Projeto Introdução a Python

Resolver um problema de física... usando as ferramentas de Python

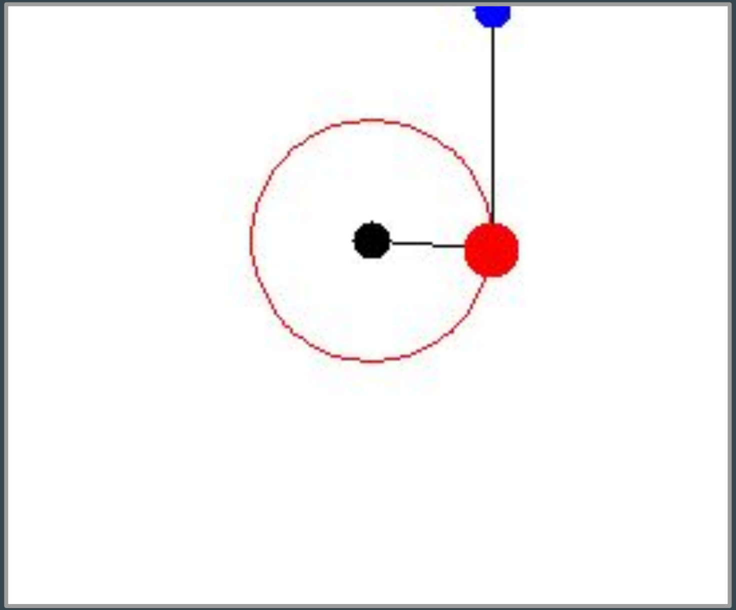
Problema proposto: Pêndulo Duplo

Um problema de mecánica avanzada.

Pode apresentar soluções caóticas.

Começando da Lagrangeana e usando equações de Euler-Lagrange é possível chegar em um sistema de equações diferenciais acopladas.

Proposta: resolver e fornecer gráficos de posição, velocidade, energia potencial, energia cinética, e energia total de cada massa e do sistema, em função do tempo.

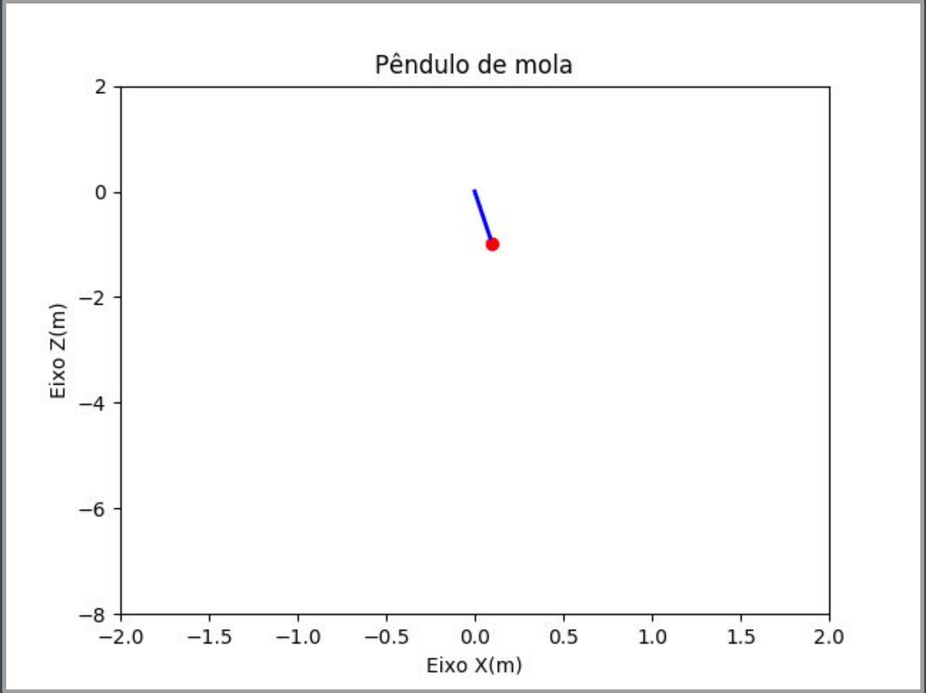


https://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html

Por onde começar: Solução numérica do pêndulo simples

Em anos anteriores os estudantes da disciplina fizeram, para o projeto, a solução do pêndulo elástico e pêndulo simples. Um exemplo de animação do pêndulo elástico (de mola) aqui ao lado.

O caso mais simples é, claro, o pêndulo simples.



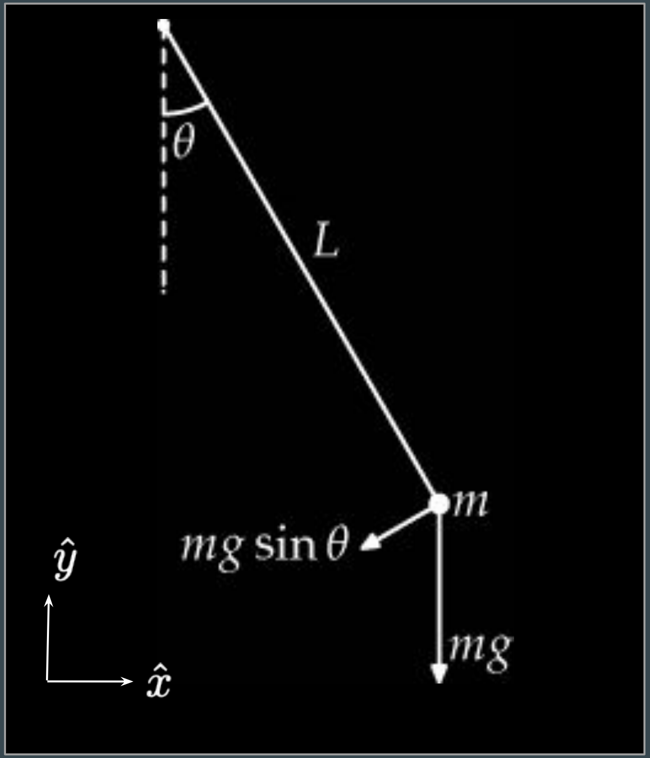
Pêndulo simples:

Uma só variável (ângulo) e 1 equação diferencial de segundo grau, que pode ser separada em 2 de primer grau. 2 condições de contorno: ângulo inicial e velocidade angular inicial (sistema de coordenadas polares).

O comprimento L é fixo, a componente radial da força se cancela com a tensão da corda e só atua a componente tangencial com grandeza $m\ g\ \sin\theta$.

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\,g\,\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{y}$$



Equações diferenciais e pseudo-código

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y}$$

Em coordenadas cartesianas (para solução numérica pode se trabalhar tanto em polares quanto cartesianas) teremos as seguintes equações

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\,v_x}{dt} = -g\sin\theta \times \cos\theta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\,v_y}{dt} = -g\sin\theta \times \sin\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$x = L\sin\theta$$

$$y = -L\cos\theta$$

Então a solução numérica, en intervalos de tempo **`dt`** seria (usando método de Euler):

```
x[i] = x[i-1] + v_x[i-1] *dt
y[i] = y[i-1] + v_y [i-1] *dt
v_x[i] = v_x[i-1] + g * x [i]*y[i] / L**2 * dt
v_y[i] = v_y[i-1] - g * x[i]**2 / L**2 * dt
```

Dica: Leia sobre o método de Euler-Cromer (modificação do Euler)

Em coordenadas polares

No pêndulo simples o comprimento é fixo, só o ângulo muda, então podemos escrever as equações de segundo grau para o ângulo (em radianos)

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta}$$

Que pode ser expressa como um sistema de duas equações diferenciais de primeiro grau (α seria velocidade angular)

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \alpha} \qquad \boxed{\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\theta}$$

no pseudo-código ficaria assim:

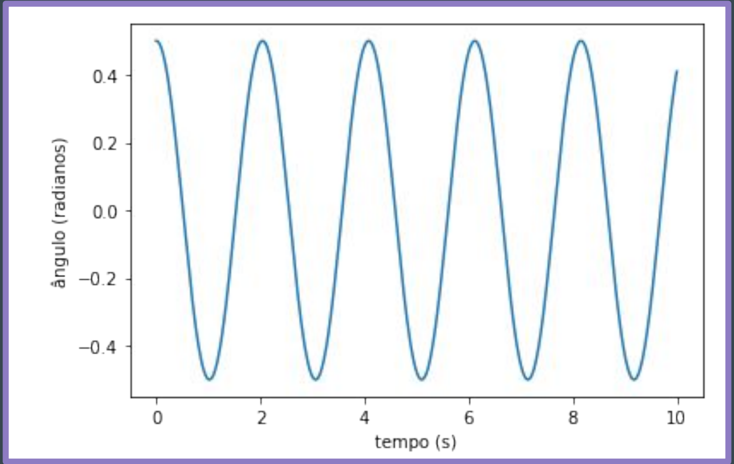
```
theta[i] = theta[i-1] + alpha[i-1] *dt
alpha[i] = alpha[i-1] - g/L * math.sin(theta[i]) *dt
## Para desenhar as coordenadas cartesianas da massa
x[i] =  L * math.sin(theta[i])
y[i] = -L * math.cos(theta[i])
```

Como ficaria usando o método de Euler-Cromer ?

Instruções : Parte 1: (pré-exercício de hoje)

Faça primeiramente um programa que contenha uma função para **resolver** o **pêndulo simples.**

Resolver quer dizer: dadas condições iniciais arbitrárias (que entram como parâmetros da função) calcular e graficar as coordenadas x(t), y(t), e/ou o ângulo $\theta(t)$; as velocidades vx(t), vy(t) e/ou a velocidade angular $\alpha(t)$ e a energia do pêndulo (cinética, potencial e total) em função do tempo. Bônus se fizerem também animação do movimento. O código deve vir com instruções adequadas para as professoras testarem alguns valores arbitrários.



O Sistema do Pêndulo Duplo

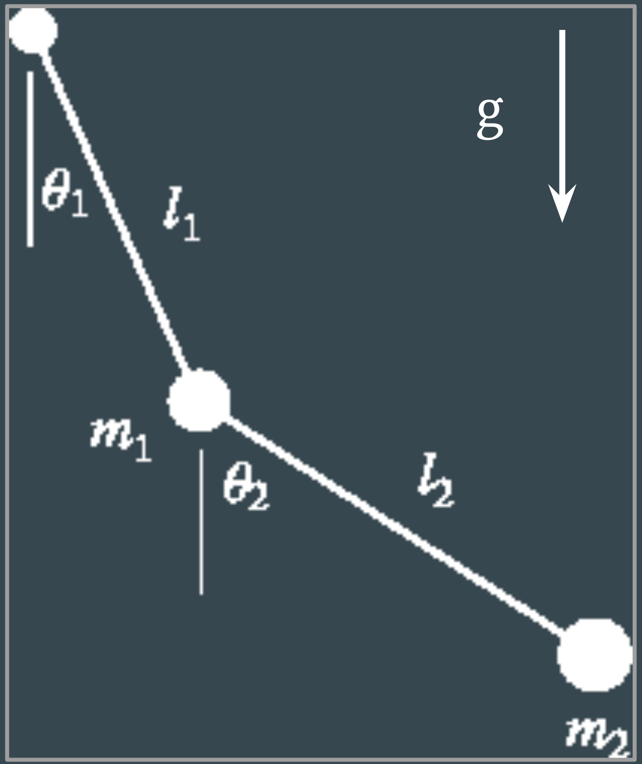
Dois objetos de massas m_1 e m_2 estão conectadas por barras rígidas ideais (incompressíveis e sem massa) com comprimentos fixos l_1 e l_2 .

As barras têm liberdade de pivotar no plano vertical, e as massas estão sujeitas à ação da gravidade.

É desconsiderada a influência de qualquer atrito e as massas son consideradas pontuais.

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 &= y_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{aligned}$$



Pêndulo duplo: a física e as equações

Vamos seguir o desenvolvimento das equações de movimento da referência (mecânica lagrangeana), onde as variáveis que determinam o estado do sistema são os ângulos e as respectivas velocidades angulares

https://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html

Será necessário chegar em um sistema de equações diferenciais para os ângulos 1 e 2 .

```
theta_1[i] = theta_1[i-1] + alpha_1[i-1] *dt
alpha_1[i] = alpha_1[i-1] + F_1[i-1] *dt
theta_2[i] = theta_2[i-1] + alpha_2[i-1] *dt
alpha_2[i] = alpha_2[i-1] + F_2[i-1] *dt

## Para resolver no projeto: quais as expressões para F_1 e F_2?
F_1[i] = ??
F_2[i] = ??
```

Instruções Parte 2 a)

Se baseando nas equações (14) e (19) da resolução do pêndulo duplo da referência https://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html

$$(m1+m2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin\theta_1 = 0 \quad (14)$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin\theta_2 = 0 \quad (19)$$

Ache as expressões para as acelerações angulares F_1 e F_2

$$\frac{d^2\theta_k}{dt^2} = F_k(m_1, m_2, l_1, l_2, \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

É com estas expressões que o pseudo-código da página 9 poderá ser completado.

Instruções Parte 2 b)

Resolver o pêndulo duplo escrevendo um programa completo contendo funções (usando encapsulamento, generalização, iterações e condicionais de forma adequada, etc) onde as condições iniciais arbitrárias possam ser fornecidas pelo usuário, assim como o intervalo **dt**.

Justifique a escolha do método utilizado (Euler, Euler-Cromer, Runge-Kutta, etc.) e a ordem de atualização dos valores das derivadas.

A resolução deve incluir os cálculos e gráficos (para as duas massas m_1 e m_2) em função do tempo:

- das coordenadas $x_{1,2}(t)$, $y_{1,2}(t)$, e/ou os ângulos de cada uma $\theta_{1,2}(t)$;
- das velocidades $v^x_{1,2}(t)$, $v^y_{1,2}(t)$ e/ou a velocidade angular de cada uma $\alpha_{1,2}(t)$;
- da energia do sistema (cinética de cada massa, potencial de cada massa e total);
- gerar diagramas de fase (gráficos de x vs vx ou θ vs α) e
- salvar os cálculos como tabelas (de texto, csv, etc) e os gráficos como imagens (jpg, png, pdf, eps, etc).
- Bônus se fizerem também animação do movimento (pode ser "on the fly" ou salvo como arquivo).
- O código deve vir com instruções adequadas para as professoras testarem alguns valores arbitrários.
- Pode ser implementado em Jupyter notebook ou script ".py" para rodar no terminal. Se precisar instalar pacotes para rodar, indique nas instruções do programa.

Dica para animação

```python
import matplotlib.animation as animation
from matplotlib import rc
rc('animation', html='jshtml')
from IPython.display import HTML, Image, display # For GIF
fig, ax = plt.subplots()
xdata, ydata = x, y
ln, = plt.plot([], [], 'ro', animated = True)     ### A massa
spring, = plt.plot([], [], 'b-', linewidth = 2)   ### A linha do pendulo
traj, = plt.plot([],[],'g-',linewidth=1)          ### A trajetoria
def init():
   ax.set_xlim(-1.1*L, 1.1*L)       ### O “quadro” e eixos,
   ax.set_ylim(-1.1*L,0)            ### no caso do pendulo simples L delimita o tamanho
   return ln,
def draw(n):
   spring.set_data([ 0.0, xdata[n] ], [ 0.0,  ydata[n] ])
   ln.set_data(xdata[n], ydata[n])
   traj.set_data(xdata[:n],ydata[:n])
   return spring,ln,traj
ani = animation.FuncAnimation(fig, draw, 301, interval= 1,  init_func=init, blit=True)
# Save as GIF
ani.save('anima_pendulo_simples.gif', writer='pillow', fps=60)
```