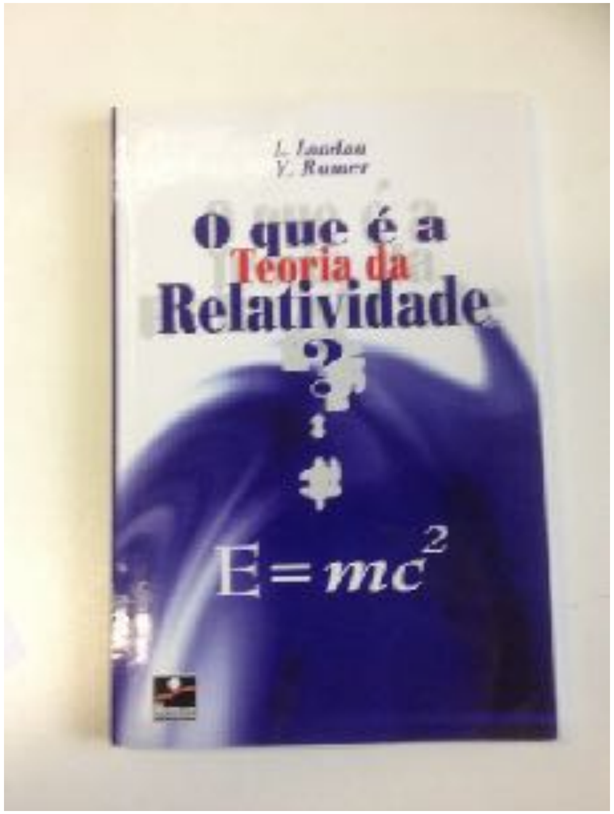
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ
DFNAE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA NUCLEAR E ALTAS ENERGIAS

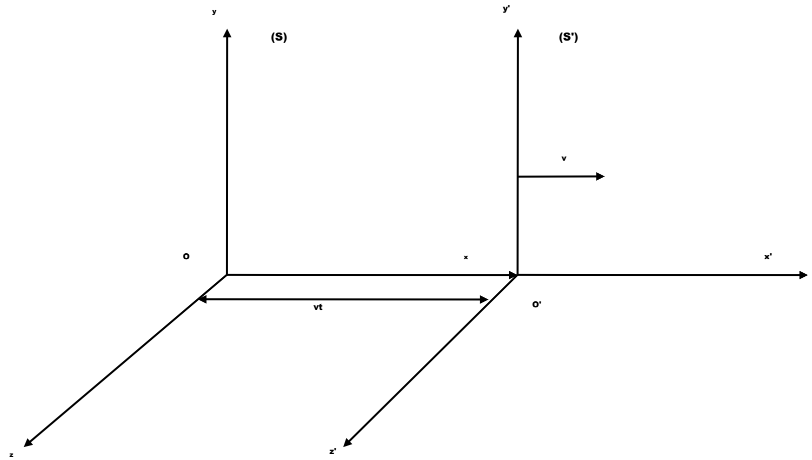
Relatividade Restrita

Leitura Sugerida



...na Mecânica Clássica
(Transformações de Galileu)

- As leis básicas da Mecânica assumem sua forma mais simples nos referenciais inerciais.
- Se o referencial (S') se move em relação a (S) com velocidade constante V e as origens O e O' dos dois referenciais coincidem no instante t = t' = 0, a relação entre as coordenadas (x,y,z,t) e (x',y',z',t') são dadas por:



$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

...na Mecânica Clássica
(Transformações de Galileu)

- Dais quais decorre a lei de composição de velocidades:

$$v' = v - V$$

onde v e v' são velocidades relativas a (S) e (S'), respectivamente.

- Decorre também a igualdade das acelerações:

$$\frac{dv}{dt} = a = a' = \frac{dv'}{dt'}$$

- Como a transformação de Galileu não afeta as distâncias entre partículas nem a massa, também não afeta uma força F que só dependa dessas distâncias (como a gravitação), de modo que

$$F = ma \Rightarrow F' = m'a' \quad \text{onde} \quad (m' = m)$$

e a lei básica da dinâmica não se altera.

...na Mecânica Clássica

- Principio de Relatividade da Mecânica (Galileu): É impossível detectar um movimento retilíneo uniforme de um referencial em relação a outro qualquer por qualquer efeito sobre as leis da dinâmica. (experiências feitas sob o convés de um navio, com as escotilhas fechadas, que seriam incapazes de distinguir se o navio estaria ancorado ou em MRU).

- Esse principio deixa de valer para referenciais não inerciais: aparecem efeitos detectáveis sobre as leis da mecânica através das forças de inércia.

...na Mecânica Clássica

- Se procurarmos estender esse conceito à Eletrodinâmica, deparamo-nos imediatamente com um problema: decorre das leis da eletrodinâmica que a luz se propaga, no vácuo, com velocidade c. Admitindo que isso vale num dado referencial inercial, e que valem as leis da Mecânica Clássica, o resultado não poderia valer num outro referencial inercial em MRU em relação ao primeiro com velocidade V, pela lei de composição de velocidades de Galileu, seria:

$$c' = c - V$$

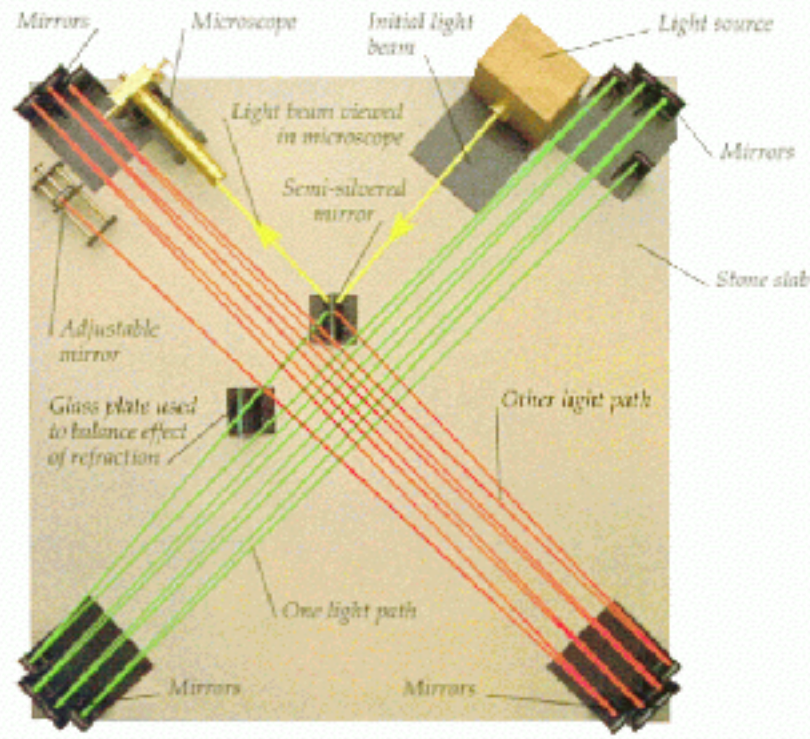
e $c' \neq c$ (e c' variaria com a direção de propagação), contradizendo o principio de relatividade no caso da Eletrodinâmica.

A validade das equações de Maxwell estaria restrita então a um referencial inercial privilegiado, onde a velocidade da luz é c em todas as direções.

...o experimento de Michelson e Morley

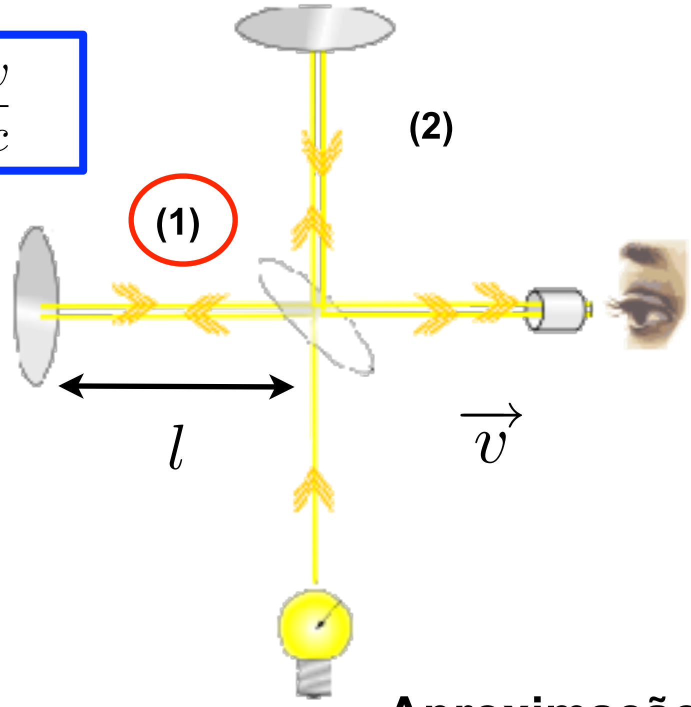
- Deveria ser possível detectar um MRU em relação ao éter usando a lei de Galileu de composição de velocidades, a velocidade da luz num referencial em movimento relativo ao éter deveria ser diferente em direções diferentes.

- Numa série de experiências realizadas entre 1881 e 1887, Michelson e Morley procuraram detectar esses desvios (muito pequenos) usando o interferômetro de Michelson.



...o experimento de Michelson e Morley

$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$



$$v_{orbital} = 3,0 \times 10^4\ m/s$$

$$\frac{v_{orbital}}{c} = \frac{3,0 \times 10^4\ m/s}{3,0 \times 10^8\ m/s} \cong 10^{-4}$$

$$v_{proa} = c + v_{orbital}$$

$$v_{popa} = c - v_{orbital}$$

Aproximação

$$(1+x)^m \approx (1+mx)$$

$$x << 1$$

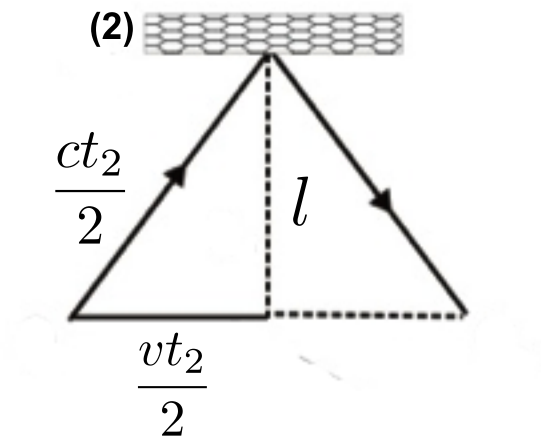
(1) $$t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{l(c-v+c+v)}{(c^2-v^2)} = \frac{2lc}{(c^2-v^2)}$$

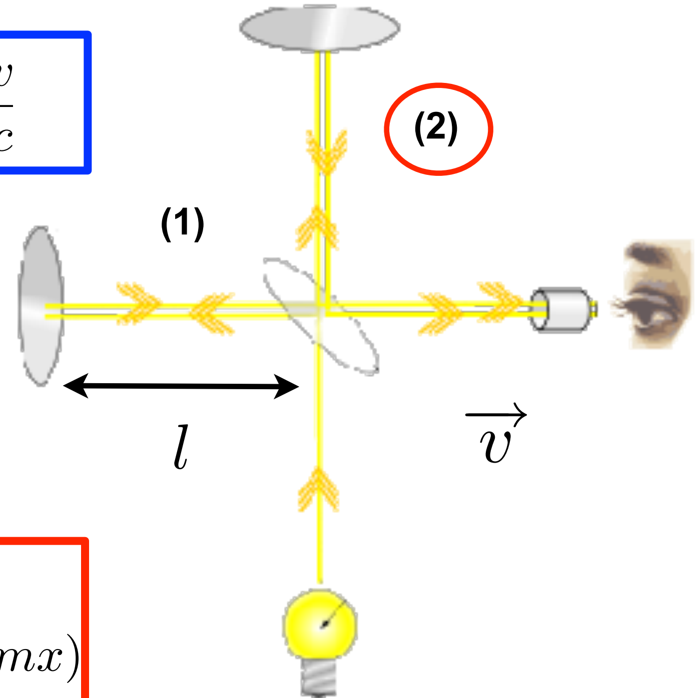
$$t_1 = \frac{2l}{c}\frac{1}{(1-v^2/c^2)} = \frac{2l}{c}\frac{1}{(1-\beta^2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 \approx \frac{2l}{c}(1+\beta^2)}$$

Diagrama: http://universocuantico.files.wordpress.com/2009/06/interferometre_michelson.png

...o experimento de Michelson e Morley

$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$





$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2 + l^2$$

$$\frac{t_2^2}{4}(c^2 + v^2) = l^2$$

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{(c^2+v^2)}} = \boxed{\frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Aproximação

$$(1+x)^m \approx (1+mx)$$

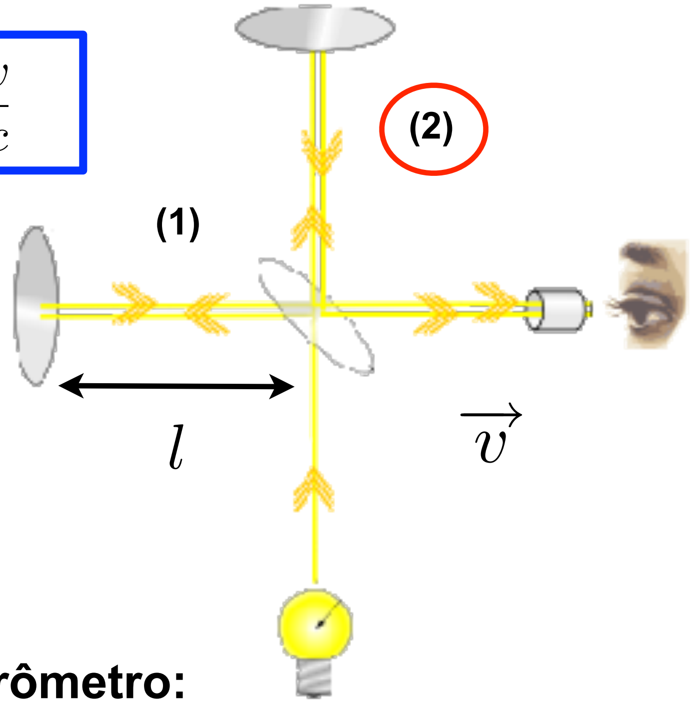
$$x << 1$$

$$\boxed{t_2 \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)}$$

Diagrama: http://universocuantico.files.wordpress.com/2009/06/interferometre_michelson.png

...o experimento de Michelson e Morley

$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$



$$t_1 \approx \frac{2l}{c}(1+\beta^2)$$

$$t_2 \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Diferença de tempo entre os braços do interferômetro:

$$\Delta T = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\beta^2$$

$$\bar{T}c = \lambda \Longleftrightarrow \frac{\Delta T}{\bar{T}} = \frac{l\beta^2}{\lambda}$$

Usando os seguintes valores:

$$l = 11\text{m}$$

Inter. Destrutiva !!

$$\lambda = 600\text{nm}$$

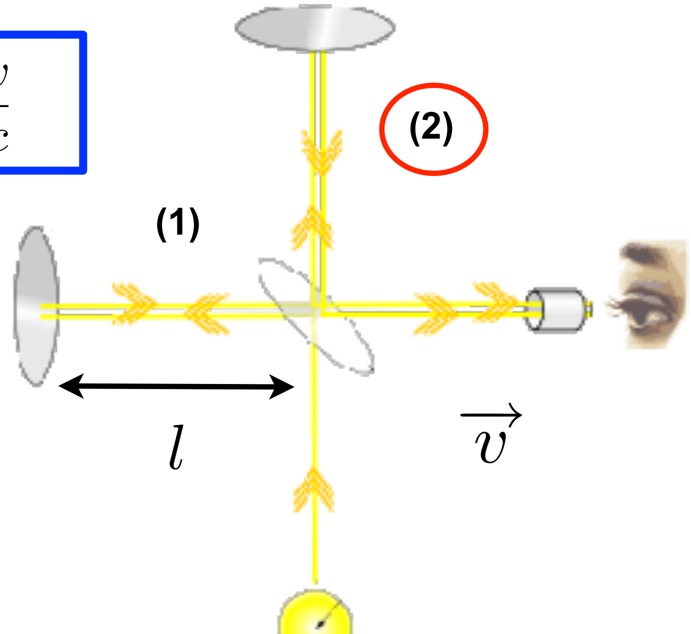
$$\frac{\Delta T}{\bar{T}} = 0$$

Experimental
Inter. construtiva

Diagrama: http://universocuantico.files.wordpress.com/2009/06/interferometre_michelson.png

...o experimento de Michelson e Morley

$$\beta = \frac{v_{orbital}}{c} = \frac{v}{c}$$



$$t_1 \approx \frac{2l}{c}(1+\beta^2)$$

$$t_2 \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Diferença de tempo entre os braços do interfe

$$\Delta T = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\beta^2$$

$$\bar{T}c = \lambda \Longleftrightarrow \frac{\Delta T}{\bar{T}} = \frac{l\beta^2}{\lambda}$$

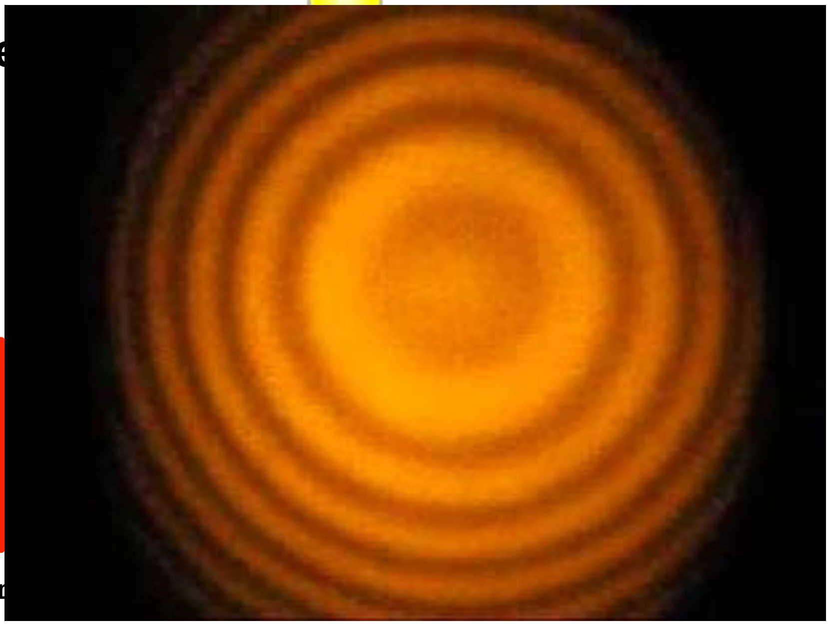


Diagrama: http://universocuantico.files.wordpress.com/2009/06/i

...o experimento de Michelson e Morley

- A experiência foi repetida muitas vezes, com diferentes orientações da montagem. Chegando-se a conclusão que a velocidade da luz é constante e que a hipótese de um éter estacionário estava incorreta.

- Assim o principio da relatividade aplica-se a todas as leis físicas, e as equações de Maxwell são corretas e nesse caso a mecânica newtoniana e as transformações de Galileu não podem estar corretas.

...Postulados:

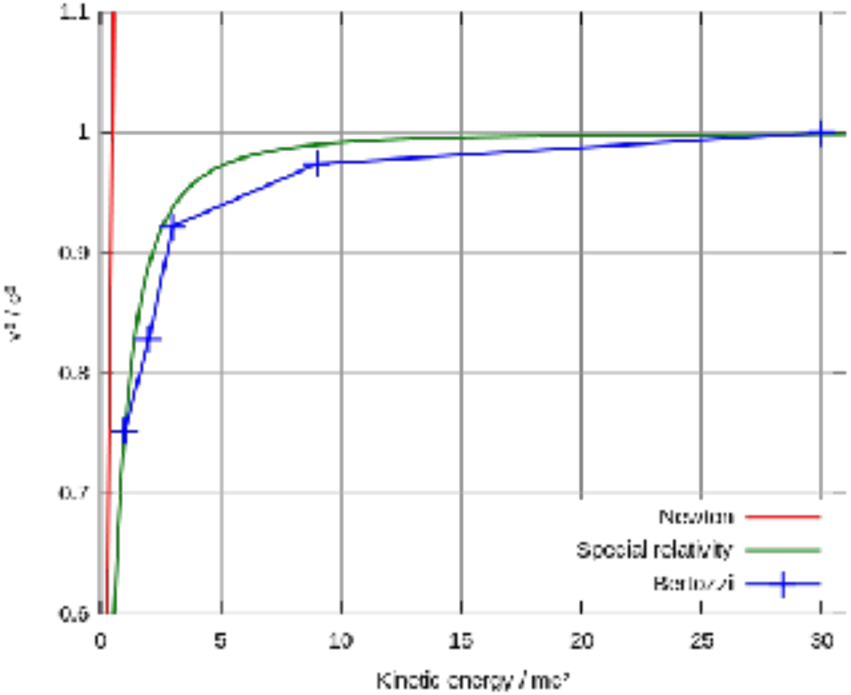
(1) As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

(2) A velocidade da luz no vácuo, c, é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte.

Esses dois princípios, porém, são incompatíveis com a mecânica newtoniana tornando necessário modificá-la. As modificações necessárias, tomando (1) e (2) como pontos de partida, foram propostas por Albert Einstein em 1905.

Velocidade Limite

https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_relativistic_energy_and_momentum

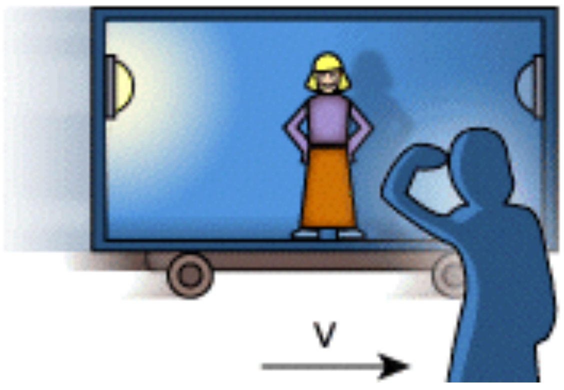


Data of the Bertozzi experiment show close agreement with special relativity. Kinetic energy of five electron runs: 0.5, 1, 1.5, 4.5, 15 MeV (or 1, 2, 3, 9, 30 in mc²). Speed: 0.752, 0.828, 0.922, 0.974, 1.0 in c (or 0.867, 0.910, 0.960, 0.987, 1 in c²).

...Simultaneidade

- “Se um evento 1 ocorre em P1 no instante t1, sendo marcado pela emissão de um sinal luminoso que parte de P1 nesse instante, e o mesmo vale para P2 em t2 (evento 2), dizemos que estes dois eventos são simultâneos (t1=t2) quanto o ponto de encontro dos dois sinais luminosos é o ponto médio do segmento P1P2.” (Definição de simultaneidade segundo Einstein)

Essa definição implica imediatamente que a simultaneidade de eventos distantes não tem caráter absoluto: dois eventos simultâneos num particular referencial S podem não ser simultâneos noutro referencial inercial S’ que se move em relação a S com MRU.



...Transformação de Lorentz

- Para encontrar a transformação que substituísse a de Galileu, era conveniente ter uma imagem bastante concreta de um referencial onde se emprega a definição de Einstein de simultaneidade.
- A transformação (x,y,z,t) → (x',y',z',t') tinha de satisfazer as seguintes condições:

  (i) Um MRU em relação a (S) também deve ser MRU em (S').

  (ii) Para V= 0 (V é a velocidade de S' em relação a S), a transformação deve reduzir-se a identidade.

  (iii) Se um sinal luminoso é enviado de O=O' em t= t' =0, a sua frente de onda deve propagar-se com velocidade c em ambos os referenciais de modo que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

E essa é uma transformação necessariamente linear.

...Transformação de Lorentz

$$x' = \gamma\left(x - Vt\right)$$

$$t' = \left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Transformação inversa obtem-se substituindo v → -v, logo (S) se move em relação a (S') com velocidade (-v).

$$x = \gamma\left(x' + Vt'\right)$$

$$t = \left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$y = y'$$

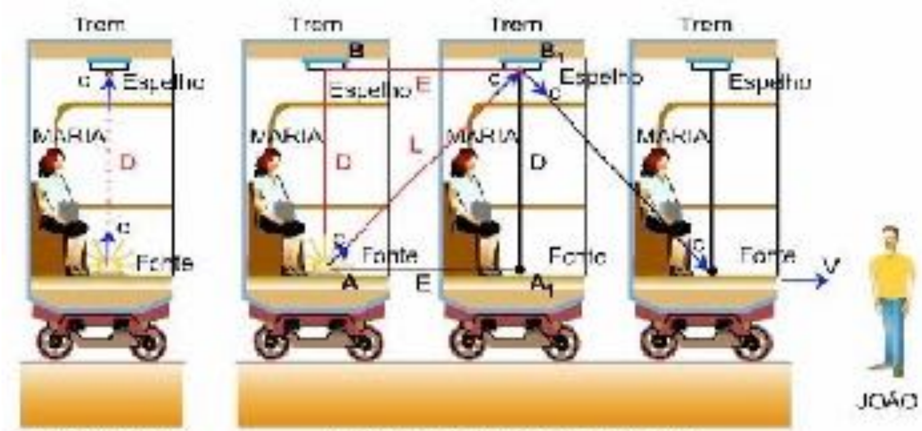
$$z = z'$$

Velocidades baixas: (vale a mecânica clássica)

V →c: dominam os efeitos relativísticos

... Efeitos cinemáticos da TL:

1) Dilatação do tempo:



Trajetória da luz observada por Maria.

Trajetória da luz observada por João.

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$$

Por Pitágoras chega-se que

$$\Delta t^2 = \left(\frac{2D}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \Rightarrow \Delta t = \gamma.\Delta t_0$$

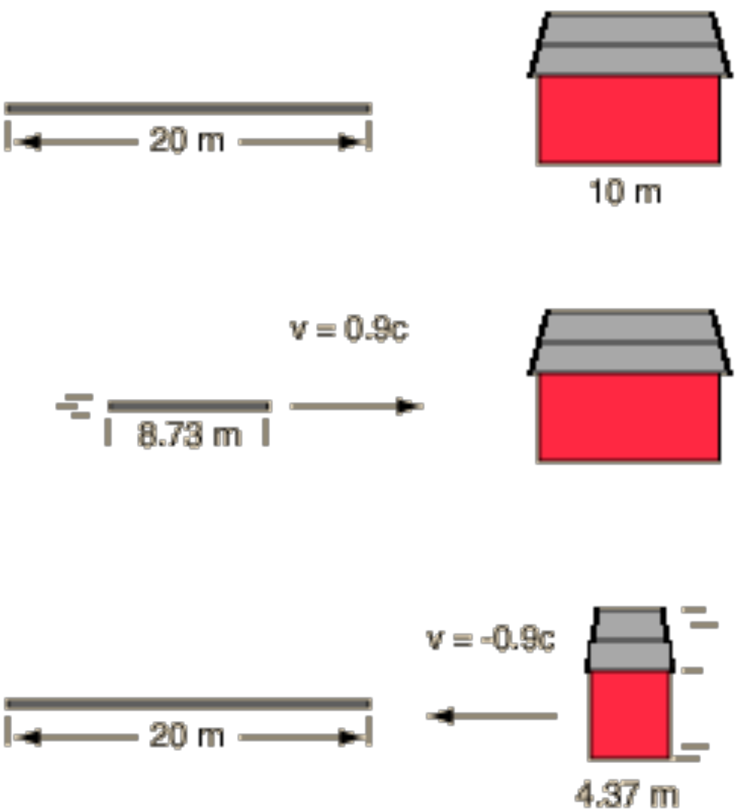
onde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

que é o fator de Lorentz.

O tempo não é mais absoluto depende do referencial!!!

... Efeitos cinemáticos da TL:

2) Contração do Espaço:

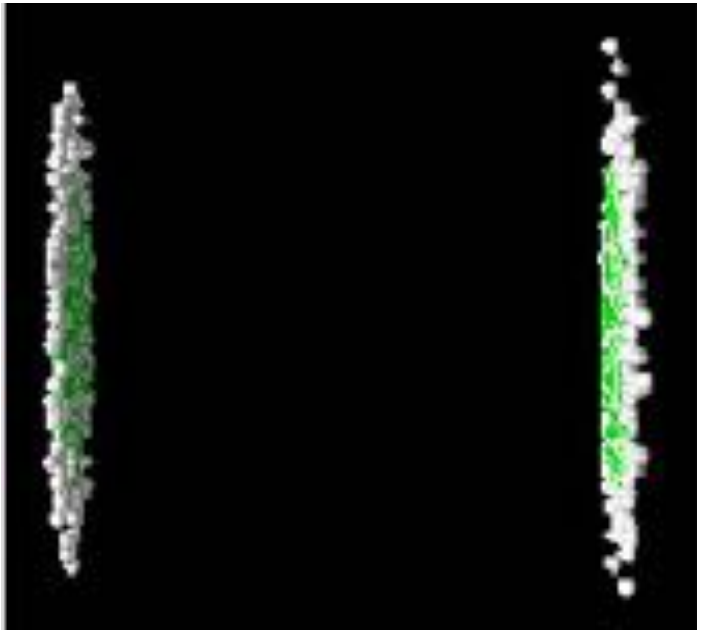


$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

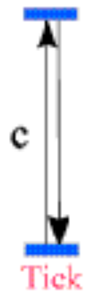
Ocorre com os núcleos colidindo a altas energias:

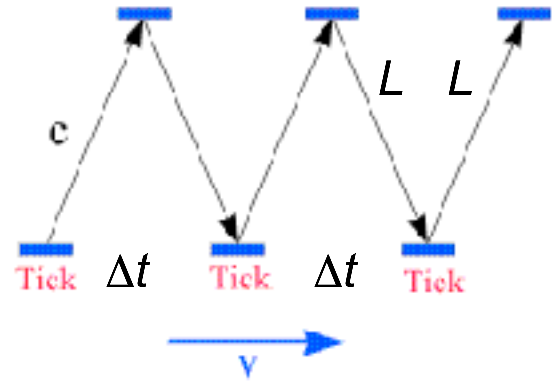


Aplicações

A relatividade do tempo

Δt_0





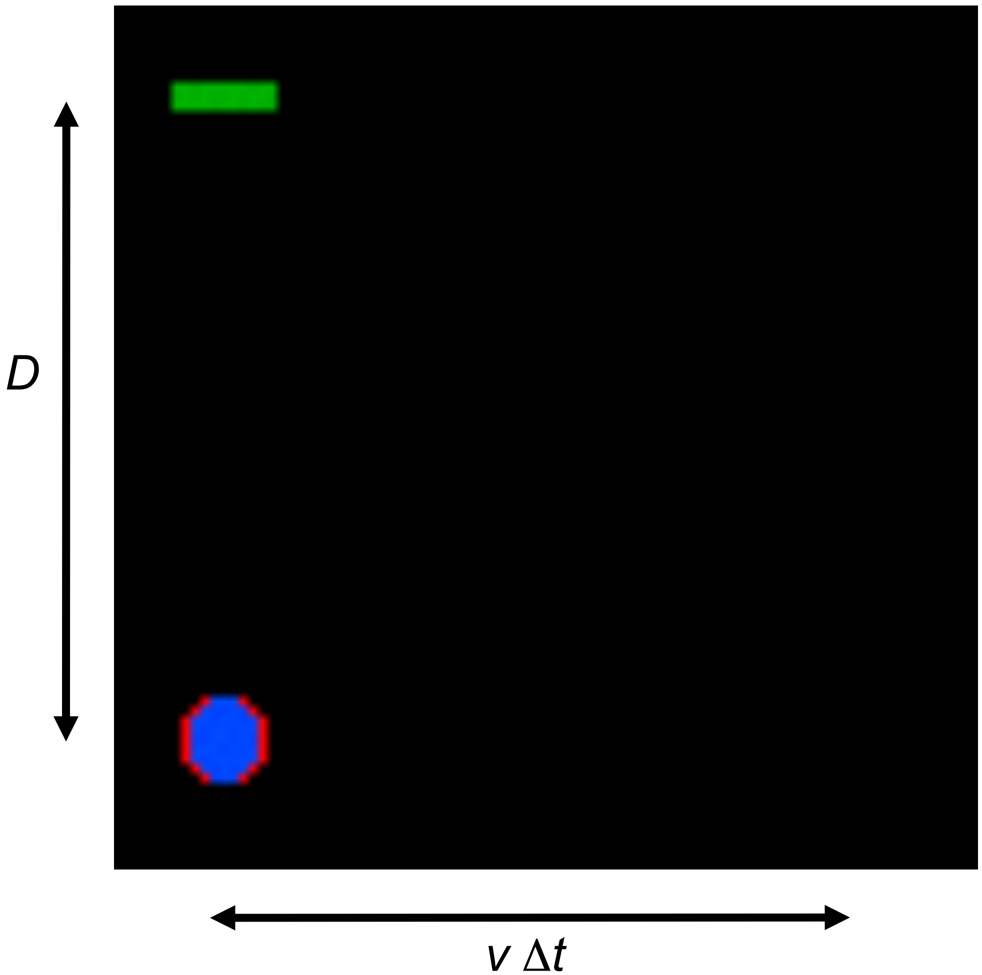
Tempo próprio

↓

Mesmas coordenadas espaciais

Tempo $\longleftrightarrow$ Espaço

A relatividade do tempo



$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$$

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

$$L^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

O fator de Lorentz e o parâmetro de velocidade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Fator de Lorentz

Parâmetro de velocidade (% c)

$$\boxed{\beta < 1 \Rightarrow \gamma > 1}$$

Portanto:

$$\boxed{\Delta t = \gamma\, \Delta t_0}$$

(dilatação temporal)

Exercícios e Problemas

3E. O tempo médio de vida de múons estacionários é de 2,2 μs. O tempo médio de vida dos múons de alta velocidade produzidos pelos raios cósmicos é de 16 μs no referencial da Terra. Determine a velocidade em relação à Terra dos múons produzidos pelos raios cósmicos.

Exercícios e Problemas

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

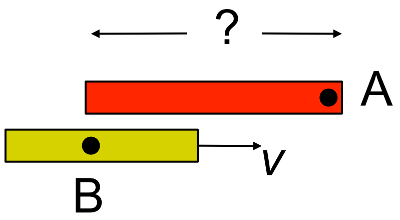
$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}$$

$$v = 2,998\times 10^8\sqrt{1-\left(\frac{2,2}{16}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad v = 2,9695\times 10^8 m/s$$

A relatividade das distâncias

Medidas de comprimento de um corpo:

- Em repouso: coordenadas das extremidades
- Em movimento: simultaneamente (em nosso ref.)



$$L_0 = v\Delta t$$ (observador em repouso A)

$$L = v\Delta t_0$$ (observador em movimento B)

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$$

A contração das distâncias

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma}$$

(contração das distâncias)

Comprimento
próprio

Exercícios e Problemas

12P. (a) Uma pessoa seria capaz, em princípio, de viajar da Terra até o centro da galáxia (que está a cerca de 23000 anos-luz de distância) em um tempo de vida normal? Explique por quê, levando em conta a dilatação dos tempos ou a contração das distâncias. (b) Com que velocidade constante a pessoa teria que viajar para fazer a viagem em 30 anos (tempo próprio)?

Exercícios e Problemas

(b)

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$L_0 = 23000\text{anos} - \text{luz} = 23000c$$

$$\Delta t_0 = 30\text{anos}$$

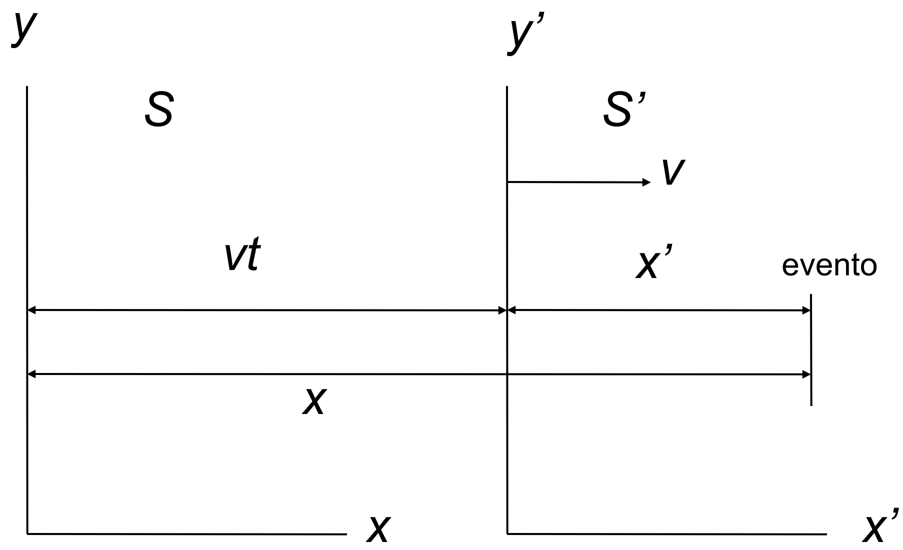
$$v = \frac{L_0}{\Delta t} \Rightarrow \ \Delta t = \frac{L_0}{v}$$

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \Rightarrow \ \frac{L_0}{v} = \gamma\,\Delta t_0 \Rightarrow \ \gamma v = \frac{L_0}{\Delta t_0}$$

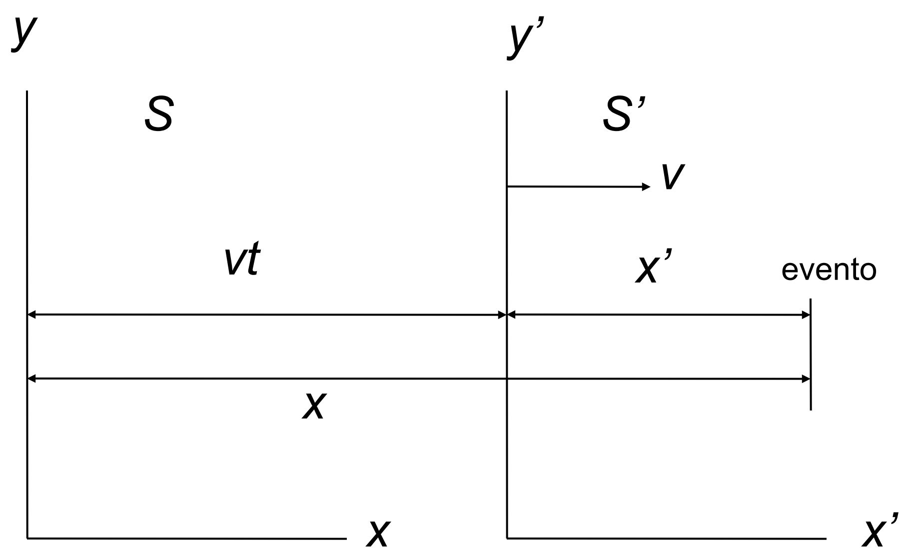
$$\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L_0}{\Delta t_0} \Rightarrow \ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L_0/c}{\Delta t_0}$$

$$\boxed{\beta \approx 0,9999991494}$$

A transformação de Lorentz



As equações de transformação de Galileu

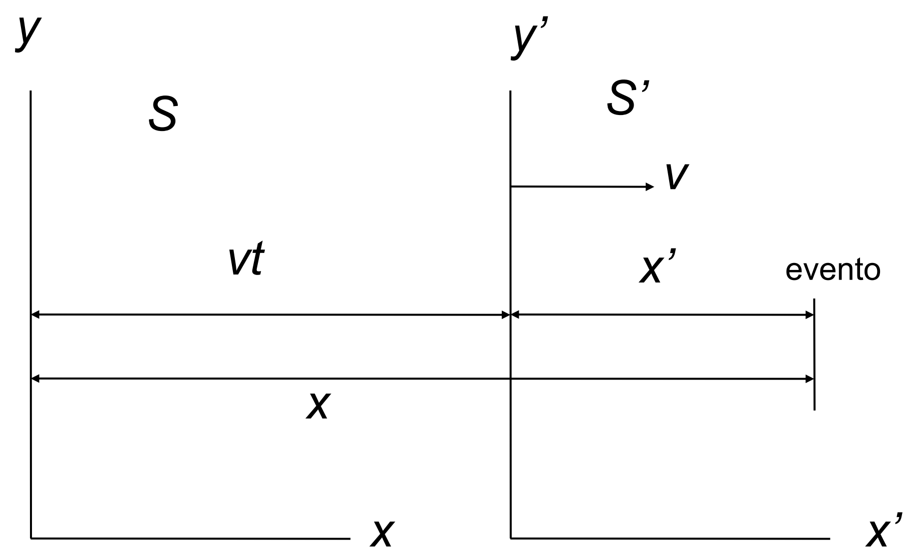


$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

Válidas para baixas velocidades

As equações de transformação de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases}$$



Válidas para qualquer velocidade fisicamente possível

Para pares de eventos

$$\begin{cases} \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \end{cases}$$

O referencial *S'* esta se movendo com velocidade *v* em relação ao referencial *S*.

Verificação

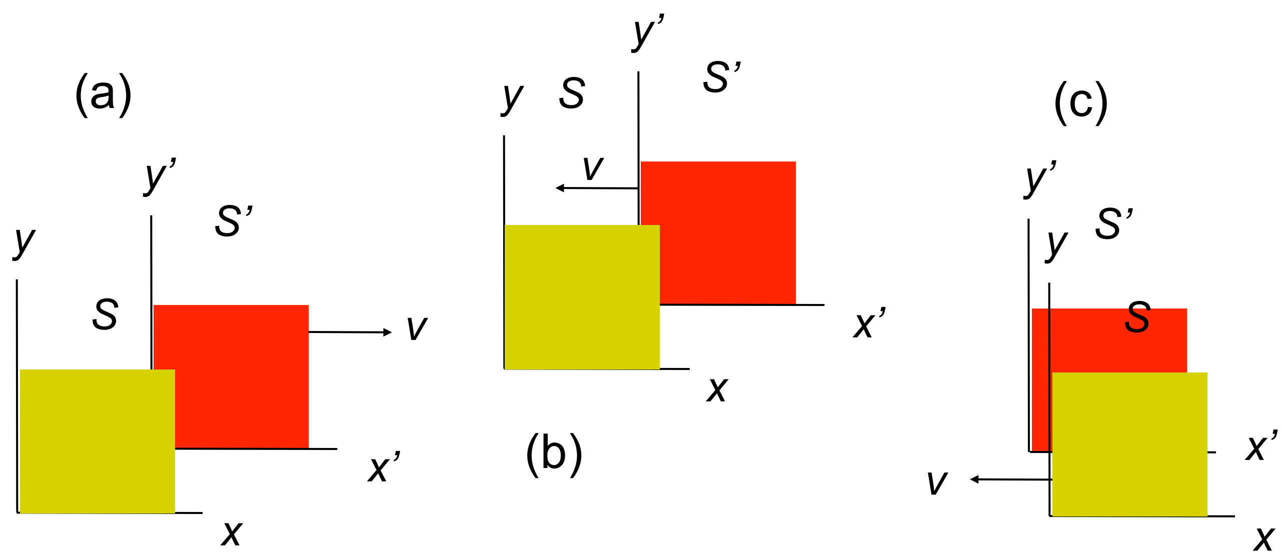
As figuras abaixo mostram três situações nas quais um referencial *x'y'* e um referencial *xy* estão em movimento relativo ao longo da direção comum dos eixos *x* e *x'*, como indica o vetor velocidade associado a um dos referenciais. Em cada situação, se tomarmos o referencial *x'y'* como estacionário, o parâmetro *v* das equações anteriores será um número positivo ou negativo?

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$



Verificação

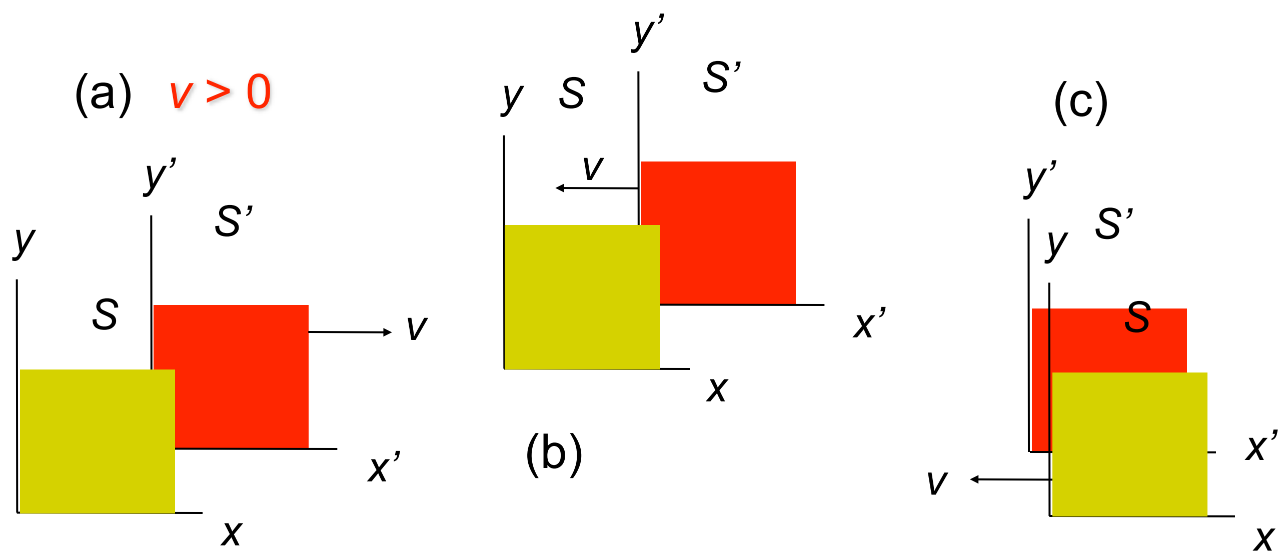
As figuras abaixo mostram três situações nas quais um referencial *x'y'* e um referencial *xy* estão em movimento relativo ao longo da direção comum dos eixos *x* e *x'*, como indica o vetor velocidade associado a um dos referenciais. Em cada situação, se tomarmos o referencial *x'y'* como estacionário, o parâmetro *v* das equações anteriores será um número positivo ou negativo?

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$



Verificação

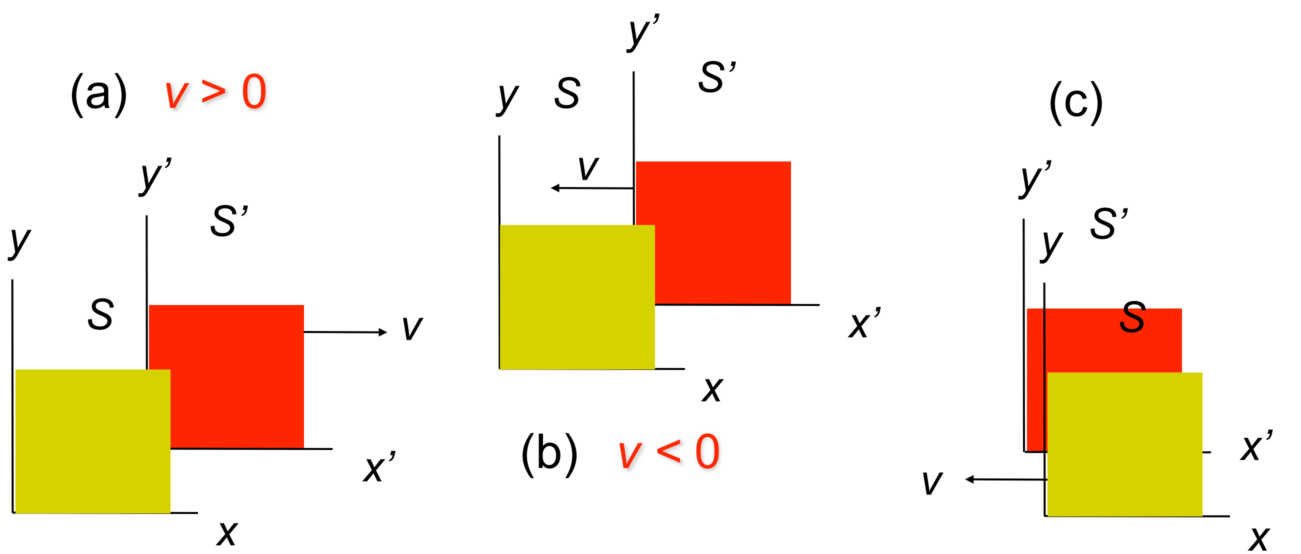
As figuras abaixo mostram três situações nas quais um referencial *x'y'* e um referencial *xy* estão em movimento relativo ao longo da direção comum dos eixos *x* e *x'*, como indica o vetor velocidade associado a um dos referenciais. Em cada situação, se tomarmos o referencial *x'y'* como estacionário, o parâmetro *v* das equações anteriores será um número positivo ou negativo?

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$



Verificação

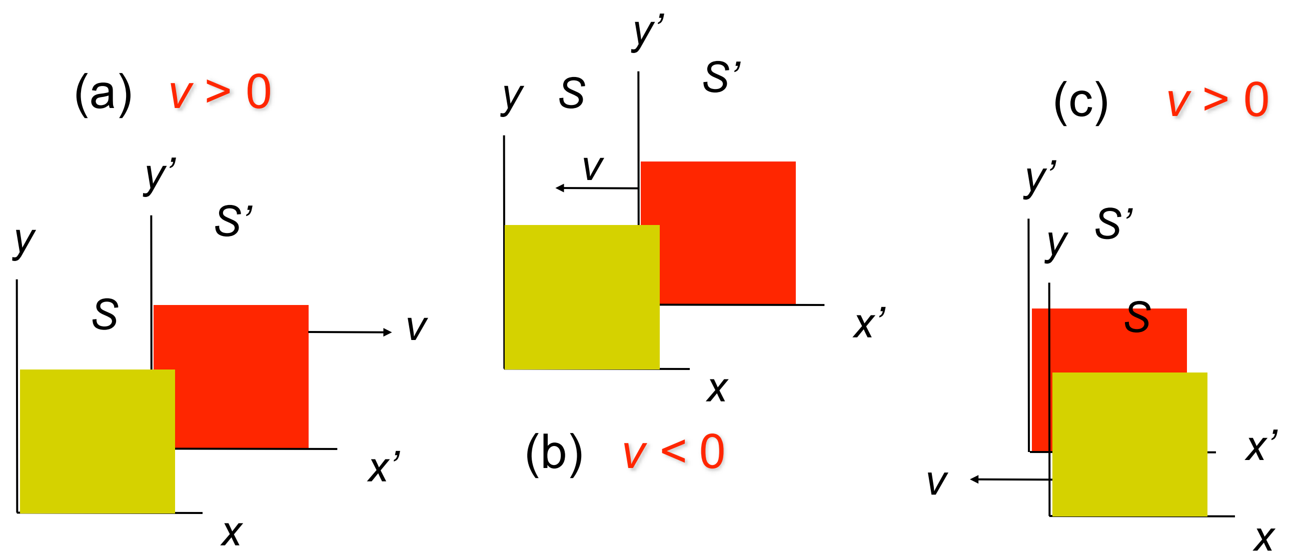
As figuras abaixo mostram três situações nas quais um referencial *x'y'* e um referencial *xy* estão em movimento relativo ao longo da direção comum dos eixos *x* e *x'*, como indica o vetor velocidade associado a um dos referenciais. Em cada situação, se tomarmos o referencial *x'y'* como estacionário, o parâmetro *v* das equações anteriores será um número positivo ou negativo?

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$



Algumas conseqüências

<u>Simultaneidade</u>

Dois eventos simultâneos em locais diferentes em *S'*:

$$\Delta t' = 0 \quad ; \quad \Delta x' \neq 0$$

Já em *S*:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma\frac{v\Delta x'}{c^2}}$$

Algumas conseqüências

Dilatação dos tempos

Dois eventos no mesmo local e em ocasiões diferentes em *S'*:

$$\Delta x' = 0 \quad ; \quad \Delta t' \neq 0$$

Já em *S*:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

Algumas conseqüências

<u>Contração das distâncias</u>

Régua em repouso em *S'*, com comprimento $\Delta x'$.

Medidas simultâneas em *S,* i. e., Δx é o comprimento da régua:

$$\Delta t = 0$$

Como:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}}$$

Exercícios e Problemas

38.13P. Um astronauta parte da Terra e viaja com uma velocidade de 0,99c em direção a estrela Vega, que está a 26 anos-luz de distância. Quanto tempo terá passado, de acordo com os relógios da Terra, (a) quando o astronauta chegar a Vega e (b) quando os observadores terrestres receberem a notícia de que o astronauta chegou a Vega? (c) Qual é a diferença entre o tempo de viagem de acordo com os relógios da Terra e o tempo de viagem de acordo com o relógio de bordo?

Exercícios e Problemas

(a) No mesmo referencial inercial:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{26\text{anos}\,\cancel{c}}{0,99\cancel{c}} \approx \boxed{26,26\text{anos}}$$

(b) Supondo que seja enviado um sinal de rádio, este viaja a c de volta:

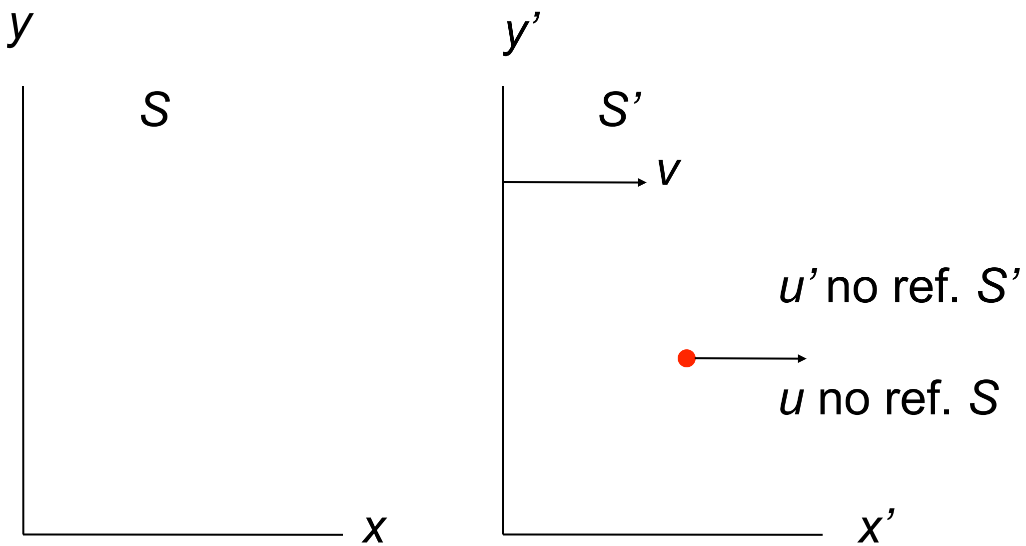
$$\Delta t_s = 26,26\text{anos} + 26\text{anos} = 52,26\text{anos}$$

(c) Temos que calcular o tempo próprio:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \Delta t\sqrt{1-(v/c)^2}$$

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-(0,99)^2} \approx 0,1411\Delta t \boxed{\approx 3,7\text{anos}}$$

A relatividade das velocidades



Partícula emite 2 sinais separados no tempo. Observador mede dist. e tempo, relacionados por:

$$\begin{cases} \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) \end{cases}$$

A relatividade das velocidades

Dividindo:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}$$

Ou:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}$$

Fazendo:

$$\Delta t; \Delta x; \Delta t'; \Delta x' \to 0$$

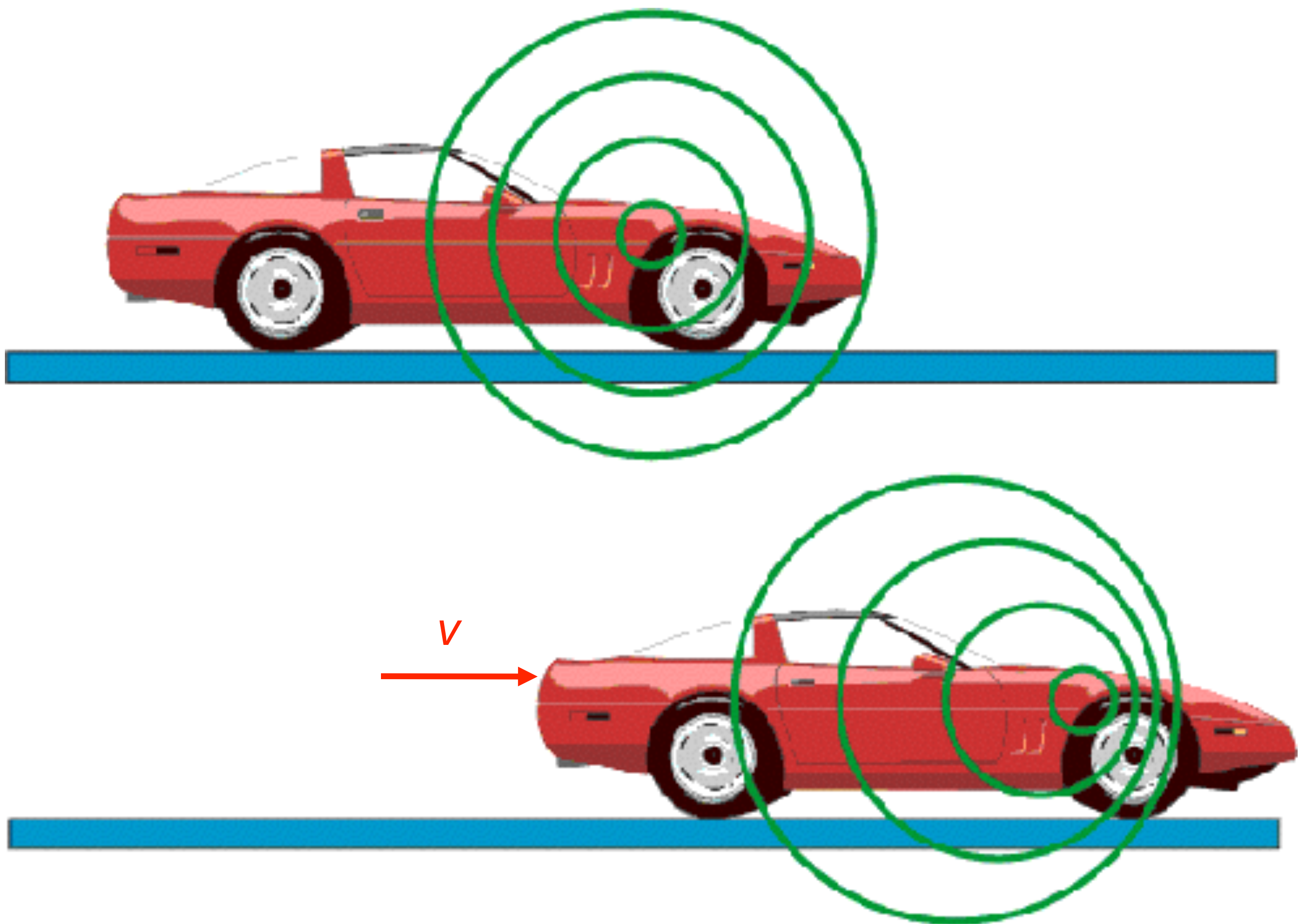
Temos:

$$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}}$$

(transformação relativística das velocidades)

O efeito Doppler

Para o som:



O efeito Doppler para a luz

lembrem-se do 2o. Postulado:

“A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todas das direções e em todos os referenciais inerciais.”

Apenas a freqüência muda. Importante é apenas veloc. entre fonte e detector

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

(fonte e detector se afastando)

Freqüência própria

$$f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

(fonte e detector se aproximando)

Exercícios e Problemas

31P. Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de 0,20c. Uma fonte luminosa na popa da nave parece azul (λ=450 nm) para os passageiros. Que cor teria a fonte para um observador terrestre que estivesse assistindo à partida da nave?

Exercícios e Problemas

31P. Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de 0,20c. Uma fonte luminosa na popa da nave parece azul (λ=450 nm) para os passageiros. Que cor teria a fonte para um observador terrestre que estivesse assistindo à partida da nave?

Comp. de onda próprio

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \frac{\cancel{c}}{\lambda} = \frac{\cancel{c}}{\lambda_0}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

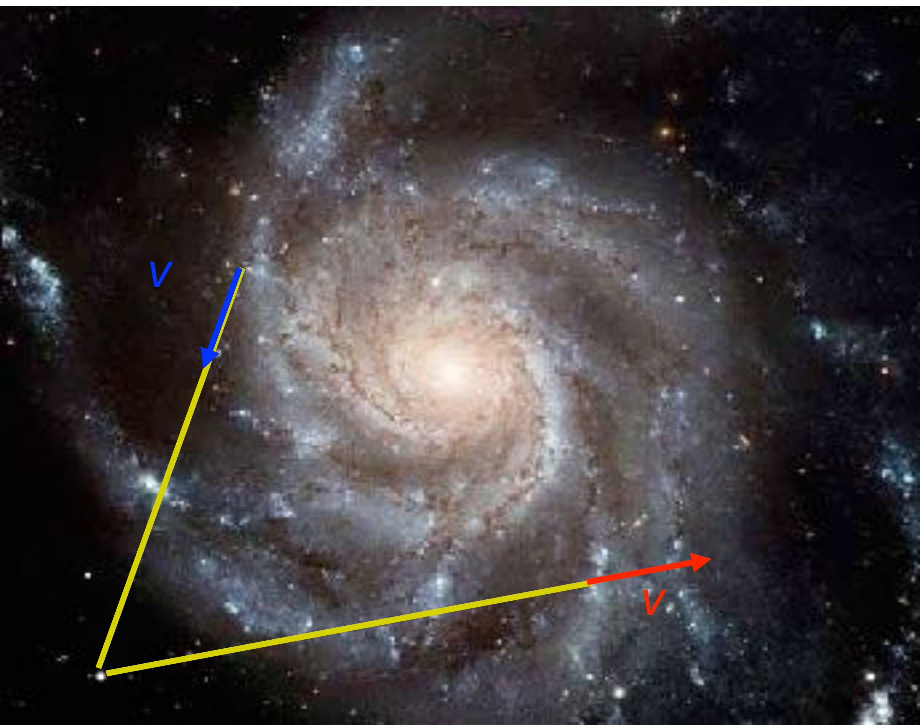
(fonte e detector se afastando)

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 450\sqrt{\frac{1+0,2}{1-0,2}} \approx \boxed{551\ \mathrm{nm}}$$

Amarelo-esverdeado

O efeito Doppler para a luz

Na astronomia, velocidade radial pequena:



$$f = f_0(1 \pm \beta)$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

Comp. de onda próprio

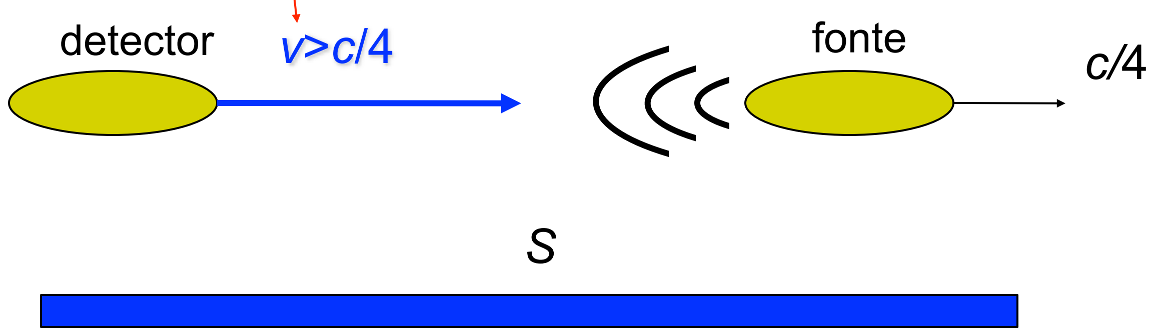
Ou:

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c$$

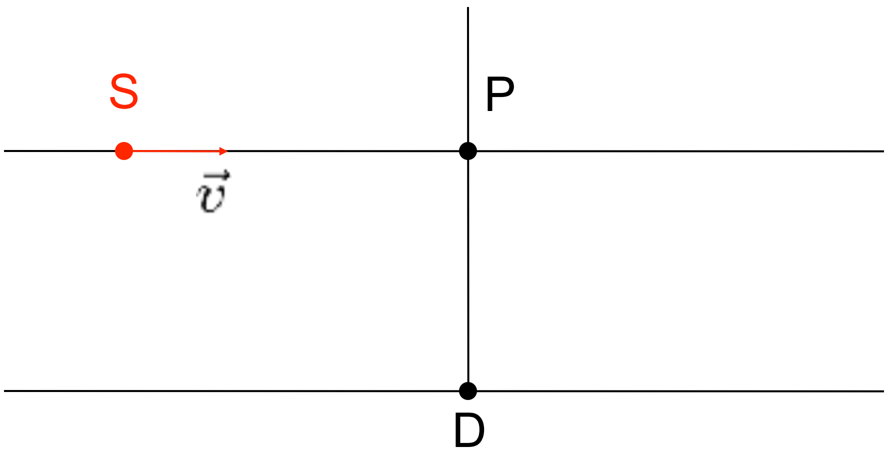
Deslocamento Doppler

Verificação

A figura mostra uma fonte que emite luz de freqüência própria f_0 enquanto se move para a direita com velocidade $c/4$ em relação ao referencial S. A figura também mostra um detector de luz, que mede uma freqüência $f > f_0$ para a luz detectada. (a) O detector esta se movendo para a esquerda ou para a direita? (b) A velocidade do detector em relação ao referencial S é maior que $c/4$, menor que $c/4$ ou igual a $c/4$?



Efeito Doppler transversal



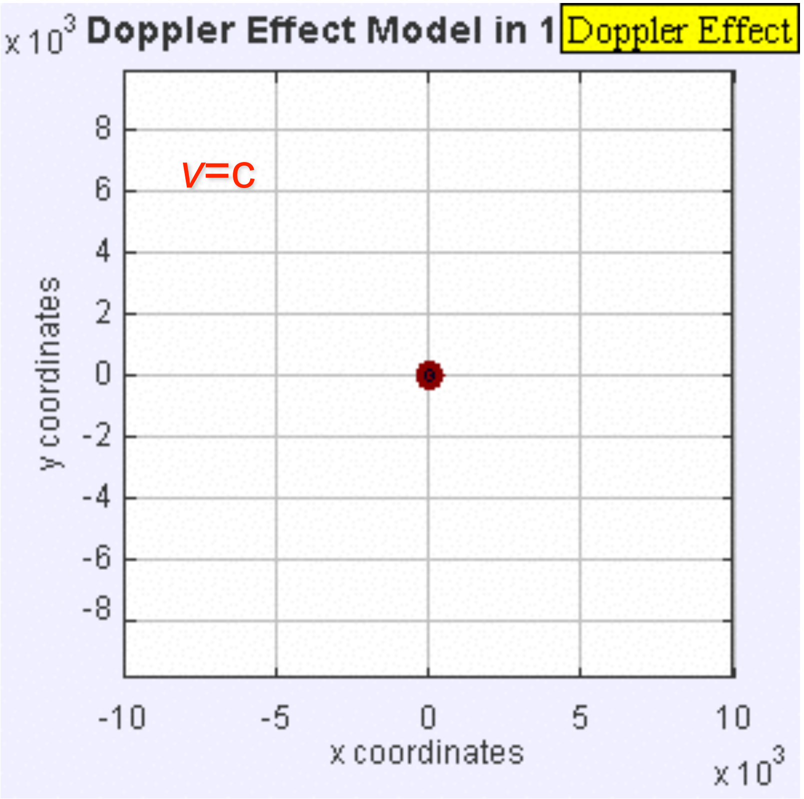
Dilatação dos tempos:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

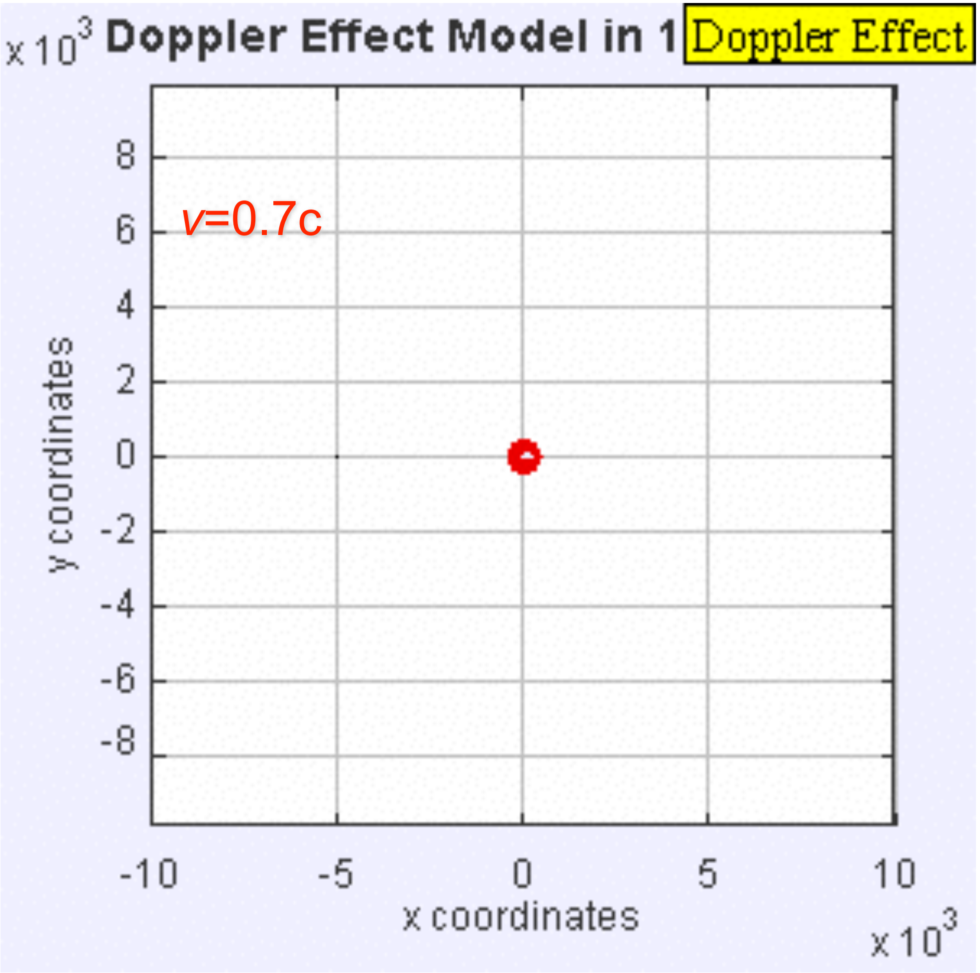
Como $T=1/f$:

$$\Rightarrow \quad \boxed{f = f_0\sqrt{1-\beta^2}}$$ (efeito Doppler transversal)

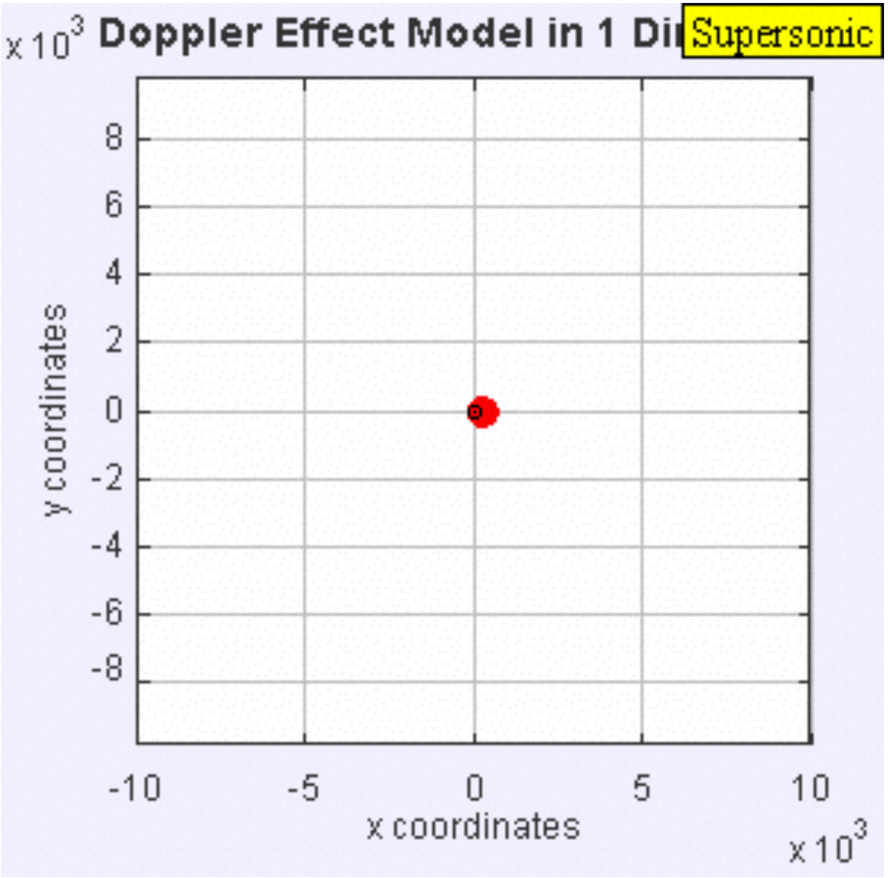
Exemplos de Efeito Doppler ($f = f_0$)



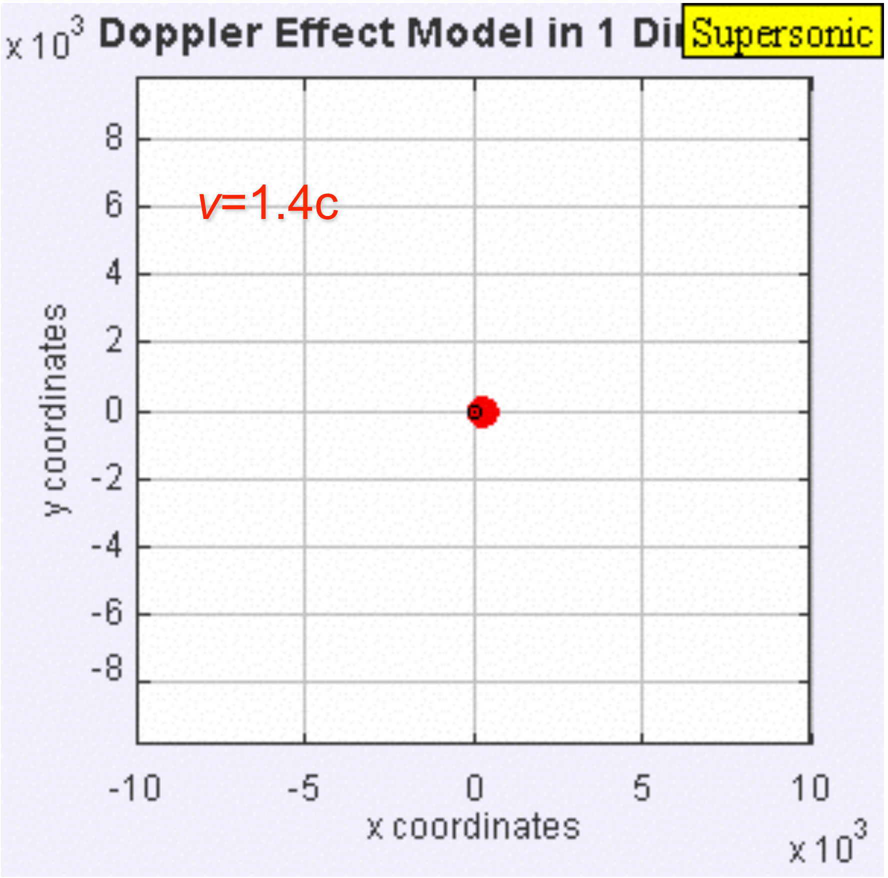
Exemplos de Efeito Doppler ($f = 0.59 f_0$)



Exemplos de Efeito Doppler ($f = 0.42f_0$)



Exemplos de Efeito Doppler ($f = 0.42f_0$)



Exemplos de Efeito Doppler (*v* > 300 m/s)

Uma nova interpretação do momento

Uma nova interpretação do momento

$$p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t}$$ (momento clássico)

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}$$ (nova definição)

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma$$

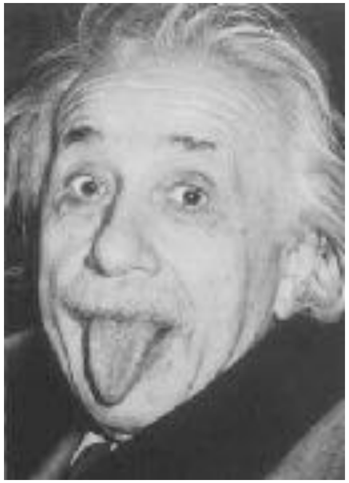
$$\boxed{\vec{p} = \gamma m\vec{v}}$$ (momento relativístico)

Uma nova interpretação da energia

Massa como forma de energia

$$\boxed{E_0} = mc^2$$

<u>Energia de repouso</u>



Corpo	Massa(Kg)	Energia equivalente	
Eletron	$9,11 \times 10^{-31}$	$8,19 \times 10^{-14}$J	(= 511 keV)
Proton	$1,67 \times 10^{-27}$	$1,50 \times 10^{-10}$J	(= 938 MeV)
Atomo de uranio	$3,95 \times 10^{-25}$	$3,55 \times 10^{-8}$J	(= 225 GeV)
Particula de poeira	1×10^{-13}	1×10^{4}J	(= 2 kcal)
Moeda pequena	$3,1 \times 10^{-3}$	$2,8 \times 10^{14}$J	(= 78 GW · h)

Unidades práticas

Unidade de massa atômica:

$$1\,\mathrm{u} = 1,66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Elétron-volt:

$$1\,\mathrm{eV} = 1,60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

c^2:

$$c^2 = 9,315 \times 10^8\,\mathrm{eV/u} = 9,315 \times 10^5\,\mathrm{keV/u} = 931,5\,\mathrm{MeV/u}$$

Energia total (supondo E_{pot}=0)

$$E = E_0 + K = mc^2 + K$$

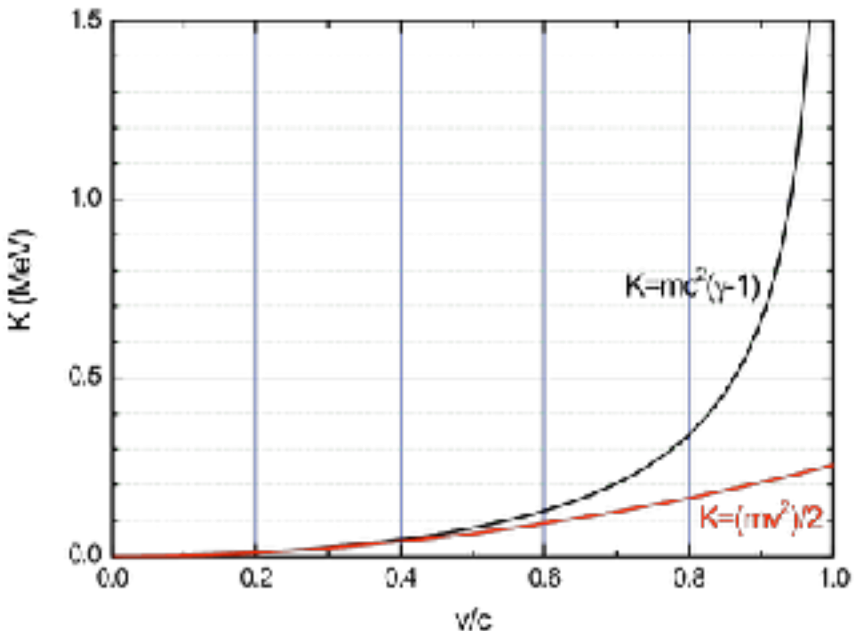
$$\boxed{E = \gamma mc^2}$$

"A energia total *E* de um *sistema isolado* não pode mudar."

$$\boxed{Q = -\Delta M\, c^2}$$

Energia cinética

$$K = E - mc^2 = \boxed{mc^2(\gamma - 1)}$$

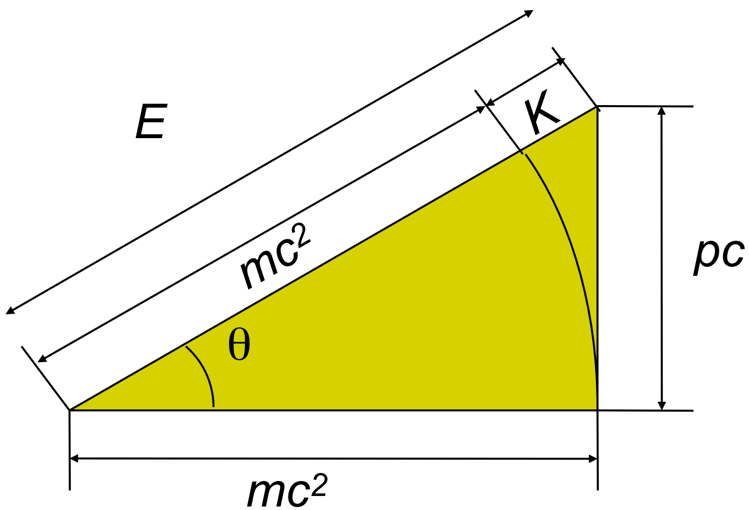


Momento e energia cinética

$$\left.\begin{array}{l} K = mc^2(\gamma - 1) \\ p = \gamma m v \end{array}\right\} \Rightarrow \ (pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$$

Ou:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$



sen θ = β

cos θ = 1/γ

Verificação

(a) A energia cinética de um elétron de 1 GeV é maior, menor ou igual a de um próton de 1 GeV?   (b) Repita o item (a) para a energia total.

(a) igual, pois o termo “de … GeV” significa de energia cinética.

(b) Energias de repouso
Elétron: 511 keV ,   Próton: 938 MeV
Como a energia total é:

$$E = E_0 + K = mc^2 + K$$

$$\boxed{E_{eletron} < E_{proton}}$$

Exercícios e Problemas

38.44P. O tempo de vida médio dos múons em repouso é de 2,20 μs. As medidas dos múons produzidos em um acelerador de partículas mostram que eles têm um tempo de vida de 6,90 μs. Determine (a) a velocidade, (b) a energia cinética e (c) o momento destes múons no referencial do laboratório. A massa de um múon é de 207 vezes maior que a do elétron.

Sabemos:

$$\Delta t_0 = 2,20\,\mu s$$
$$\Delta t = 6,90\,\mu s$$
$$m_\mu = 207\,m_e$$

(a)

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}$$

$$v = 2,998\times 10^8\sqrt{1-\left(\frac{2,2}{6,90}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 2,8415\times 10^8 m/s}$$

(b)

$$K = mc^2(\gamma - 1)$$

$$m_\mu = 207\, m_e = 0,1136\,\text{u}$$

$$c^2 = 9,315\times 10^8\,\text{eV/u}$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 3,1364$$

$$K = mc^2(\gamma - 1) = 0,1136.9,315\times 10^8(3,1364-1) \approx \boxed{226\text{MeV}}$$

(c) $$p = \gamma m v$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 3,1364$$

$$m_\mu = 207\, m_e = 0,1136\,\mathrm{u} = 1,89 \times 10^{-28} kg$$

$$v = 2,8415 \times 10^8 m/s$$

$$\Rightarrow \quad p = 3,1364.\, 1,89 \times 10^{-28} .\, 2,8415 \times 10^8 = \boxed{1,68 \times 10^{-19} kg\, m/s}$$

$$p = (1,68 \times 10^{-19} / 1,60 \times 10^{-19})\, .2,998 \times 10^8 \approx \boxed{314\mathrm{MeV}/c}$$

Ou então:

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}}{c}$$

$$\boxed{p \approx 314\mathrm{MeV}/c}$$

...Composição de Velocidades:

- A velocidade instantânea v’(t’) da partícula m (S’) tem as componentes:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'} \qquad v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

- A velocidade v(t) da partícula em relação a (S) tem componentes:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

onde x(t), y(t), z(t) estão relacionados com x’(t’), y’(t’),z’(t’) pela TL.

$$\begin{cases} dx' = \gamma\left(dx - V dt\right) \\ dt' = \gamma\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

O que implica em:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{\left(1 - \dfrac{v_x . v}{c^2}\right)} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v_x . v}{c^2}\right)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{v_x . v}{c^2}\right)}$$

A lei relativística de composição de velocidade, se , $v <<<< c$ ela se reduz à lei de Galileu.

...Dinâmica Relativística

- Após substituir a cinemática newtoniana era preciso reformular a dinâmica newtoniana para que fosse compatível com a nova cinemática.

- Na mecânica newtoniana, admitem-se forças de interação entre partículas que ficam inteiramente determinadas pelas suas posições instantâneas, tais como a gravitação, dada pela lei de Newton da gravitação universal.

- Tais forças são inadmissíveis na mecânica relativística: o conceito de posições simultâneas das partículas de um sistema depende do referencial, e a velocidade limite de propagação das interações é c.

...Dinâmica Relativística

- Podemos admitir as eletromagnéticas cuja formulação é compatível com a relatividade, a velocidade de propagação no vácuo das interações eletromagnéticas é c.

- Um outro tipo de interação que podemos admitir são forças de contato que atuam apenas quanto duas partículas entram em contato numa colisão, e podem ser idealizadas como atuando apenas no instante e no ponto de contato, sendo portanto compatíveis com a relatividade.

...Momento Relativístico

- Na mecânica relativística o momento é da mesma forma proporcional a v, mas m apesar de continuar sendo um escalar ,não é mais necessariamente invariável, pode depender da única grandeza escalar associada a v, a magnitude da velocidade.

$$m = m(v)$$

$$v = |v|$$

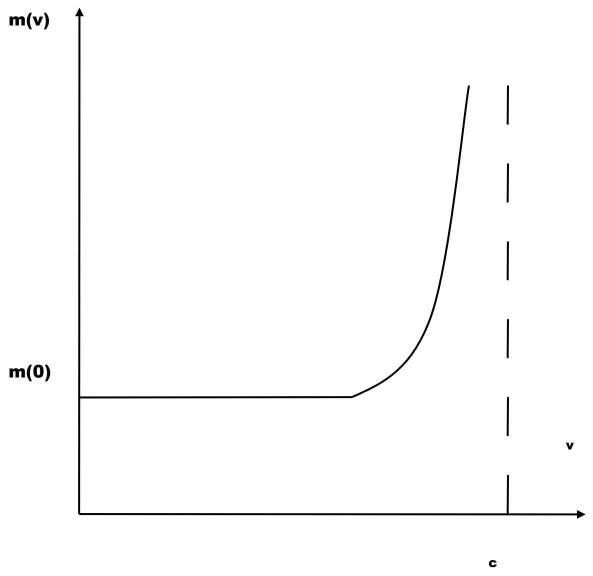
de forma que

$$p = m(v).v$$

...Momento Relativístico

Com uma série de deduções que não cabem nesse aqui, chegou-se que a massa é dada pela seguinte relação:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$m_0 = m(0)$$

onde m_0 é o valor próprio de $m(v)$, obtido quando a partícula está em repouso.

...Momento Relativístico

- Mas, no limite de baixas velocidades, devemos obter a mecânica não-relativística (newtoniana), em que m representa a massa da partícula. Logo, m_0 é a massa de repouso, e a expressão relativística do momento deve ser dada por

$$p = m(v).v = \frac{m_0.v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_o v$$

- A característica da inércia da partícula que tem um significado invariante é a sua massa própria m_0 .

- O momento depende do fator de Lorentz se a partícula estiver no centro do referencial.

...Energia relativística

- T = E + constante

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m.c^2$$

- Por definição, a energia cinética de uma partícula deve anular-se quando ela está em repouso (v = 0). Portanto, a constante de integração tem de valer , o que dá:

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} - 1 \right)$$

- E representa a energia total da partícula, a constante é a energia de repouso e T é a energia cinética.

... Relação entre energia e momento:

- Elevando-se a equação do momento e da energia ao quadrado e dividindo por c² obtemos:

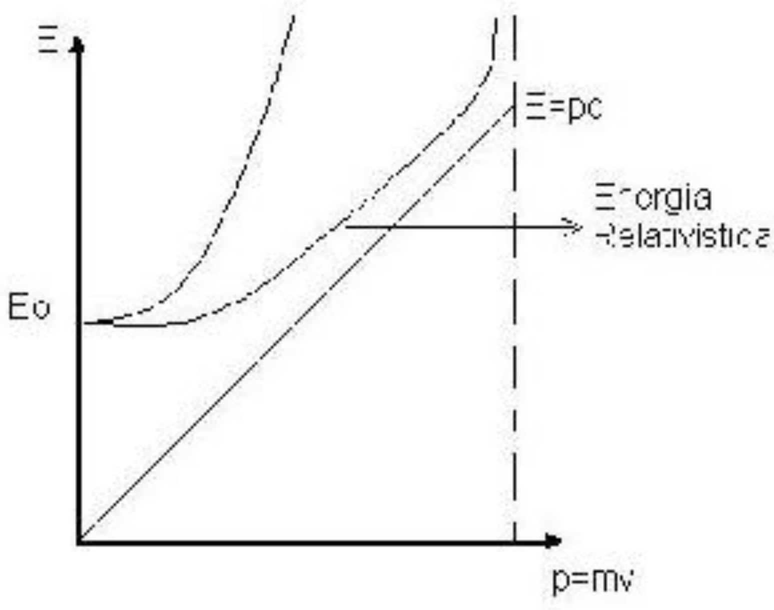
$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

- Quando m_o= 0 (ex. fóton)

$$E = pc$$

- Outra fórmula para a velocidade:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$$



...Cálculo das velocidades dos feixes nos aceleradores

	Momento máximo que um próton pode ser acelerado:	$\beta = \frac{v}{c}$
AGS/BNL	11,6 Gev/c	0.9963
SPS / CERN	450 Gev/c	0.99999753
Tevatron / Fermilab	3000Gev/c	0.999999944
RHIC / BNL	100 Gev/c	0.99995
LHC / CERN	1,5 Gev/c	0,832
Pelletron	0,016 Gev/c	0,016

m = 1Gev/c² (massa de repouso do próton)