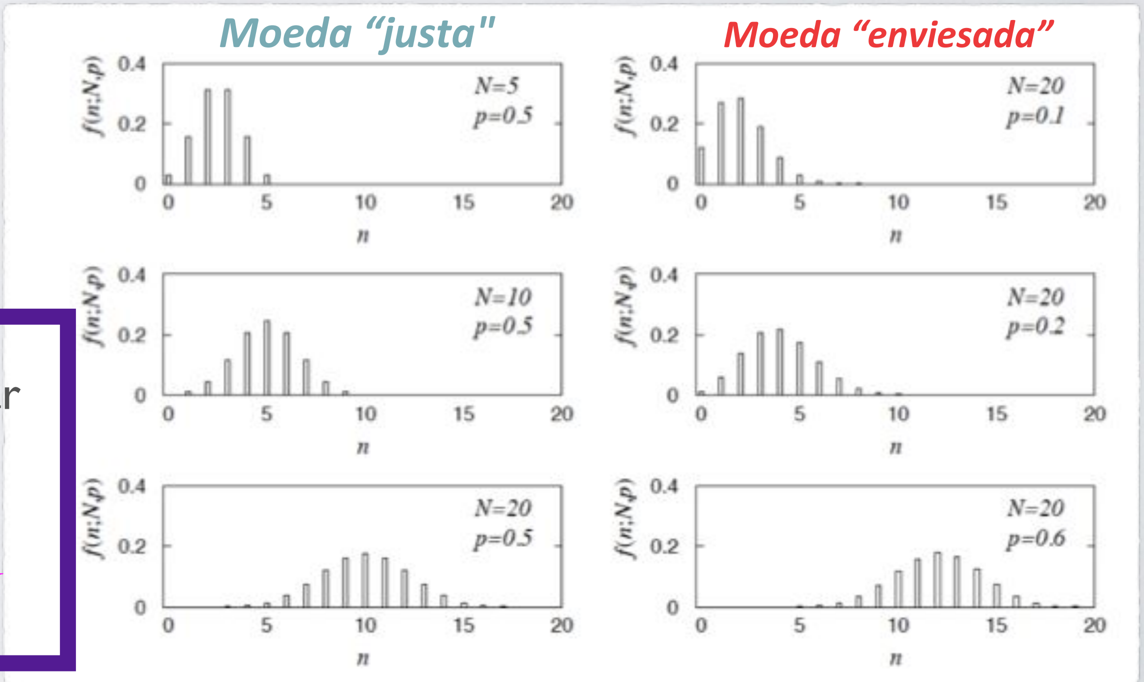
# DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

★ tomando em conta as permutações (para a normalização)

$$f(n|N,p) = C^N_n \; p^n \, (1-p)^{N-n} \qquad \Rightarrow \sum f(n|N,p) = \sum C^N_n \, p^n \, (1-p)^{N-n} = (p+(1-p))^N = 1^N$$

★ onde o fator combinatorial $C^N_n = N!/(n!\,(N-n)!)$

- média : $E[n] = \mu = Np$
- variância $E[n^2] - \mu^2 = Np(1-p)$




Frequentemente usada para estudar eficiências ou frações $\varepsilon = n/N$

- média : $E[\varepsilon] = \mu/N = p$
- variância $E[\varepsilon^2] - E[\varepsilon]^2 = p(1-p)/N$

# EXERCÍCIO

Livro Oguri pg. 53: Ao se lançar cinco (5) CDs ao alto 100 vezes e observar o número de vezes que a estampa do disco voltou-se para cima, foi obtida a seguinte tabela de frequências ($n$ número de CDs voltados para cima, $F_n$ frequência nos 100 experimentos)

| $n$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 2 | 14 | 20 | 34 | 22 | 8 |
| $f_n$ | 0.02 | 0.14 | 0.2 | 0.34 | 0.22 | 0.08 |

Devido à assimetria causada pelo peso da estampa, apesar de próxima de 0,5 a probabilidade $p$ de sucesso é desconhecida.

**Achar a probabilidade $p$ a partir da média teórica assumindo uma distribuição Binomial.**

# DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

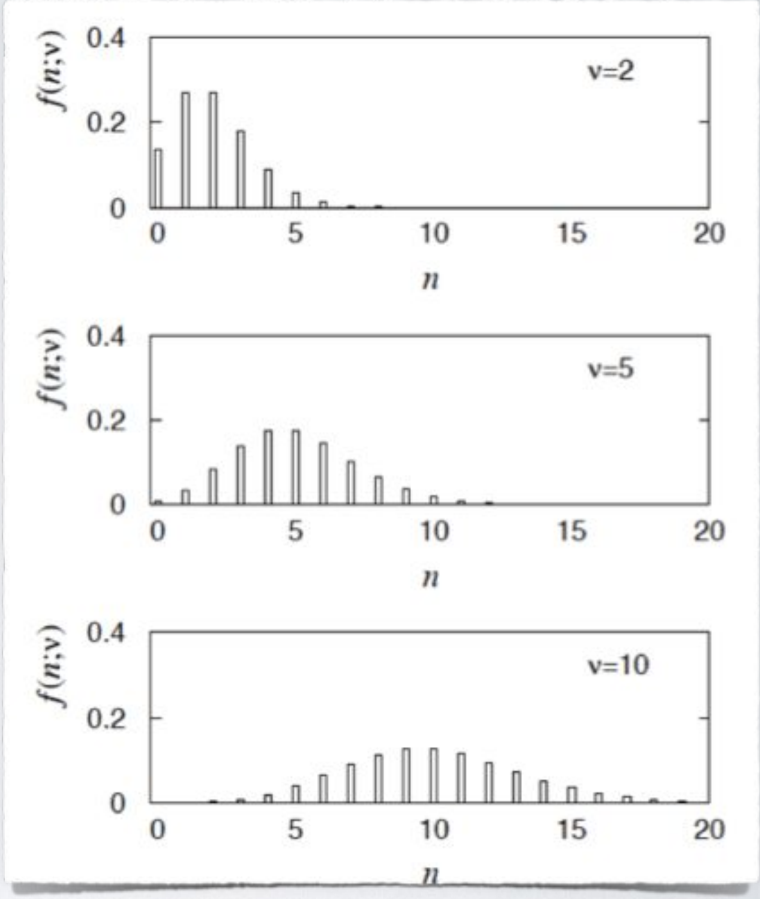
- Poisson (também discreta): *n* é o número de ocorrências de um evento distribuído uniformemente num intervalo de medida mas com ***taxa desconhecida***. Limite da binomial quando N → ∞, p → 0 e Np → $\nu$ )

$$f(n|\nu) = e^{-\nu}\, \nu^n / n!$$

- Média = variância = $\nu$

- utilizado na contagem de raios cósmicos, gotas de chuva, ligações telefônicas, etc.

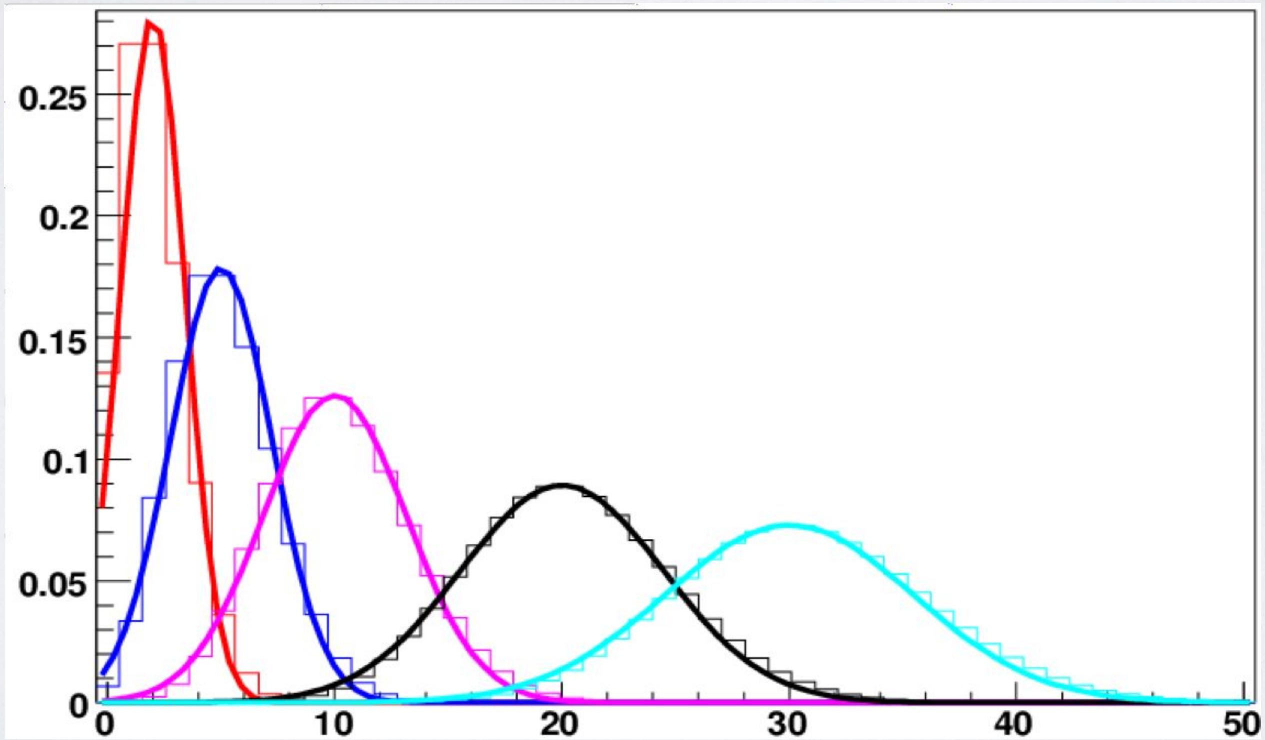
- p.ex. incerteza na frequência em cada bin, num histograma: $\sigma_i = \sqrt{N_i}$




Notebook

# Poisson aproxima a Gaussiana

No limite do parâmetro $\nu$ grande, a função de densidade de probabilidade de Poisson aproxima de uma função Gaussiana

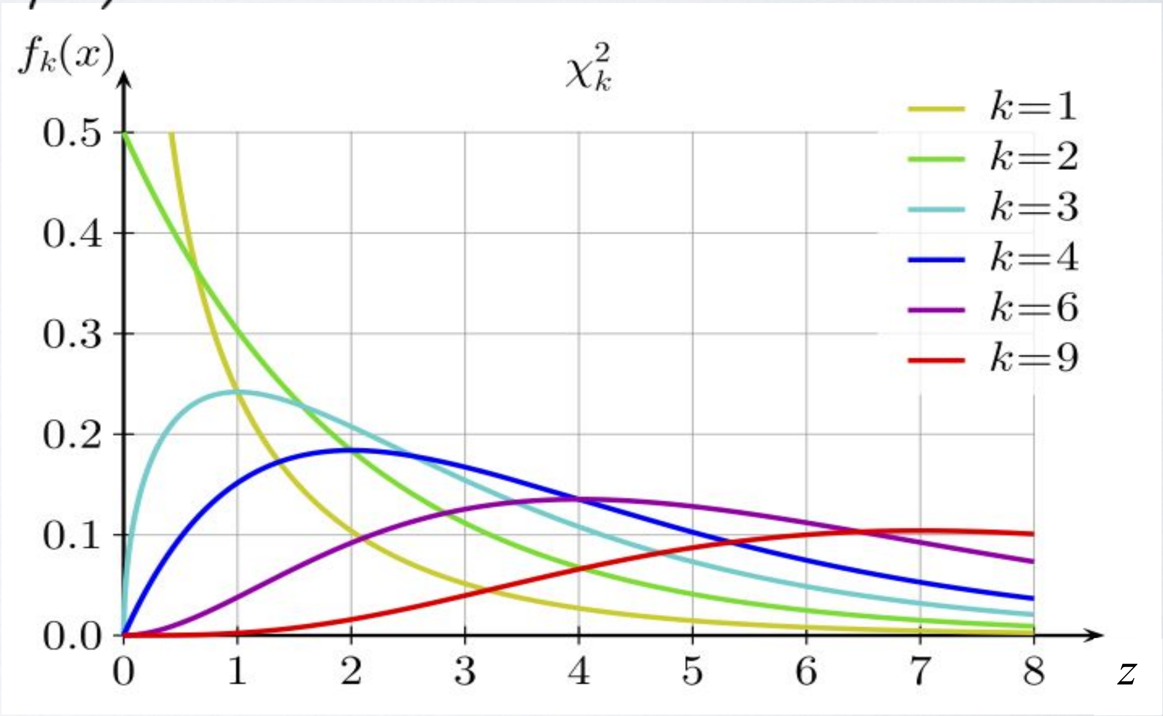



Notebook

# Distribuição $\chi^2$

A seja $z_i = (x - \mu_i)/\sigma_i$ a soma dos quadrados $\sum z^2_i$ para $k$ variáveis $z$ obedece a distribuição $\chi^2_k$

$$f(z|k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} z^{k/2-1} \mathrm{e}^{-z/2}$$




**Média** **$E[z]=k$**

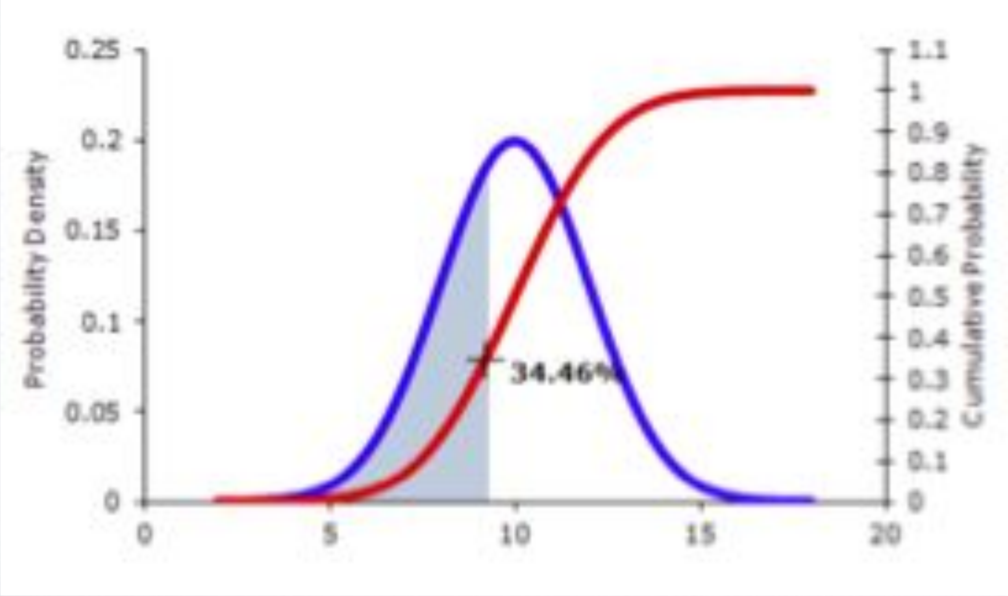
**Variáncia** **$E[z^2] - E[z]^2 = 2k$**

$\Gamma(k) = (k-1)!$

$\Gamma(k+1/2) = (2k-1)!!/2^k \sqrt{\pi}$

# Função de distribuição cumulativa (CDF)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx'$$




A probabilidade da variável $x$ ser menor que um valor $a$

$$P(x<a) = F(a)$$

# Câmbio de variável

As variaveis $x$ e $y$ se relacionam com a função $y=t(x)$, uma tranformação 1-1 que mapea o intervalo $x_a < x < x_b \rightarrow y_a < y < y_b$, portanto

$$P(x_a < x < x_b) = P(y_a < y < y_b)$$

$$\Rightarrow \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \int_{y_a}^{y_b} g(y)dy$$

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \int_{y_a \to x_a}^{y_b \to x_b} g\left(t(x)\right) \frac{dy}{dx} dx$$

A PDF da variável $y$

$$f(x) \rightarrow g(y) = f\left(t^{-1}(y)\right) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

# Função cumulativa ⟶ uniforme

Considere o câmbio de variável $y=F(x)$ onde $F(x)$ é a CDF para a PDF $f(x)$

$\Rightarrow$ a PDF de $y$ é
$$g(y) = f\left(F^{-1}(y)\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$\Rightarrow y = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f\left(F^{-1}(y')\right)\left|\frac{dx}{dy'}\right| dy'$$

$$\Rightarrow y = \int_{-\infty}^{y} g(y')dy'$$

$$\boxed{\Rightarrow g(y) = 1}$$

É a base do método Monte Carlo

# Monte Carlo

Geração de amostras "artificiais".

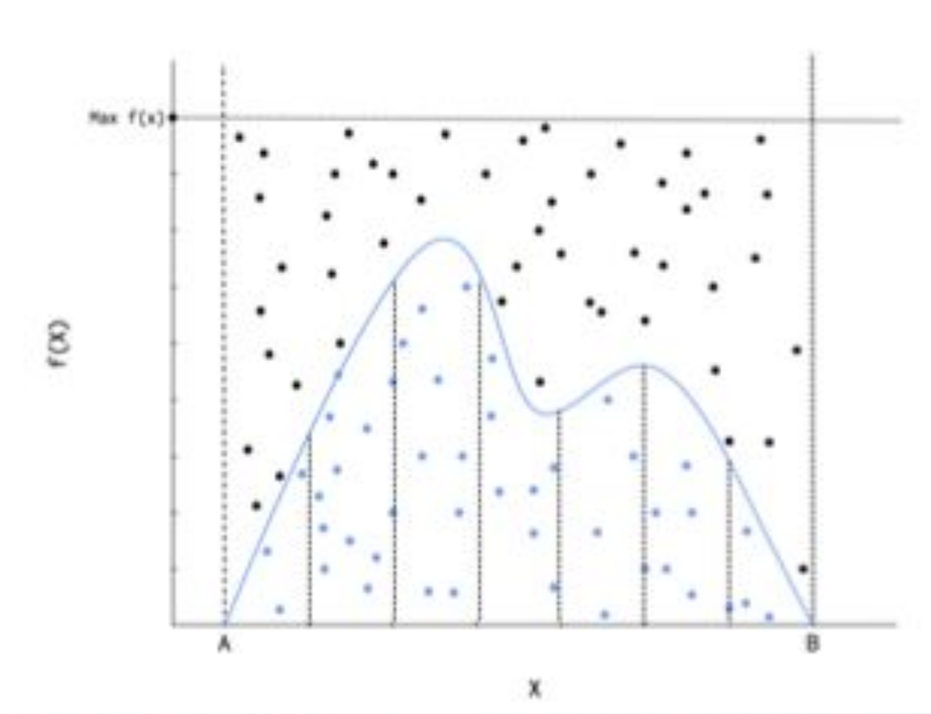
1. Método da Transformação Inversa: $y=F(x)$ ( CDF de $f(x)$) tem distribuição uniforme, gerando uma variável uniforme é possível obter uma variável que segue a PDF $f(x)$ onde $x = F^{-1}(y)$

Só é possível se a função inversa existe!

# Monte Carlo

2. Método Aceitar/Rejeitar:

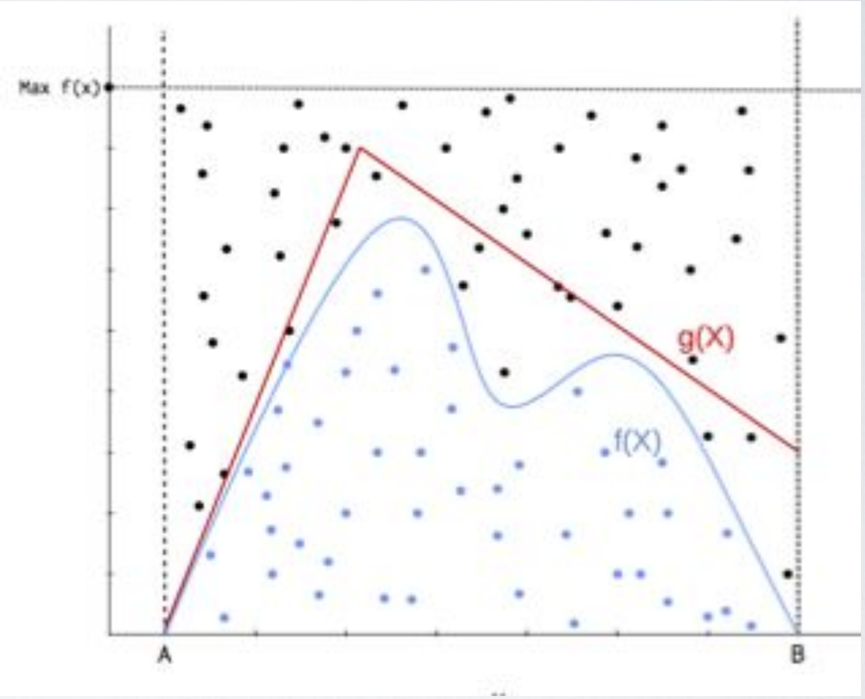
1. Achar o maior valor de $f(x)$ no intervalo [a,b], $f_{max}$
2. Gerar un número aleatório (uniforme) $X$ no intervalo [a,b]
3. Gerar um número aleatório uniforme $Y$ no intervalo $[0, f_{max}]$
4. Aceitar o ponto se $Y<f(X)$, se não, rejeitá-lo
5. Repetir itens 2-4 até ter a quantidade necessária de dados simulados



# Monte Carlo

## 2. Método Aceptar/Rejeitar:

1. Achar o maior valor de $f(x)$ no intervalo [a,b], $f_{max}$
2. Gerar um número aleatório $X$ com distribuição $g(x)$ no intervalo [a,b] (usando transformação inversa)
3. Gerar um número aleatório uniforme $Y$ no intervalo $[0, f_{max}]$
4. Aceitar o ponto se $Y<f(X)$, se não, rejeitá-lo
5. Repetir itens 2-4 até ter a quantidade necessária de dados simulados




Combinar a transformação inversa com aceitar/rejeitar quando não tiver inversa direta e aceitar/rejeitar for ineficiente

# Integração Monte Carlo

Podemos fazer a integração numérica de uma função *f(x)* :

$$\int_a^b f(x)dx = A\frac{N_{in}}{N_{tot}}$$

[Ver notebook cálculo $\pi$]