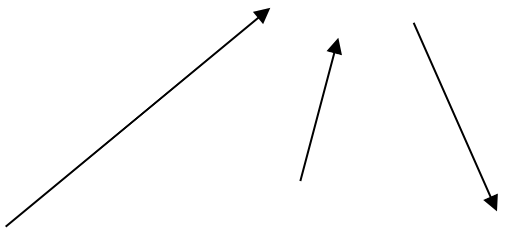
AULA PASSADA

Representação de vetores

Modo Gráfico: Segmento de reta orientado com a mesma direção e sentido que o vetor considerado e cujo comprimento é proporcional à magnitude do mesmo.



Modo escrito: Letras maiúsculas ou minúsculas em negrito:

A, **B**, **C**, **a**, **b**, **c**

Ou letras em itálico com uma flecha em cima:

$$\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$$

Módulo ou magnitude de um vetor é representado por:

A, B, C, a, b, c

ou

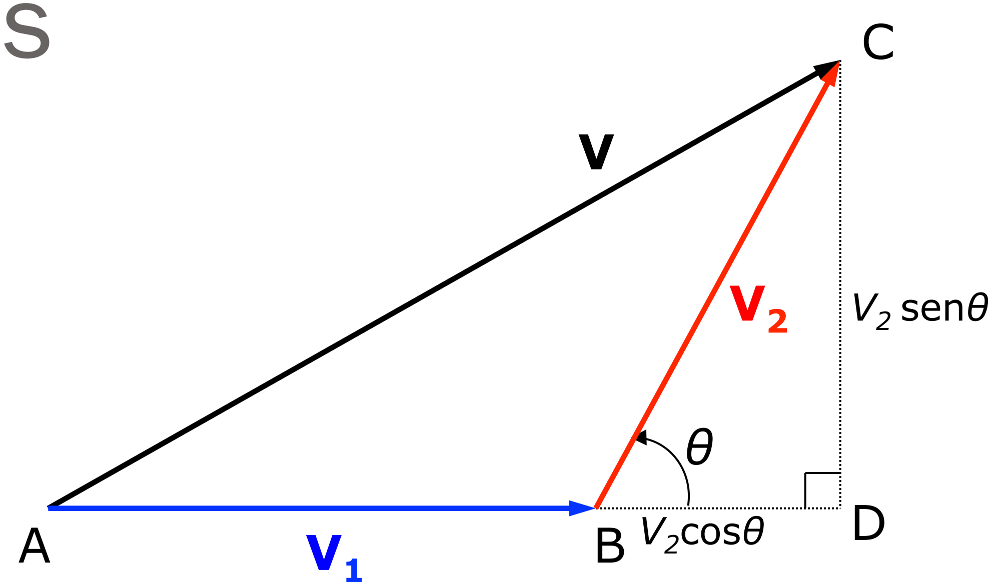
$$\left|\vec{A}\right|, \left|\vec{B}\right|, \left|\vec{C}\right|, \left|\vec{a}\right|, \left|\vec{b}\right|, \left|\vec{c}\right|$$

AULA PASSADA

Soma de vetores

Calculando o módulo da soma de dois vetores

V = V$_1$+V$_2$



$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

$$AD = AB + BD = V_1 + V_2\cos\theta \qquad DC = V_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$V^2 = (V_1 + V_2\cos\theta)^2 + (V_2\operatorname{sen}\theta)^2 = V_1^2 + 2V_1V_2\cos\theta + V_2^2\cos^2\theta + V_2^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + 2V_1V_2\cos\theta + V_2^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}$$

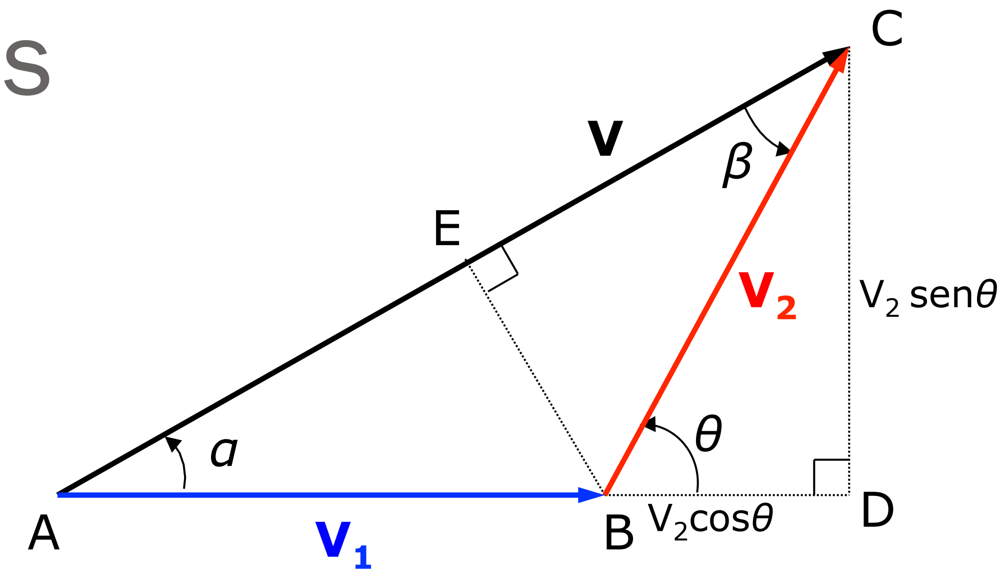
$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$$

AULA PASSADA

Soma de vetores

Calculando a direção do vetor resultante **V**

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$$



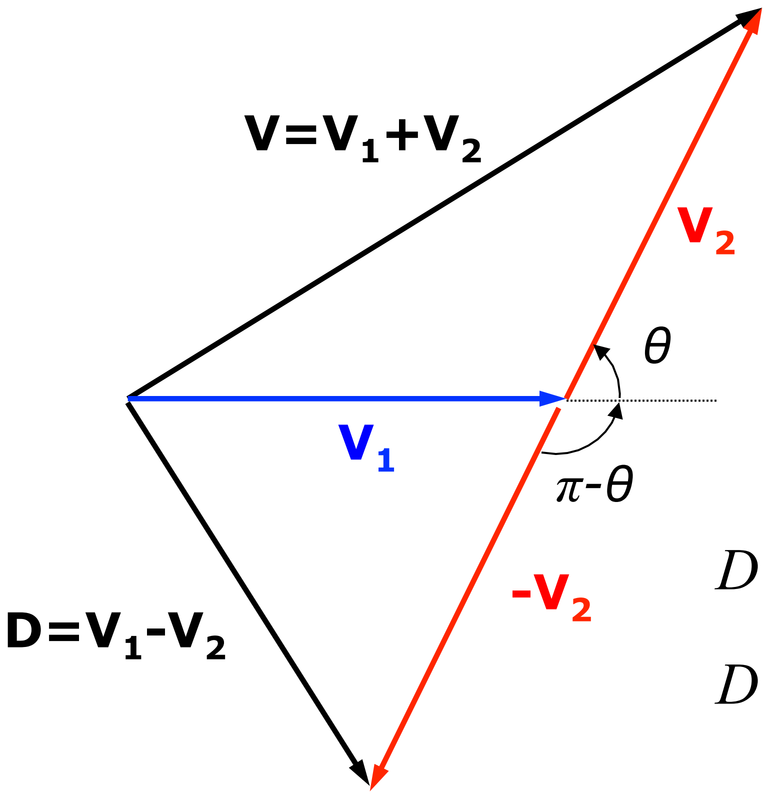
$$CD = AC \operatorname{sen} \alpha = BC \operatorname{sen} \theta \quad \leftrightarrow \quad V \operatorname{sen} \alpha = V_2 \operatorname{sen} \theta \quad \text{ou} \quad \frac{V}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{V_2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{da mesma forma} \rightarrow \quad V_1 \operatorname{sen} \alpha = V_2 \operatorname{sen} \beta \quad \leftrightarrow \quad \frac{V_1}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{V_2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{juntando as equações}: \quad \frac{V}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{V_1}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{V_2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

AULA PASSADA

Diferença entre dois vetores



$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\pi - \theta)}$$

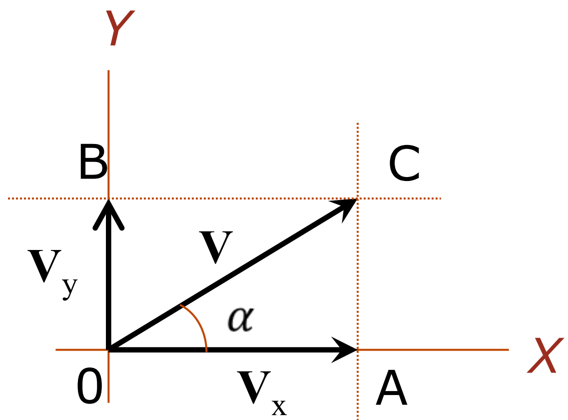
$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2(\cos\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta)}$$

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}$$

AULA PASSADA

Componentes de um Vetor

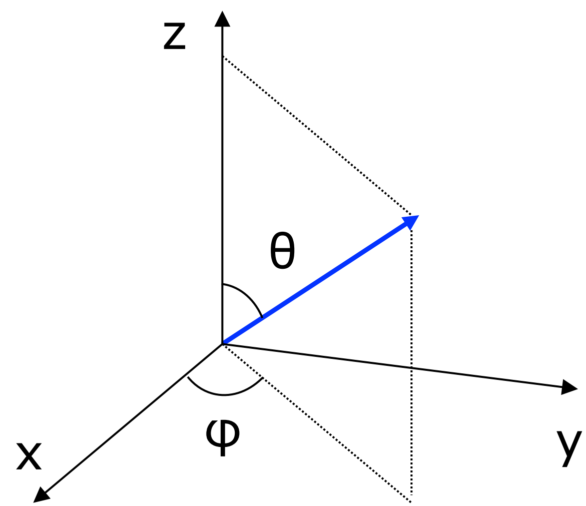
Qualquer vetor **V** pode ser considerado como o resultado da soma de dois ou mais vetores. As suas *componentes ortogonais* $\mathbf{V}_x$ e $\mathbf{V}_y$ são mutuamente perpendiculares.



No plano

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{u}_x V_x \ , \ V_x = V\cos\alpha$$

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{u}_y V_y \ , \ V_y = V\mathrm{sen}\,\alpha$$



$$V_x = V\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\varphi$$
$$V_y = V\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\varphi$$
$$V_z = V\ \cos\theta$$

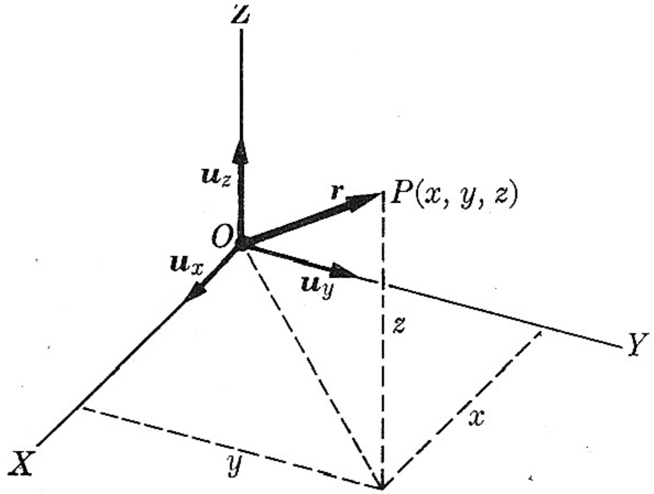
Segue que

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

AULA PASSADA

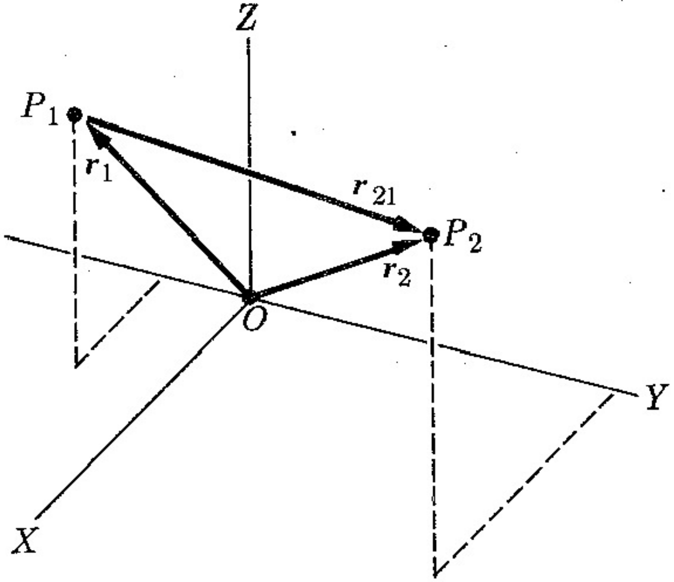
Vetor posição

Um caso particularmente importante é o do *vetor-posição* **r** de um ponto de P de coordenadas (x, y, z).



$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_y y + \boldsymbol{u}_z z$$

O vetor-posição relativo de dois pontos P_1 e P_2 é



$$\boldsymbol{r}_{21} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$
$$= \boldsymbol{u}_x(x_2 - x_1) + \boldsymbol{u}_y(y_2 - y_1) + \boldsymbol{u}_z(z_2 - z_1)$$

Ou seja,

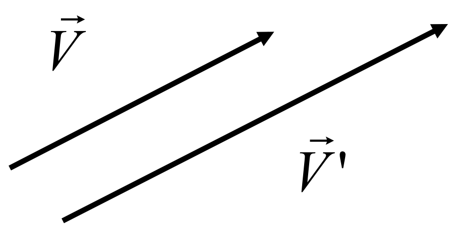
$$r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Física Geral

Produto de Vetores

Produto de um Vetor e um escalar

Se temos dois vetores paralelos podemos representá-los como:



$$\vec{V} = \hat{u}V \quad \text{e} \quad \vec{V}' = \hat{u}V'$$

$$\text{sendo} \quad \hat{u} = \frac{\vec{V}}{V} \quad \text{e chamando } \lambda = \frac{V'}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}' = \lambda \vec{V}$$

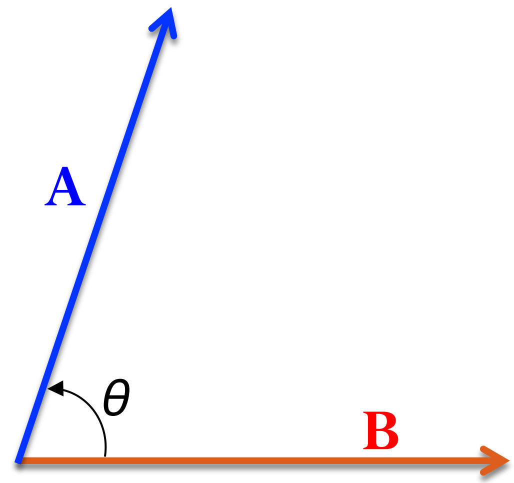
Produto Escalar

É uma grandeza escalar representada por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \quad \text{(Leia - se A escalar B.)}$$

O valor é definido por

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta}$$



Assim, o produto escalar entre os vetores unitários ortogonais é:

$$\hat{u}_x \cdot \hat{u}_x = \hat{u}_y \cdot \hat{u}_y = \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = 1$$

e

$$\hat{u}_x \cdot \hat{u}_y = \hat{u}_x \cdot \hat{u}_z = \hat{u}_y \cdot \hat{u}_z = 0$$

Produto Escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

Propriedade distributiva em relação à soma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Usando as componentes ortogonais:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z\right) \cdot \left(B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z\right)$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Notando que

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

como visto anteriormente.

Produto Escalar

Também, mostra-se facilmente que o módulo da soma $V = A + B$,

$$V^2 = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

Isto é válido para a soma de qualquer número de vetores

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots. = \sum_i \vec{V}_i$$

Nesse caso

$$V^2 = \left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots\right)^2$$

$$= \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots + 2\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + 2\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 + \ldots + 2\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 + \ldots$$

$$= \sum_{\substack{\text{todos} \\ \text{vetores}}} V_i^2 + 2\sum_{\substack{\text{todos} \\ \text{pares}}} \vec{V}_i \cdot \vec{V}_j$$

Produto Escalar

EXEMPLO 3.10. Calcule o ângulo entre os vetores $A = 2u_x + 3u_y - u_z$ e $B = -u_x + u_y + 2u_z$.

Solução: Inicialmente, computamos o produto escalar dêsses vetores usando a Eq. (3.20):

$$A \cdot B = 2(-1) + 3(1) + (-1)2 = -1.$$

Também

$$A = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} = 3{,}74 \text{ unidades}$$

e

$$B = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} = 2{,}45 \text{ unidades.}$$

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta}$$

Então, da Eq. (3.17), teremos

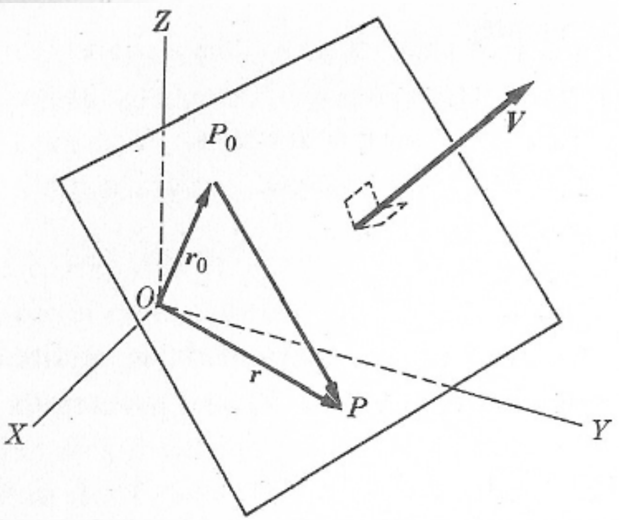
$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{AB} = -\frac{1}{9{,}17} = -0{,}109,$$

que corresponde a $\theta = 96{,}3°$.

Produto Escalar

EXEMPLO 3.11. Determine a equação de um plano que passa pelo ponto P_0 e é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x A + \boldsymbol{u}_y B + \boldsymbol{u}_z C$.

Solução: Chamando $\boldsymbol{r}_0$ o vetor-posição de P_0 (Fig. 3-28) e $\boldsymbol{r}$ o vetor-posição de um ponto qualquer P do plano considerado, vemos fàcilmente que o vetor



$$\overrightarrow{P_0P} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$$

deve ser perpendicular a $\boldsymbol{V}$. Então

$$\boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$$

é a equação que deve ser satisfeita pelos vetores-posição $\boldsymbol{r}$ de todos os pontos do plano. Usando a Eq. (3.20), podemos escrever

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

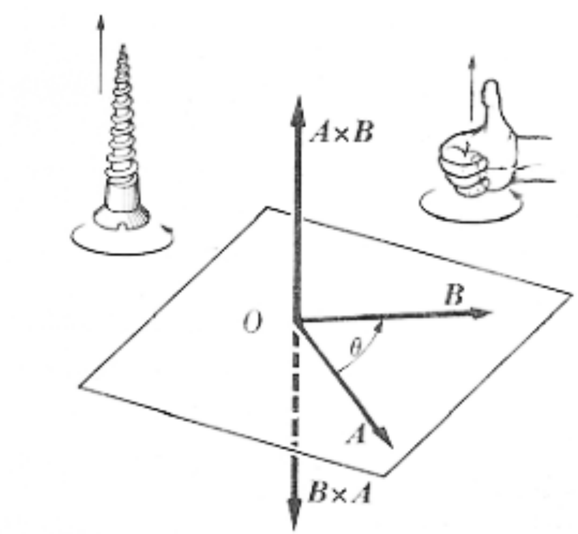
que é a forma analítica de representar a equação de um plano perpendicular a uma reta dada.

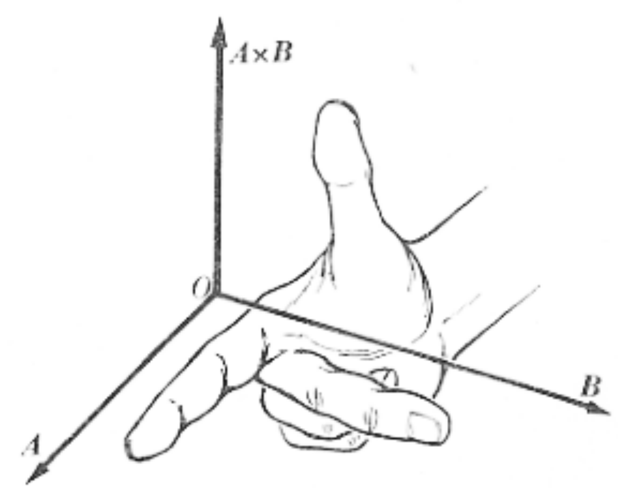
Produto Vetorial

A representação é dada por

$$A \times B \quad \text{(leia-se A vetor B).}$$

É um vetor perpendicular ao plano formado por A e B

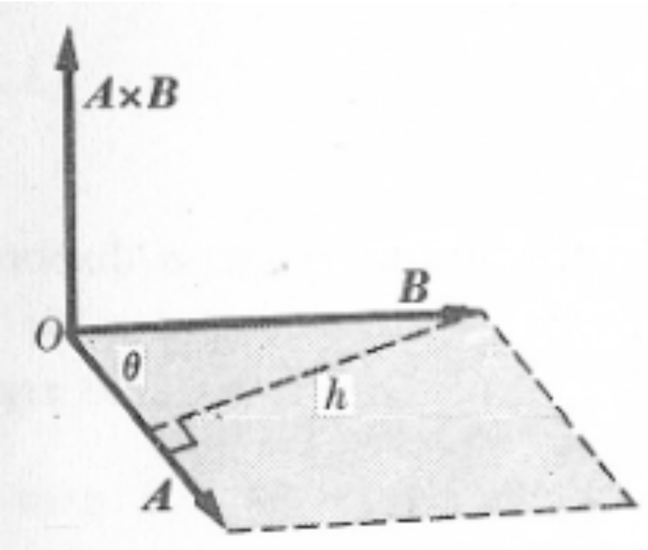




$|A \times B| = AB\,\text{sen}\,\theta$ e $A \times B = -B \times A$

Produto Vetorial

O módulo do produto vetorial é igual à área do paralelogramo formado pelos dois vetores.



$$|A \times B| = A(B\,\mathrm{sen}\,\theta) = Ah$$

Produto Vetorial

Propriedade distributiva em relação à soma:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

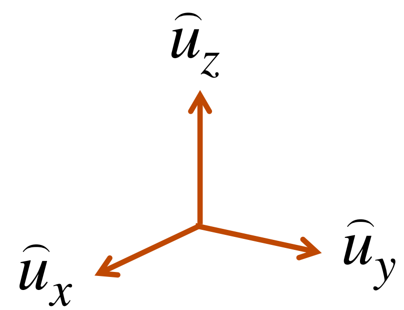
O produto entre os vetores ortogonais unitários é:

$$\hat{u}_x\times\hat{u}_y=-\hat{u}_y\times\hat{u}_x=\hat{u}_z,$$

$$\hat{u}_y\times\hat{u}_z=-\hat{u}_z\times\hat{u}_y=\hat{u}_x,$$

$$\hat{u}_z\times\hat{u}_x=-\hat{u}_x\times\hat{u}_z=\hat{u}_y,$$

$$\hat{u}_x\times\hat{u}_x=\hat{u}_y\times\hat{u}_x=\hat{u}_z\times\hat{u}_z=0$$



$$|A\times B|=AB\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Produto Vetorial

Escrevendo o produto vetorial em termos das componentes ortogonais, temos

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\hat{u}_x+A_y\hat{u}_y+A_z\hat{u}_z\right)\times\left(B_x\hat{u}_x+B_y\hat{u}_y+B_z\hat{u}_z\right)$$

ou

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\hat{u}_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\hat{u}_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{u}_z$$

Podendo ser representado também pelo determinante

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\hat{u}_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\hat{u}_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{u}_z$$

Produto Vetorial

EXEMPLO 3.12. Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{u}_x + 3\boldsymbol{u}_y - \boldsymbol{u}_z \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{u}_x + \boldsymbol{u}_y + 2\boldsymbol{u}_z .$$

Solução: Inicialmente, computamos o produto vetorial de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$, usando a Eq. (3.26):

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\boldsymbol{u}_x - 3\boldsymbol{u}_y + 5\boldsymbol{u}_z .$$

Então, a área do paralelogramo será apenas o módulo de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, ou

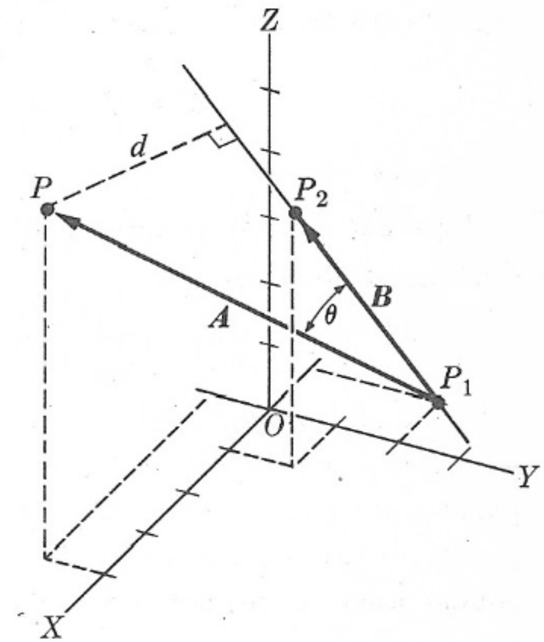
$$\text{Área} = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \sqrt{49 + 9 + 25} = 9{,}110 \text{ unidades.}$$

Produto Vetorial

EXEMPLO 3.13. Determine a distância entre o ponto P (4, –1,5) e a reta que passa pelos pontos P_1 (–1, 2, 0) e P_2 (1, 1, 4).

Solução: A representação geométrica do problema está ilustrada na Fig. 3-33. Podemos ver que $d = P_1P \operatorname{sen} \theta$. Introduzindo os vetores

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{P_1P} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \overrightarrow{P_1P_2},$$



e usando a Eq. (3.14), obtemos

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{P_1P} = 5\boldsymbol{u}_x - 3\boldsymbol{u}_y + 5\boldsymbol{u}_z,$$

$$\boldsymbol{B} = \overrightarrow{P_1P_2} = 2\boldsymbol{u}_x - \boldsymbol{u}_y + 4\boldsymbol{u}_z.$$

Vemos, então, que

$$d = A \operatorname{sen} \theta = \frac{AB \operatorname{sen} \theta}{B} = \frac{|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|}{B}.$$

Agora, usando a Eq. (3.26) para calcular o produto vetorial de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$, obtemos

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -7\boldsymbol{u}_x - 10\boldsymbol{u}_y + 1\boldsymbol{u}_z.$$

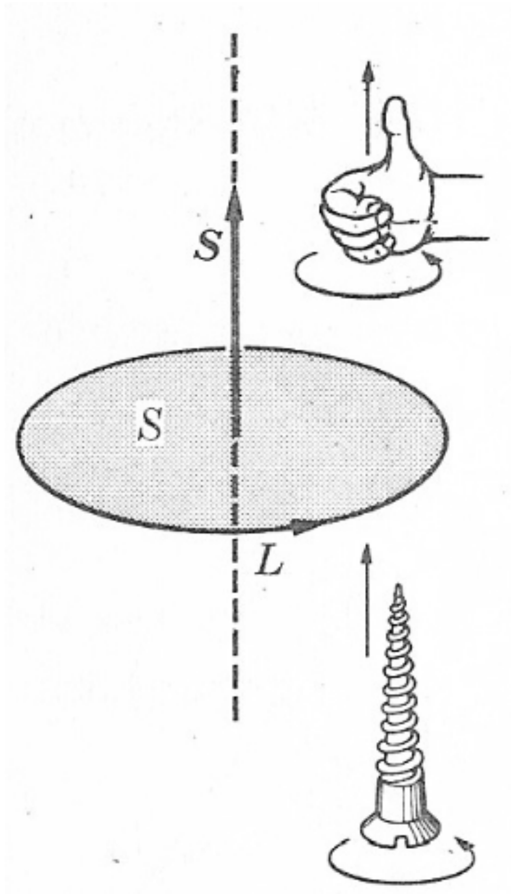
Produto Vetorial

Então, $|A \times B| = \sqrt{49 + 100 + 1} = \sqrt{150} = 12{,}25$, e, como $B = \sqrt{4 + 1 + 16} =$
$= \sqrt{21} = 4{,}582$, obtemos

$$d = \frac{|A \times B|}{B} = 2{,}674.$$

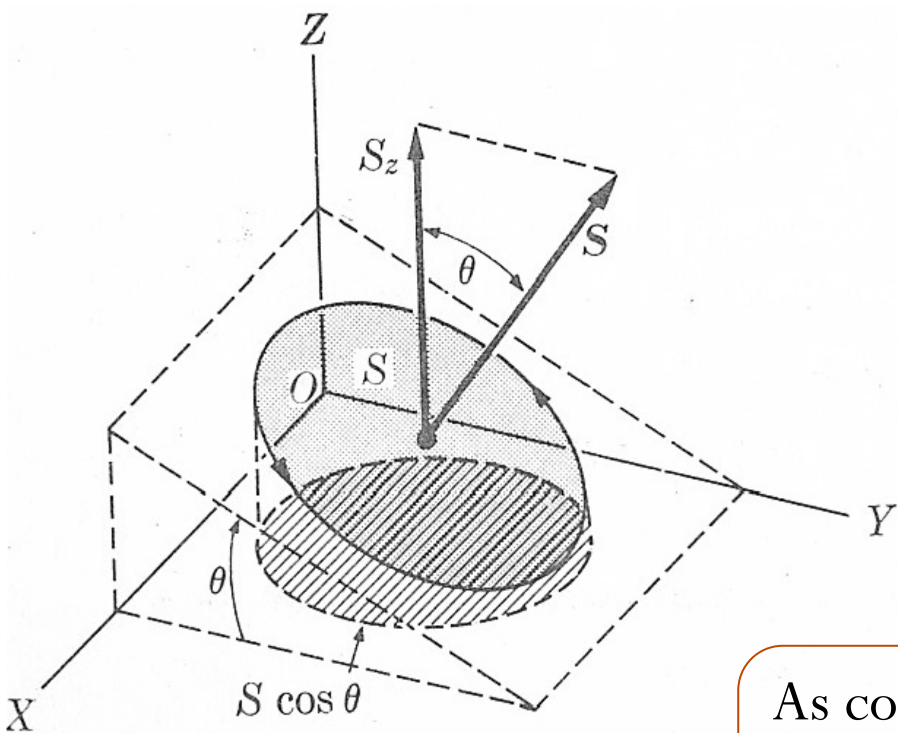
Área - Representação Vetorial

Consideremos uma superfície plana *S*. Convenciona-se representá-la por um vetor, cujo módulo é igual à área da superfície e cuja direção é perpendicular à superfície.



Área - Representação Vetorial

Suponhamos que a superfície faça um ângulo θ com o plano *XY*.



A projeção de S sobre o plano *XY* é $S\cos\theta$.

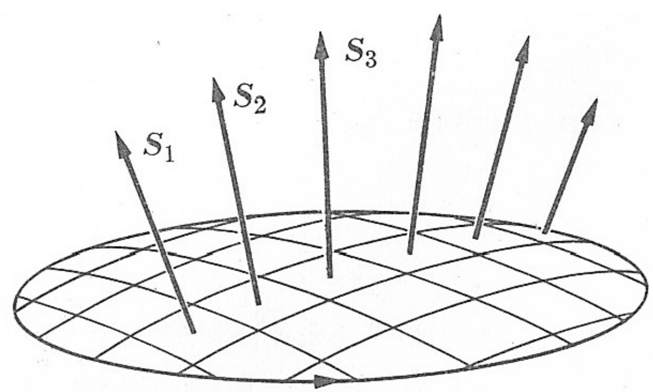
Mas a normal com o plano também faz o mesmo ângulo com o eixo Z. Logo, também

$$S_Z = S\cos\theta.$$

As componentes do vetor $\boldsymbol{S}$ são iguais às projeções da superfície sobre os três planos coordenados.

Área - Representação Vetorial

Se a superfície não é plana, pode sempre ser dividida em um grande número de áreas muito pequenas, cada uma representada por um vetor.



$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_4 + \ldots = \sum_i \vec{S}_i$$

Porém,

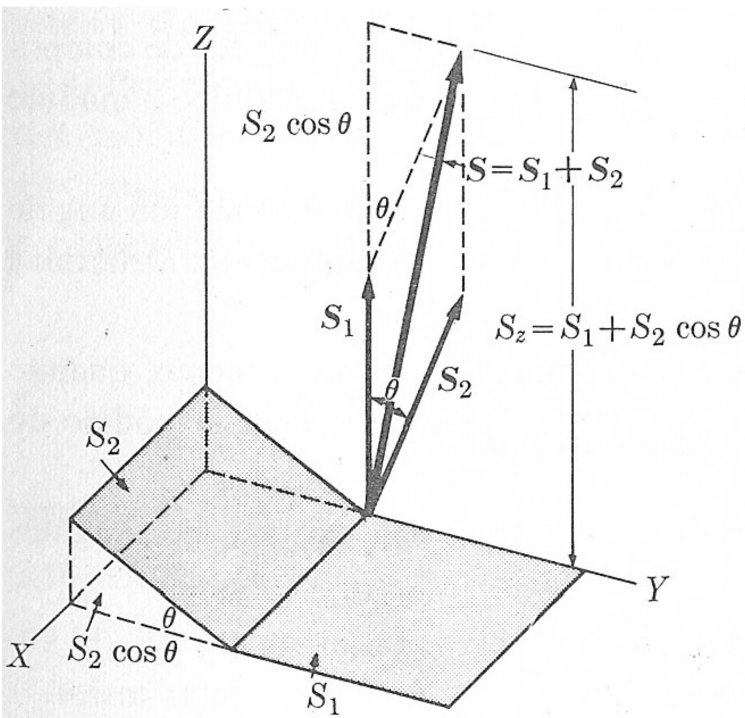
$$\left|\vec{S}\right| \neq \sum_i S_i$$

Ou seja, o módulo do vetor ***S*** não é igual à área da superfície. Mas as suas componentes são iguais às projeções da área sobre os três planos coordenados.

Área - Representação Vetorial

Exemplo:

Suponha um terreno composto de uma área de horizontal S_1 e outra inclinada S_2. A área utilizável para a lavoura é $S_1 + S_2$. Mas supondo que o terreno seja utilizado para a construção de um prédio, apenas a projeção horizontal interessa. Ou seja a área de interesse é $S_1 + S_2\cos\theta$.



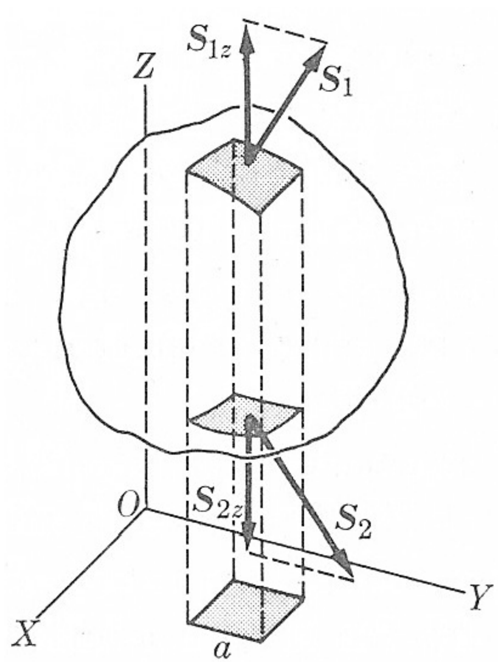
O vetor $\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ possui módulo igual a

$$\left|\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\theta}$$

que é menor que $S_1 + S_2$. Mas a sua componente Z é igual a $S_1 + S_2\cos\theta$, que concorda com a projeção das superfícies no plano XY.

Área - Representação Vetorial

Consideremos uma superfície fechada. Dividamo-la em várias superfícies planas, cada uma representada por um vetor $\boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}$ no sentido externo.



Podemos sempre agrupar as pequenas áreas em pares cujas projeções somadas resultam em zero. Ou seja,

$$S_{1z} = a \quad \text{e} \quad S_{2z} = -a$$

Somado todo o conjunto desses pares obtém-se

$$S_z = \Sigma_i S_{iz} = 0.$$

Com esse mesmo argumento, vemos que o mesmo resultado vale para as outras duas componentes (x e y).

Portanto, o vetor que representa uma superfície fechada é zero.