# Física Geral

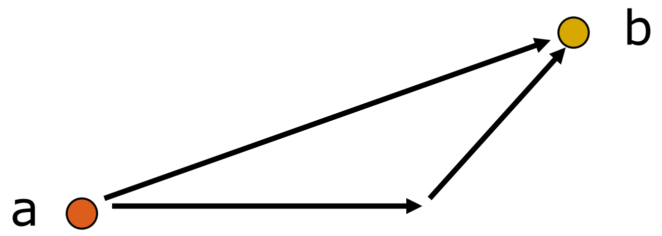
VETORES

# Grandezas

- Comprimento (m)
- Massa (kg)
- Tempo (s)
- Corrente elétrica (A)
- Quantidade da substância (mole)
- Temperatura (K)
- Intensidade luminosa (cd)

# Grandezas direcionais

São aquelas que dependem de uma especificação espacial para serem completamente definidas.




- Deslocamento
- Velocidade (quantidade de movimento)
- Aceleração (força)
- Torque
- Campo Elétrico
- Campo Magnético

Grandezas Vetoriais ou Vetores

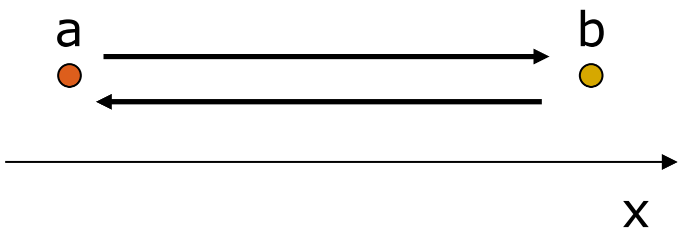
# Grandezas não-direcionais

Aquelas que são completamente definidas apenas por um valor numérico.

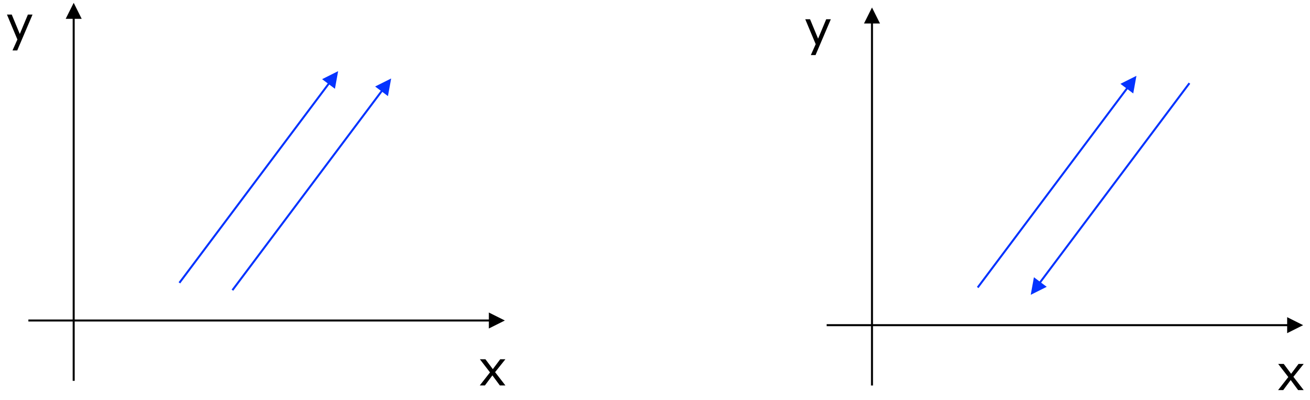
- Temperatura
- Intensidade luminosa
- Massa
- Corrente elétrica
- Tempo
- Energia
- Potência
- Resistência elétrica
- Freqüência

Grandezas Escalares ou Escalares

# Direção Orientada

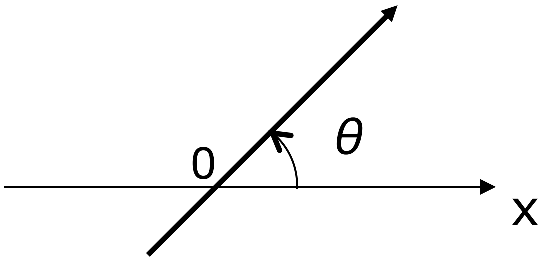


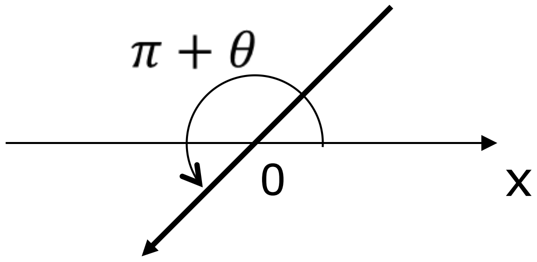

Eixo orientado

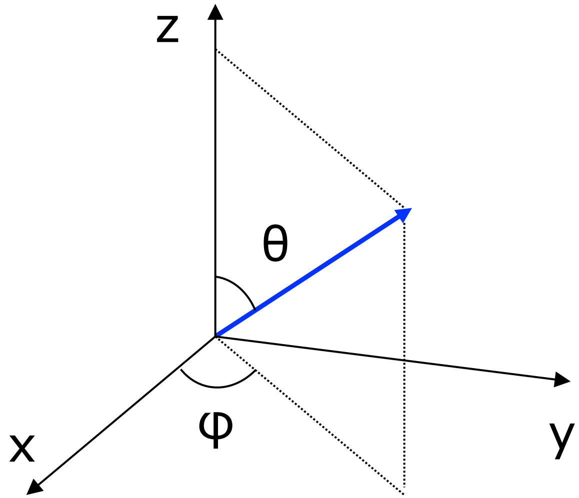



Eixos coordenados orientados

# Direção Orientada

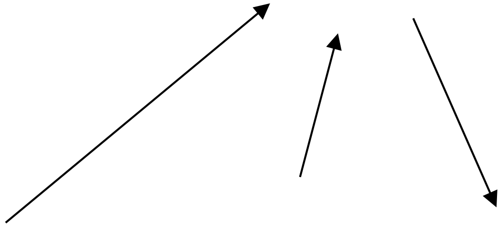


# Representação de vetores

Modo Gráfico: Segmento de reta orientado com a mesma direção e sentido que o vetor considerado e cujo comprimento é proporcional à magnitude do mesmo.



Modo escrito: Letras maiúsculas ou minúsculas em negrito:

**A, B, C, a, b, c**

Ou letras em itálico com uma flecha em cima:

$$\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$$

Módulo ou magnitude de um vetor é representado por:

$$A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c$$

ou

$$|\vec{A}|,\ |\vec{B}|,\ |\vec{C}|,\ |\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ |\vec{c}|$$

# Vetores

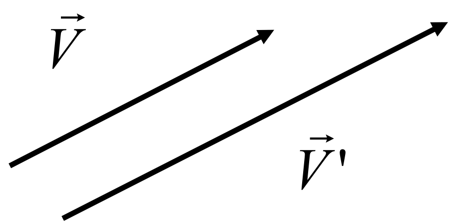
Vetor unitário é o vetor cujo módulo é a unidade.

$$\hat{u} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} \quad \text{tal que} \quad |\hat{u}| = 1 \ \text{ou} \ |\mathbf{u}| = 1$$

Qualquer vetor pode ser escrito em termos de um vetor unitário:

$$\vec{V} = \hat{u}\,V \quad \text{ou} \quad \vec{V} = \mathbf{u}\,V$$

Logo, se temos dois vetores paralelos podemos representá-los como:



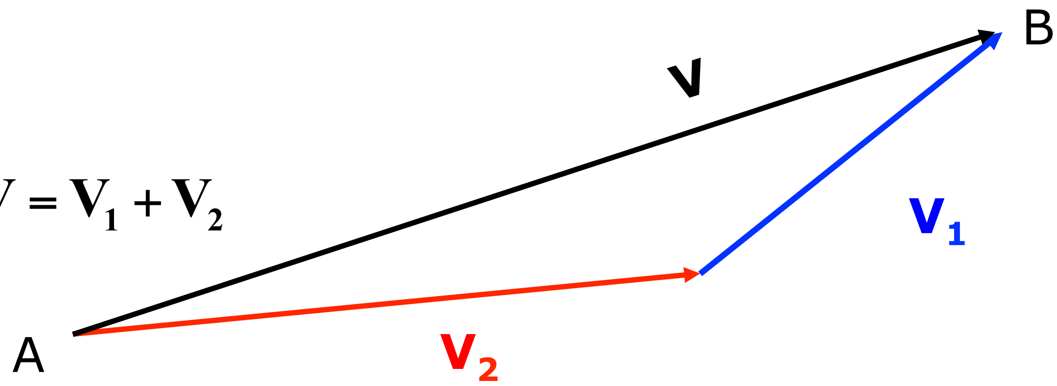

$$\vec{V} = \hat{u}\,V \quad \text{e} \quad \vec{V}' = \hat{u}\,V'$$

$$\text{sendo} \quad \hat{u} = \frac{\vec{V}}{V} \quad \text{e chamando } \lambda = \frac{V'}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}' = \lambda\,\vec{V}$$

# Soma de vetores

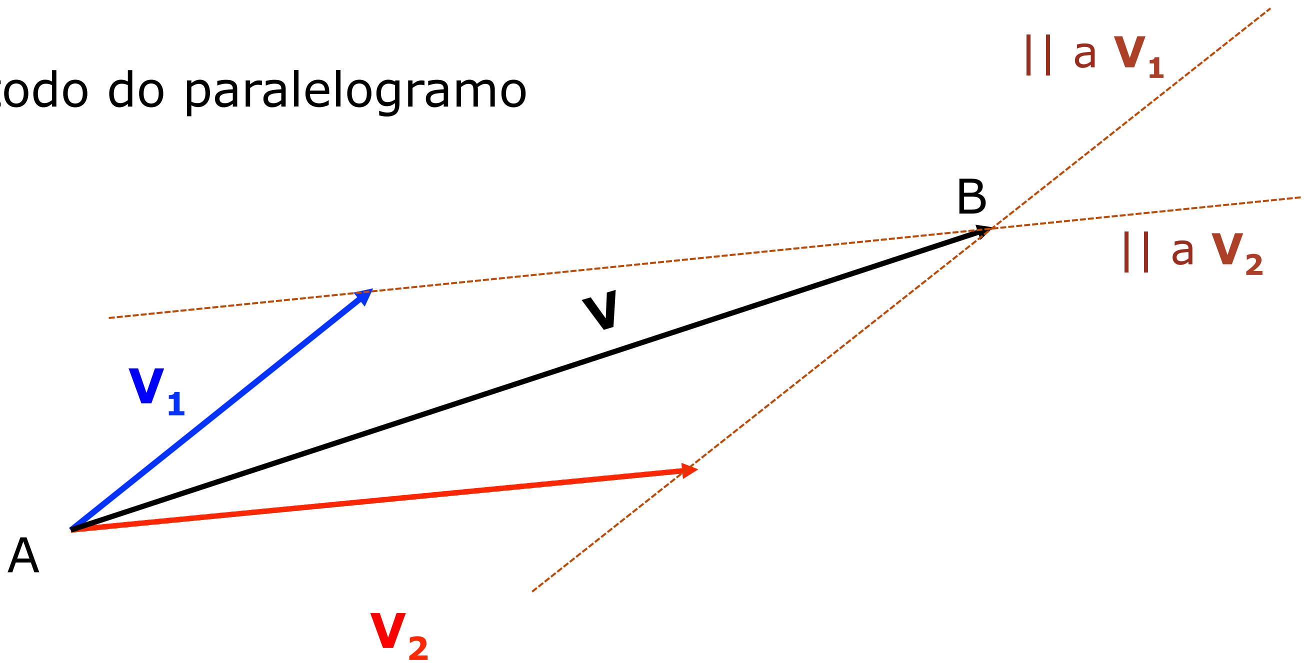
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$




$$\neq \quad V = V_1 + V_2$$

# Soma de vetores

Método do paralelogramo

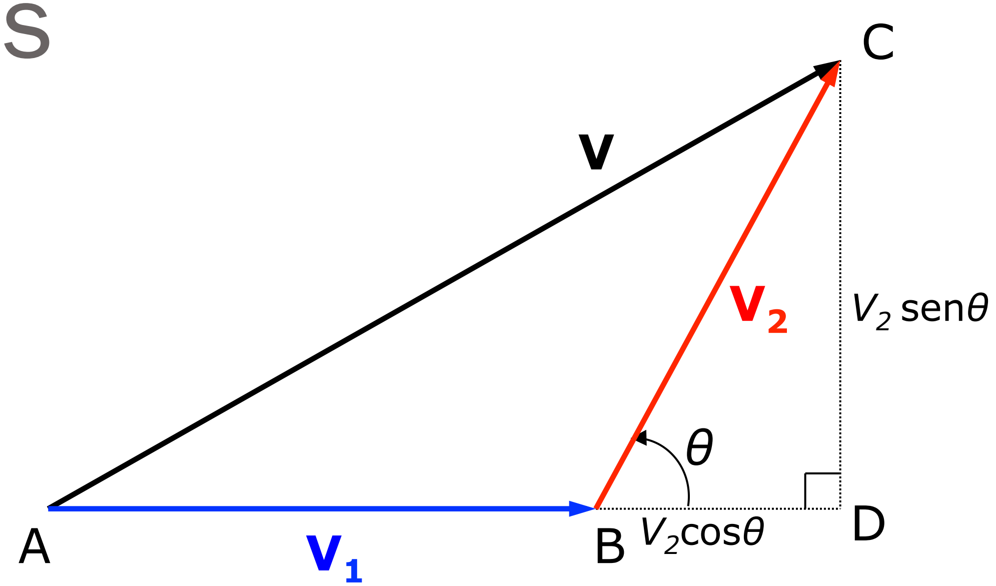



$$\mathbf{V = V_1 + V_2 = V_2 + V_1}\ \textbf{(Comutativo)}$$

# Soma de vetores

Calculando o módulo da soma de dois vetores

**V = V$_1$+V$_2$**




$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

$$AD = AB + BD = V_1 + V_2\cos\theta \qquad DC = V_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$V^2 = (V_1 + V_2\cos\theta)^2 + (V_2\operatorname{sen}\theta)^2 = V_1^2 + 2V_1V_2\cos\theta + V_2^2\cos^2\theta + V_2^2\operatorname{sen}^2\theta$$

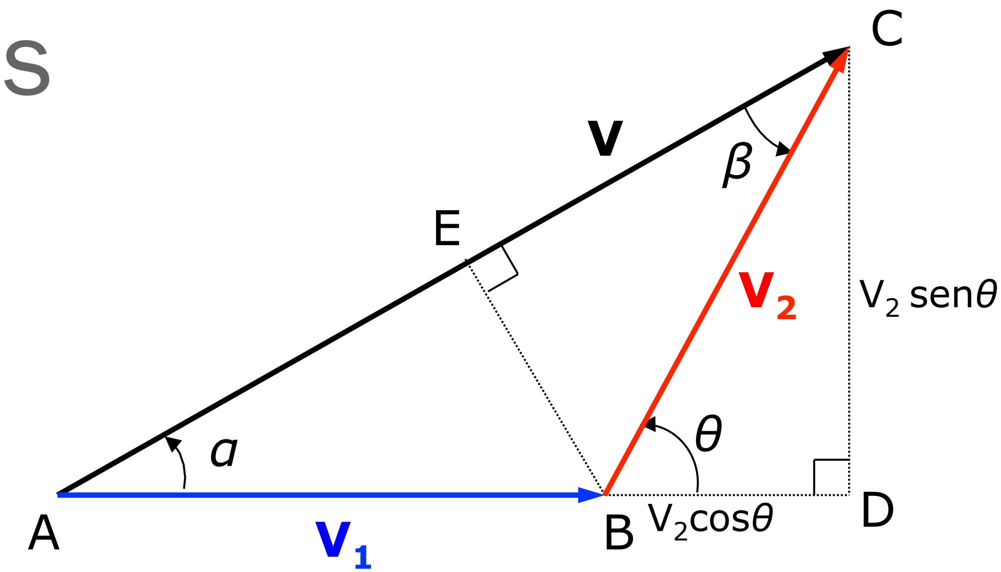
$$V = \sqrt{V_1^2 + 2V_1V_2\cos\theta + V_2^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$$

# Soma de vetores

Calculando a direção do vetor resultante **V**

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_1}+\mathbf{V_2}$$




$$CD = AC\,\mathrm{sen}\,\alpha = BC\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \leftrightarrow \quad V\,\mathrm{sen}\,\alpha = V_2\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{ou} \quad \frac{V}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{V_2}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

$$\text{da mesma forma} \rightarrow \quad V_1\,\mathrm{sen}\,\alpha = V_2\,\mathrm{sen}\,\beta \quad \leftrightarrow \quad \frac{V_1}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{V_2}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

$$\text{juntando as equações:} \quad \frac{V}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{V_1}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{V_2}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

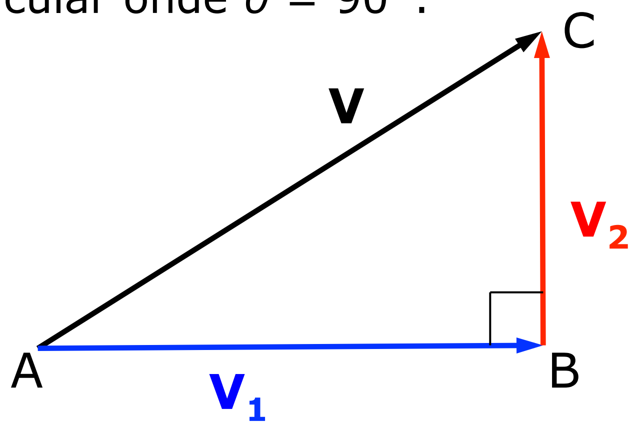
# Soma de vetores

Logo, para a soma de dois vetores:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$$

$$\frac{V}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{V_1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{V_2}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Onde no caso particular onde $\theta$ = 90°:



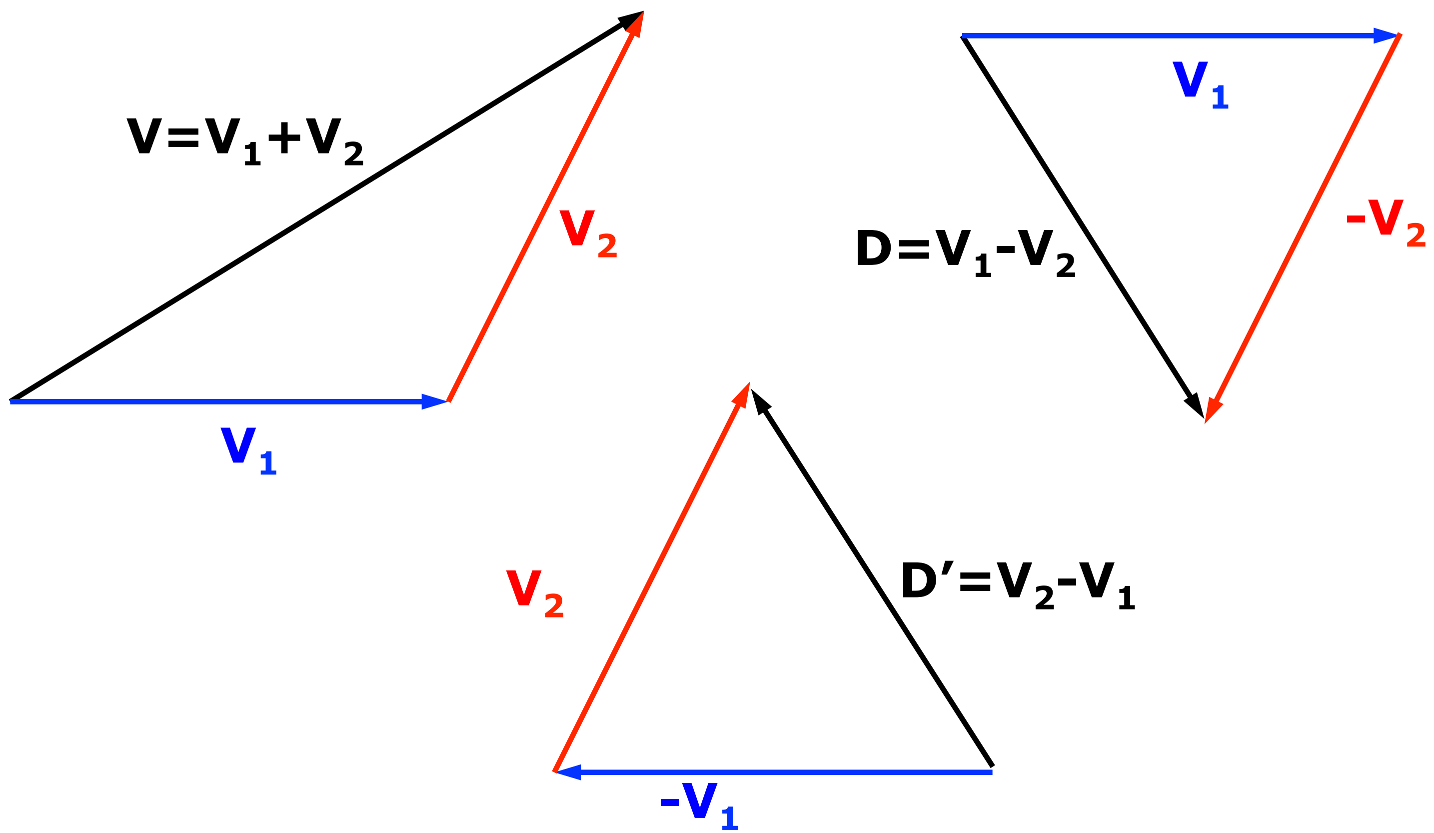

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{V_2}{V_1}$$

# Diferença entre dois vetores

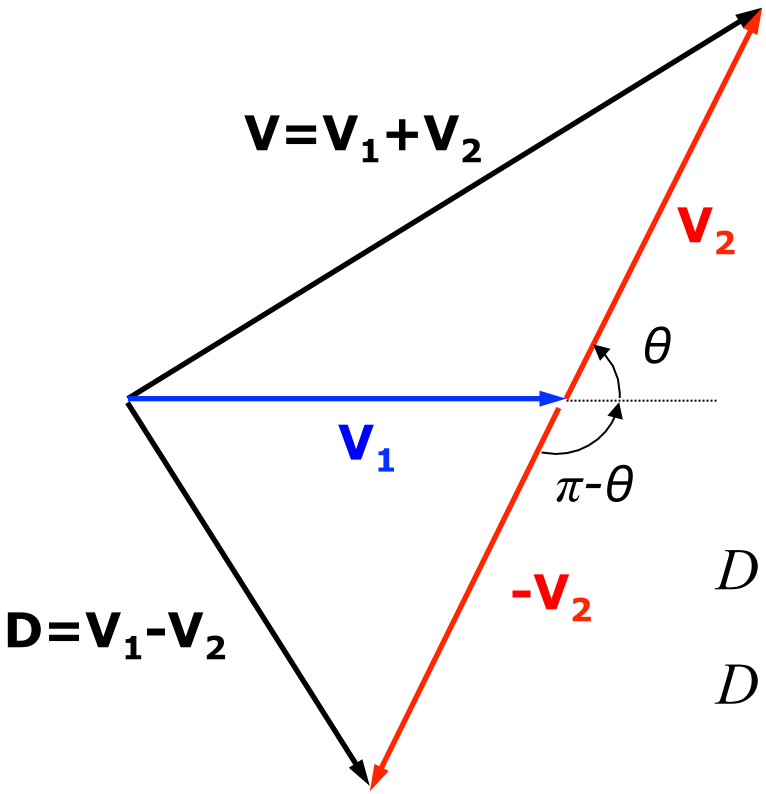
É obtida somando-se o primeiro com o inverso do segundo, isto é:

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2)$$




**D' = -D (a diferença é anti-comutativa)**

# Diferença entre dois vetores




$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\pi - \theta)}$$

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2(\cos\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta)}$$

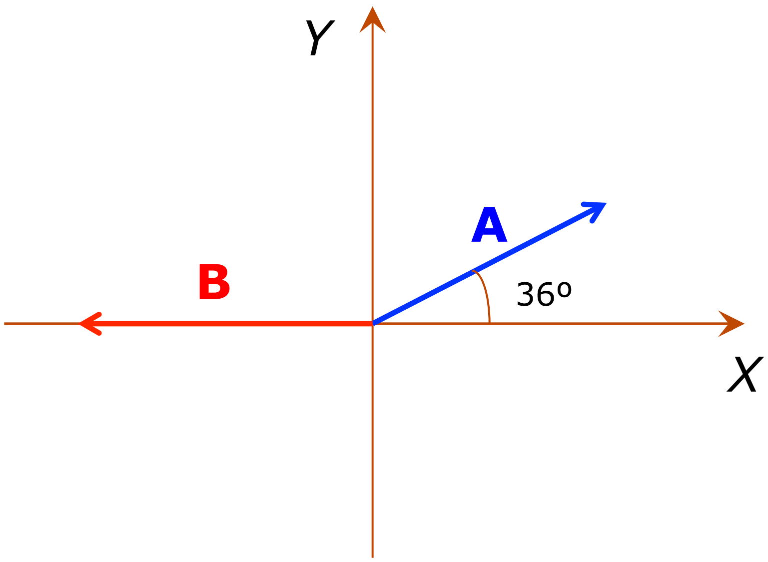
$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}$$

# Exemplo

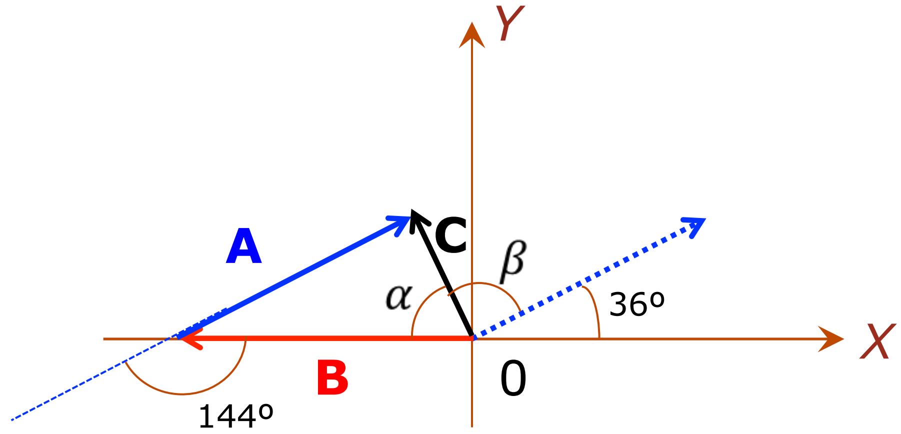
Dado um vetor **A** de 6 unidades de comprimento e que faz um ângulo de $+36^{\circ}$ com o eixo $X$ positivo; **B** com 7 unidades de comprimento e de mesma direção e sentido que o eixo $X$ negativo. Determine:

a) A soma dos dois vetores.

b) A diferença entre eles



# Exemplo




a) **C** = **A** + **B**
com $A$ = 6 e $B$ = 7

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 144^{\circ}} = 4{,}128\ \text{unidades}$$

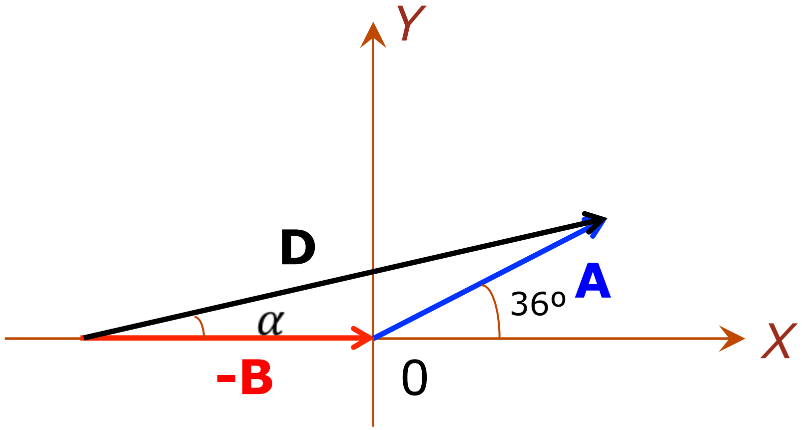
O ângulo entre **B** e **C** pode ser determinado por

$$\frac{C}{\operatorname{sen} 144^{\circ}} = \frac{A}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \rightarrow \alpha \approx 58{,}69^{\circ}$$

Logo, temos que o ângulo $\beta$ é 85,31º e, portanto, o ângulo de **C** em relação ao eixo $X$ é de 121,31º.

# Exemplo

b) **D**= **A** - **B**




$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 36^{\circ}} \quad \text{ou}$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos 144^{\circ}} = 12{,}31\ \text{unidades}$$

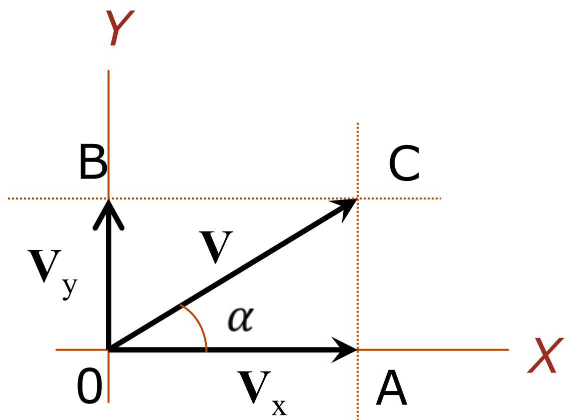
Utilizando a lei do senos,

$$\frac{D}{\text{sen}\,36^{\circ}} = \frac{A}{\text{sen}\,\alpha} \quad \rightarrow \alpha \approx 16{,}64^{\circ}$$

O vetor diferença **D** faz um ângulo de 16,64º com o eixo *X*.

# Componentes de um Vetor

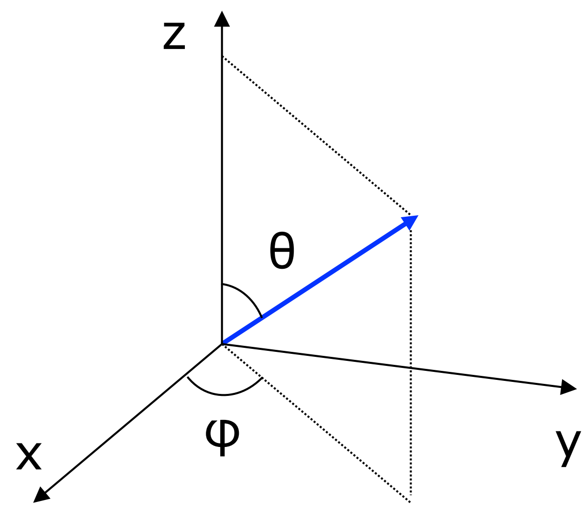
Qualquer vetor **V** pode ser considerado como o resultado da soma de dois ou mais vetores. As suas *componentes ortogonais* $\mathbf{V}_x$ e $\mathbf{V}_y$ são mutuamente perpendiculares.




No plano

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{u}_x V_x \;,\; V_x = V\cos\alpha$$

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{u}_y V_y \;,\; V_y = V\mathrm{sen}\,\alpha$$

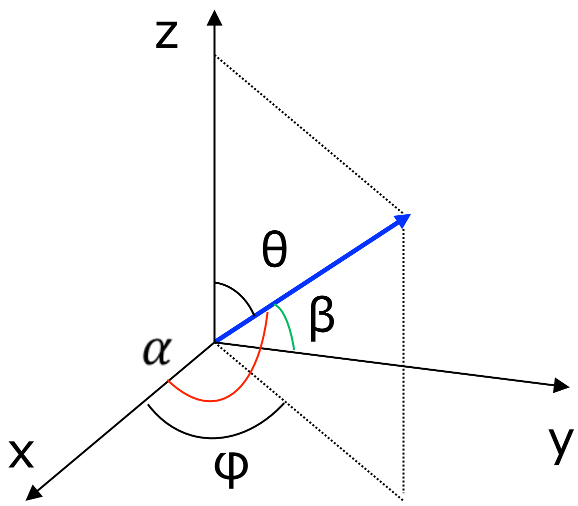



$$V_x = V\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\varphi$$
$$V_y = V\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\varphi$$
$$V_z = V\ \cos\theta$$

Segue que

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

# Componentes de um Vetor



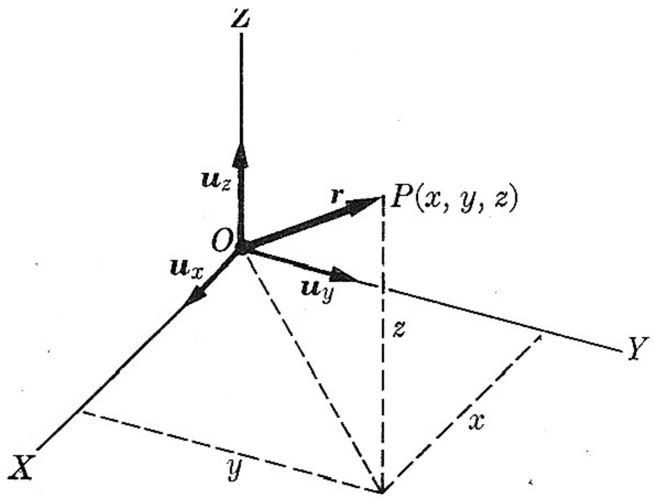

$$V_x = V\cos\alpha\,, \quad V_y = V\cos\beta$$

Assim, temos também que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$$

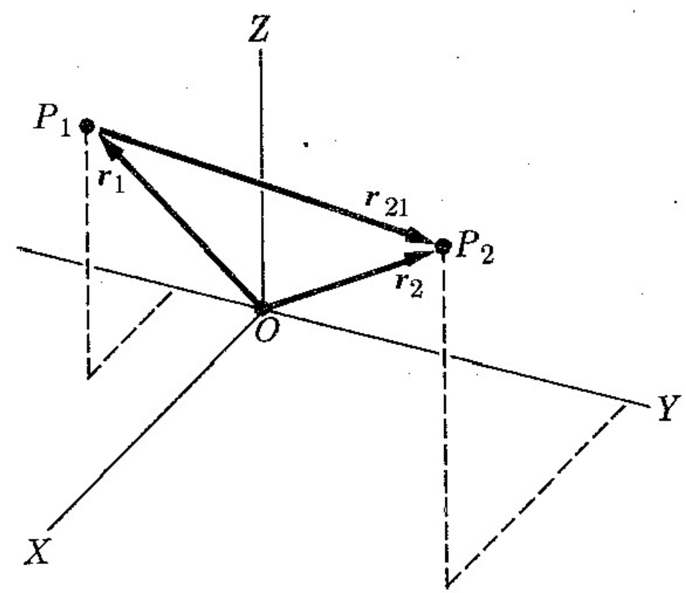
# Vetor posição

Um caso particularmente importante é o do *vetor-posição* $\mathbf{r}$ de um ponto de $P$ de coordenadas $(x, y, z)$.




$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_y y + \boldsymbol{u}_z z$$

O vetor-posição relativo de dois pontos $P_1$ e $P_2$ é




$$\boldsymbol{r}_{21} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$
$$= \boldsymbol{u}_x(x_2 - x_1) + \boldsymbol{u}_y(y_2 - y_1) + \boldsymbol{u}_z(z_2 - z_1)$$

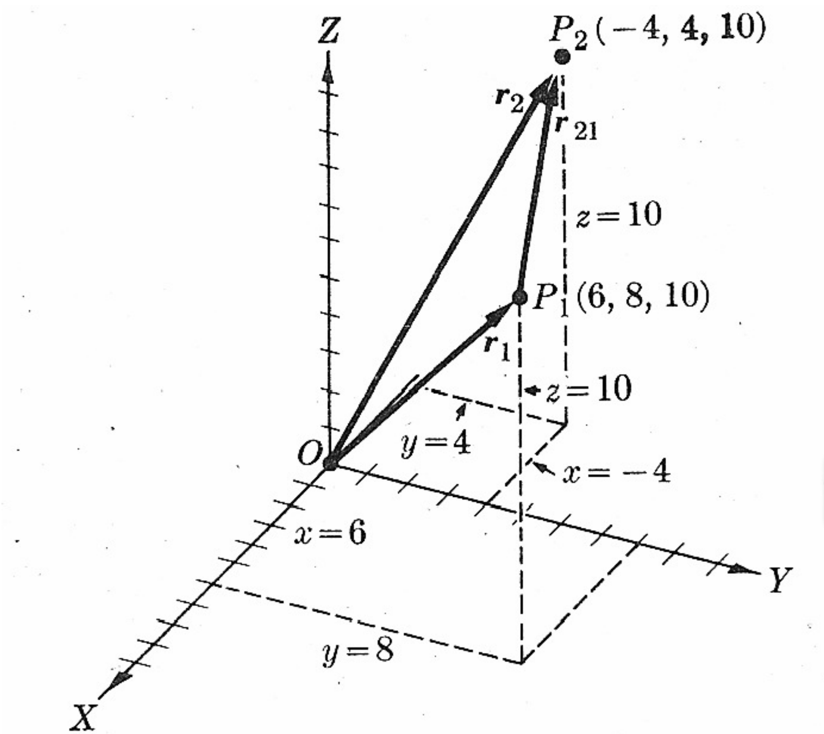
Ou seja,

$$r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

# Exemplo

Calcule a distância entre os dois pontos (6, 8,10) e (-4, 4, 10).

*Solução:*




$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{u}_x(-4-6) + \boldsymbol{u}_y(4-8) + \boldsymbol{u}_z(10-10) \\
&= \boldsymbol{u}_x(-10) + \boldsymbol{u}_y(-4) + \boldsymbol{u}_z(0) = -\boldsymbol{u}_x(10) - \boldsymbol{u}_y(4)
\end{aligned}
$$

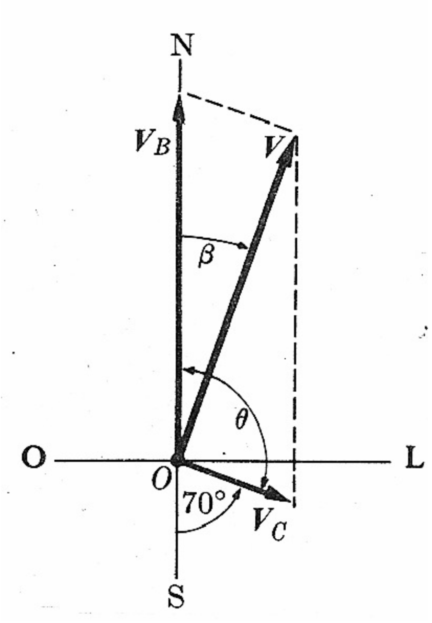
Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos,

$$\boxed{r_{21}^2 = 100 + 16 = 116 \quad \text{ou} \quad r_{21} = 10{,}77 \text{ unidades.}}$$

# Aplicações aos Problemas da Cinemática

Um barco a motor desloca-se a 15 km/h com a proa voltada para o norte, num local onde a corrente é de 5 km/h na direção S 70º E. Calcule a velocidade do barco em relação às margens.

*Solução*:




A velocidade resultante será a soma vetorial da velocidade do barco em relação à água $\mathbf{V}_B$ com a velocidade da corrente $\mathbf{V}_C$.

$$V = V_B + V_C$$

Como θ = 110º, obtém-se analiticamente

$$V = \sqrt{15^2 + 5^2 + 2(15)(5)\cos 110^\circ} = 14{,}1\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

Para obter a direção aplicamos a lei dos senos,

$$\frac{V}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{V_C}{\operatorname{sen}\beta} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{V_C \operatorname{sen}\theta}{V} = 0{,}332$$

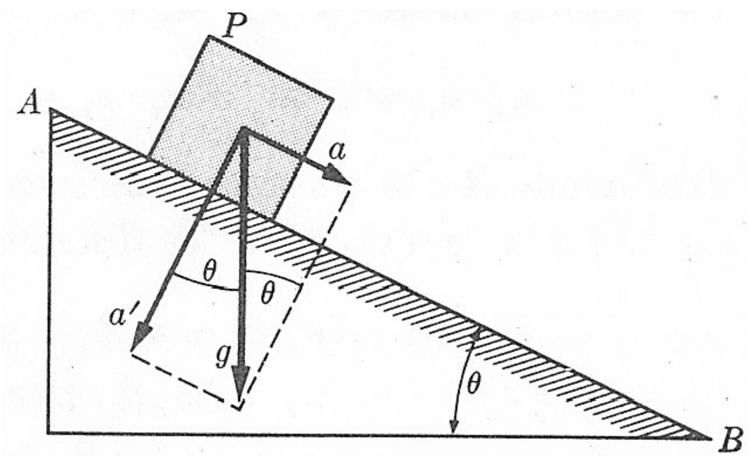
O que resulta em na direção N19,4º E.

# Aplicações aos Problemas da Cinemática

Calcule a aceleração de um corpo que desliza sobre um plano inclinado segundo o ângulo θ.

*Solução*:

Seja $P$ um corpo que desliza para baixo sem atrito sobre o plano $AB$, que é inclinado segundo um ângulo θ. Se não existisse, o corpo cairia livremente na vertical com aceleração igual a $g = 9{,}8\ m/s^2$.




As componentes da acelaração perpendicular e paralela ao plano são dadas, respectivamente, por

$$a' = g\cos\theta \quad \text{e} \quad a = g\,\mathrm{sen}\,\theta$$