

Física Geral - Laboratório

Estimativas e erros em medidas indiretas:
Propagação de erros



Experimentos de *medidas indiretas*

Medidas diretas: Estimativa do valor esperado de uma grandeza a partir de experimentos em que as medidas são lidas diretamente em uma escala, ou registradas por um dispositivo

Medidas indiretas: A estimativa do valor esperado de uma determinada grandeza é obtida a partir da medição (direta) de outras grandezas associadas

Medidas indiretas

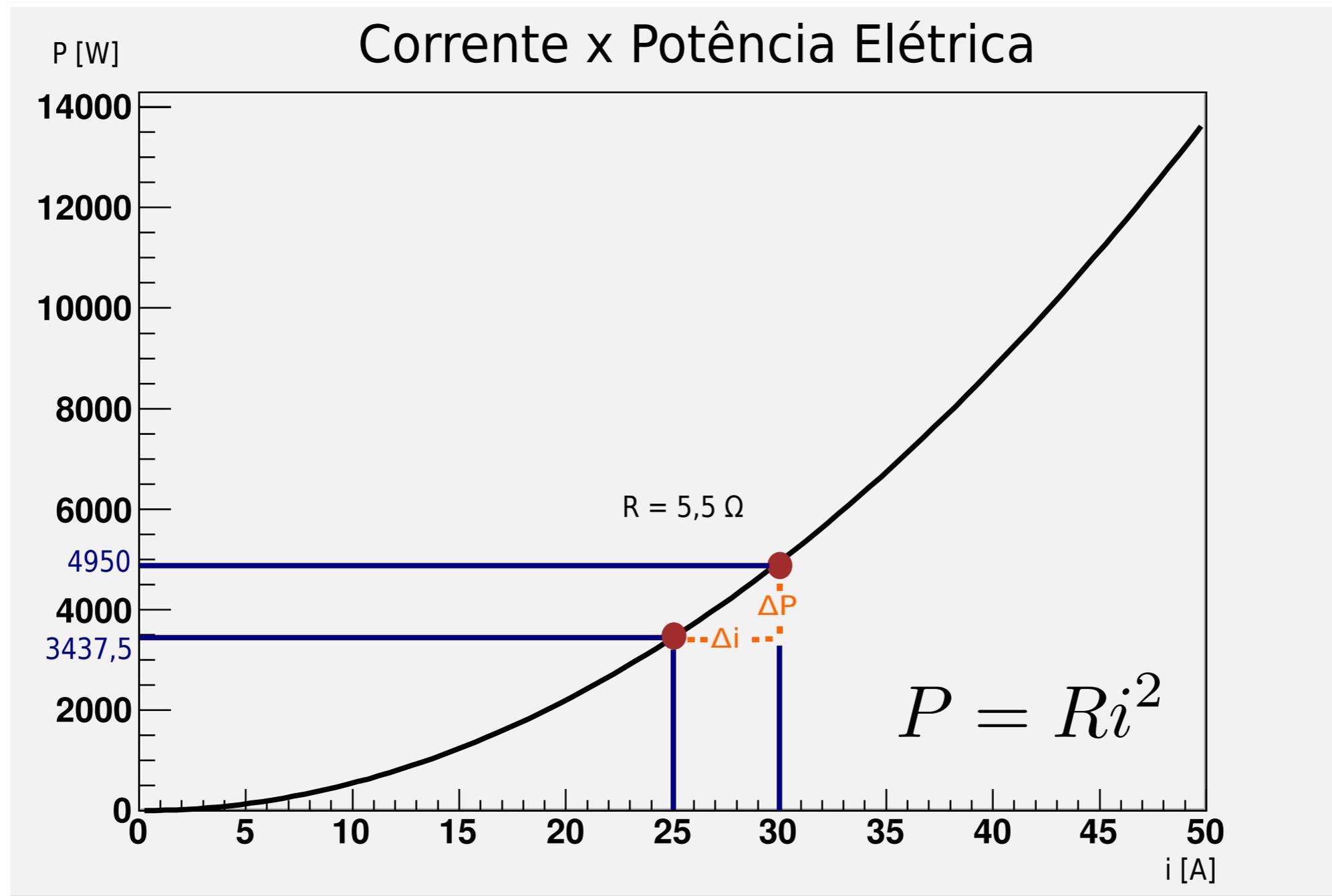
□ Propagação de erros

$$u = f(x)$$

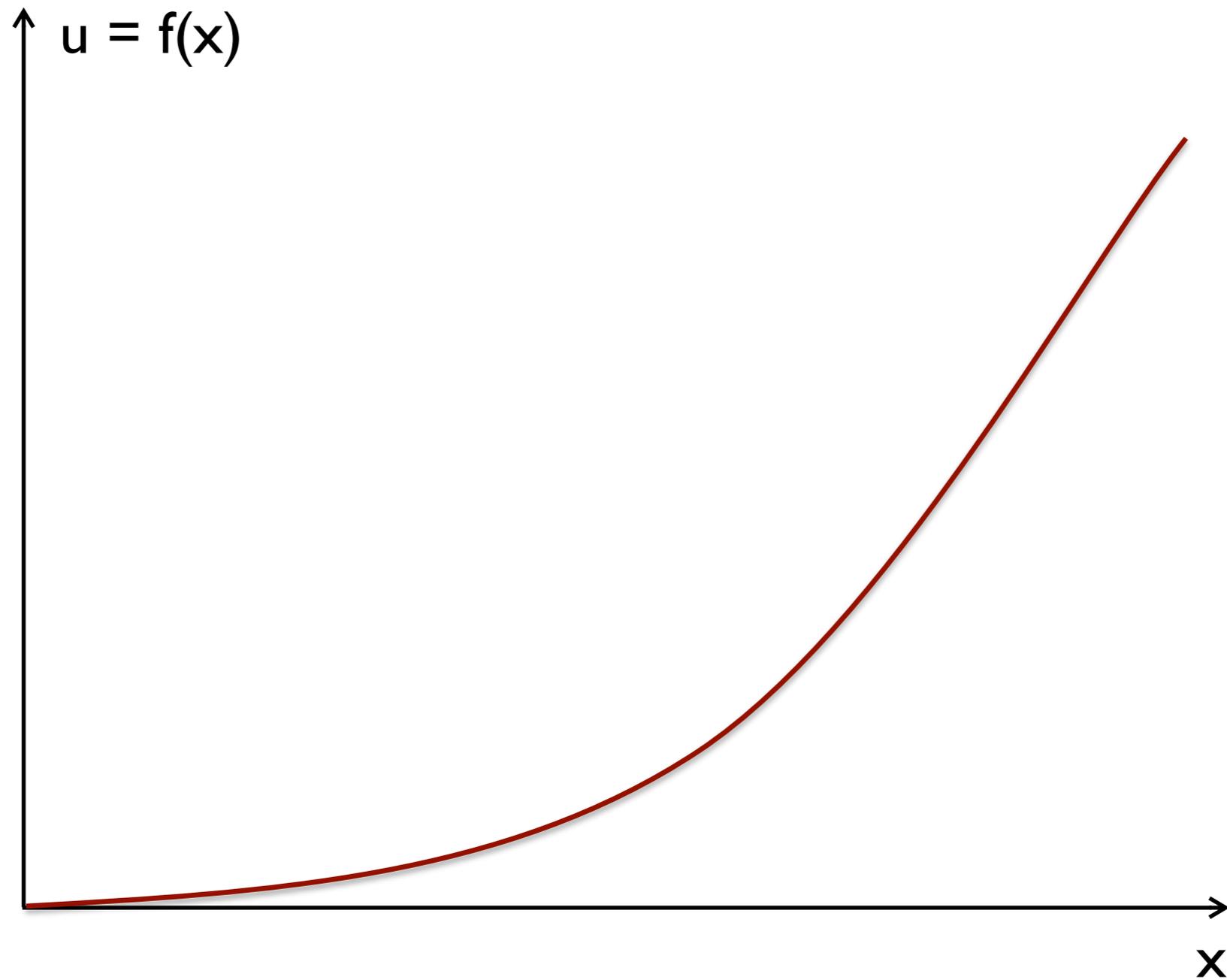
Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas diretas de uma grandeza x :
 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

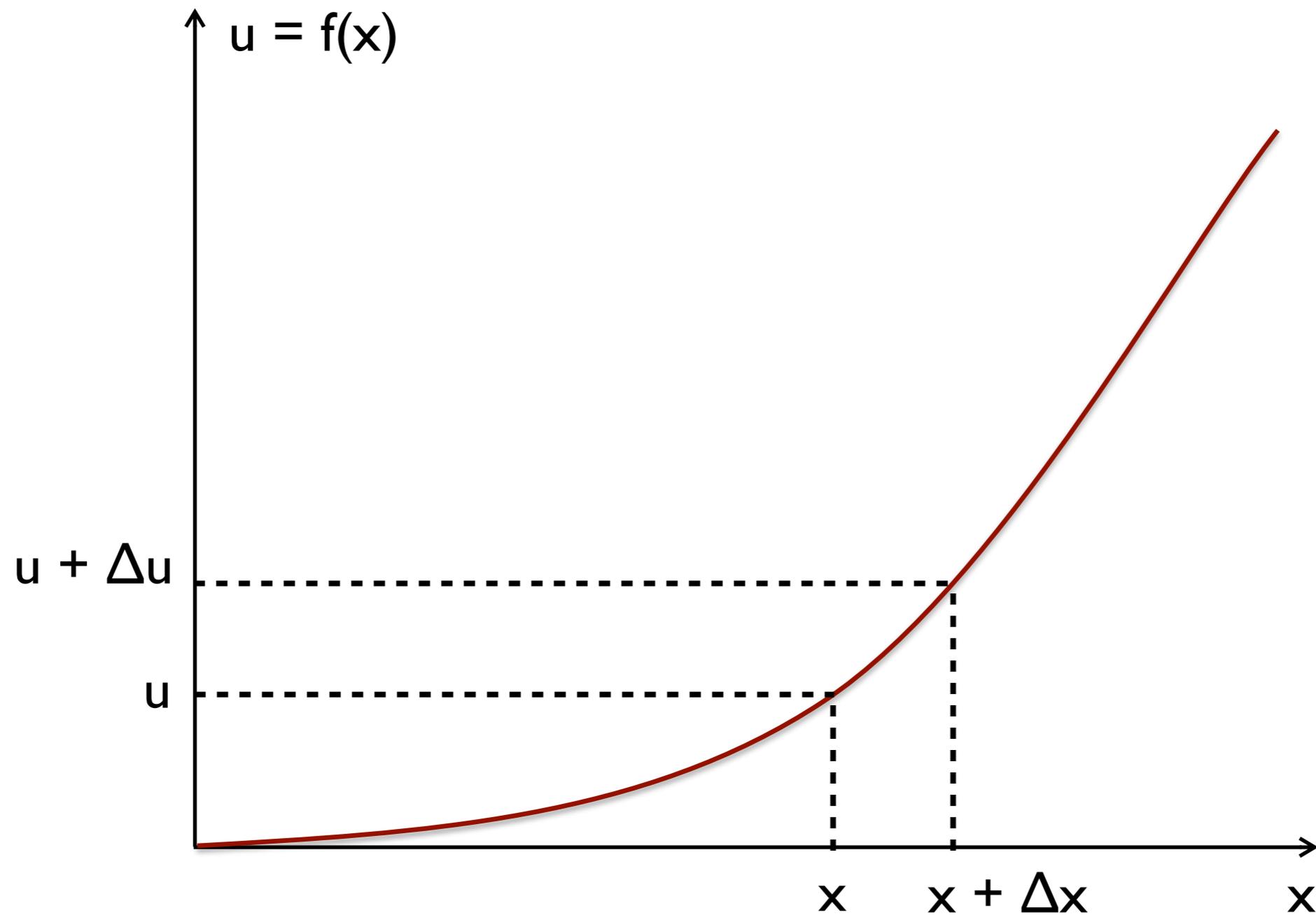
Medidas indiretas - Propagação de erros



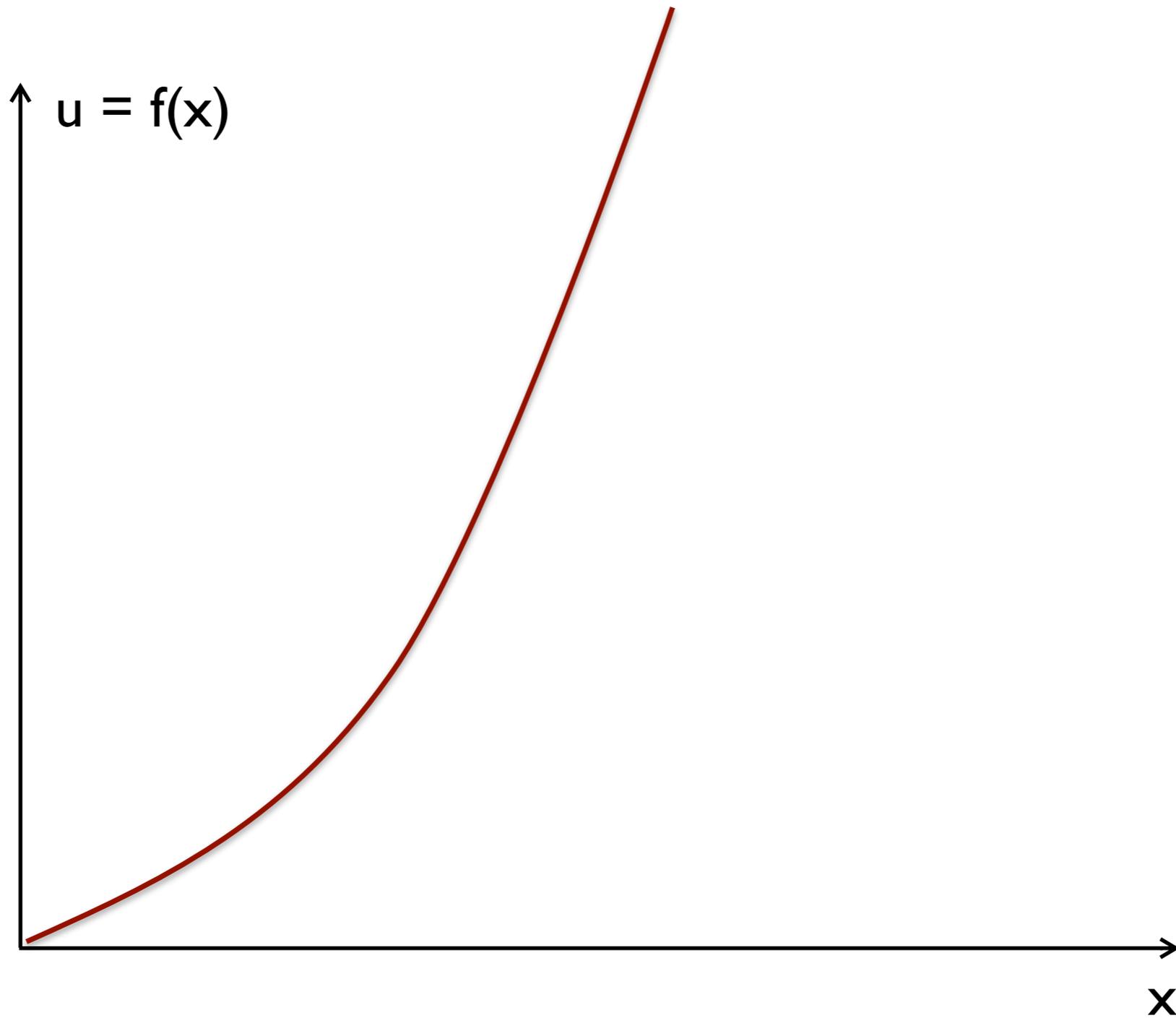
Medidas indiretas - Propagação de erros



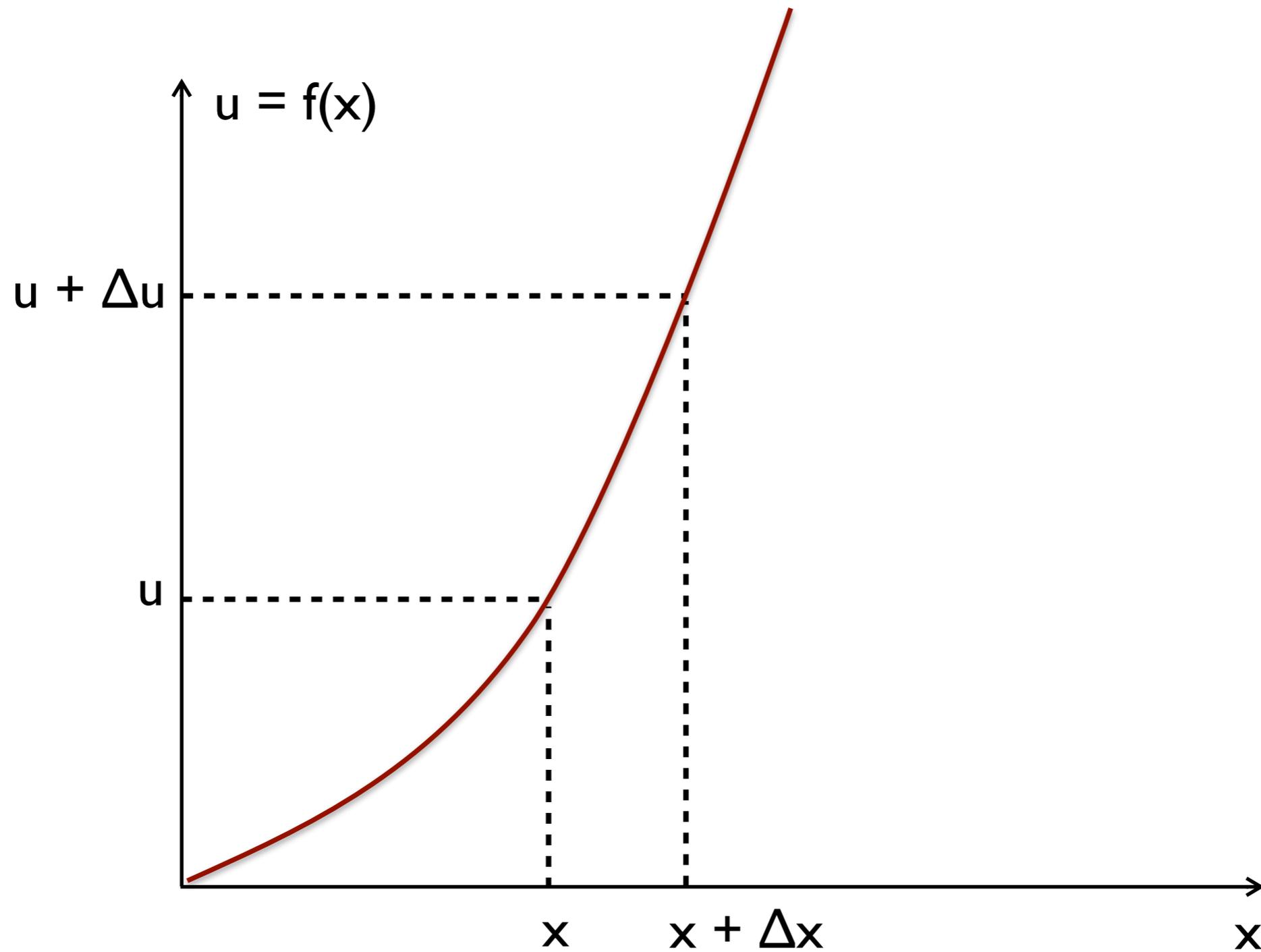
Medidas indiretas - Propagação de erros



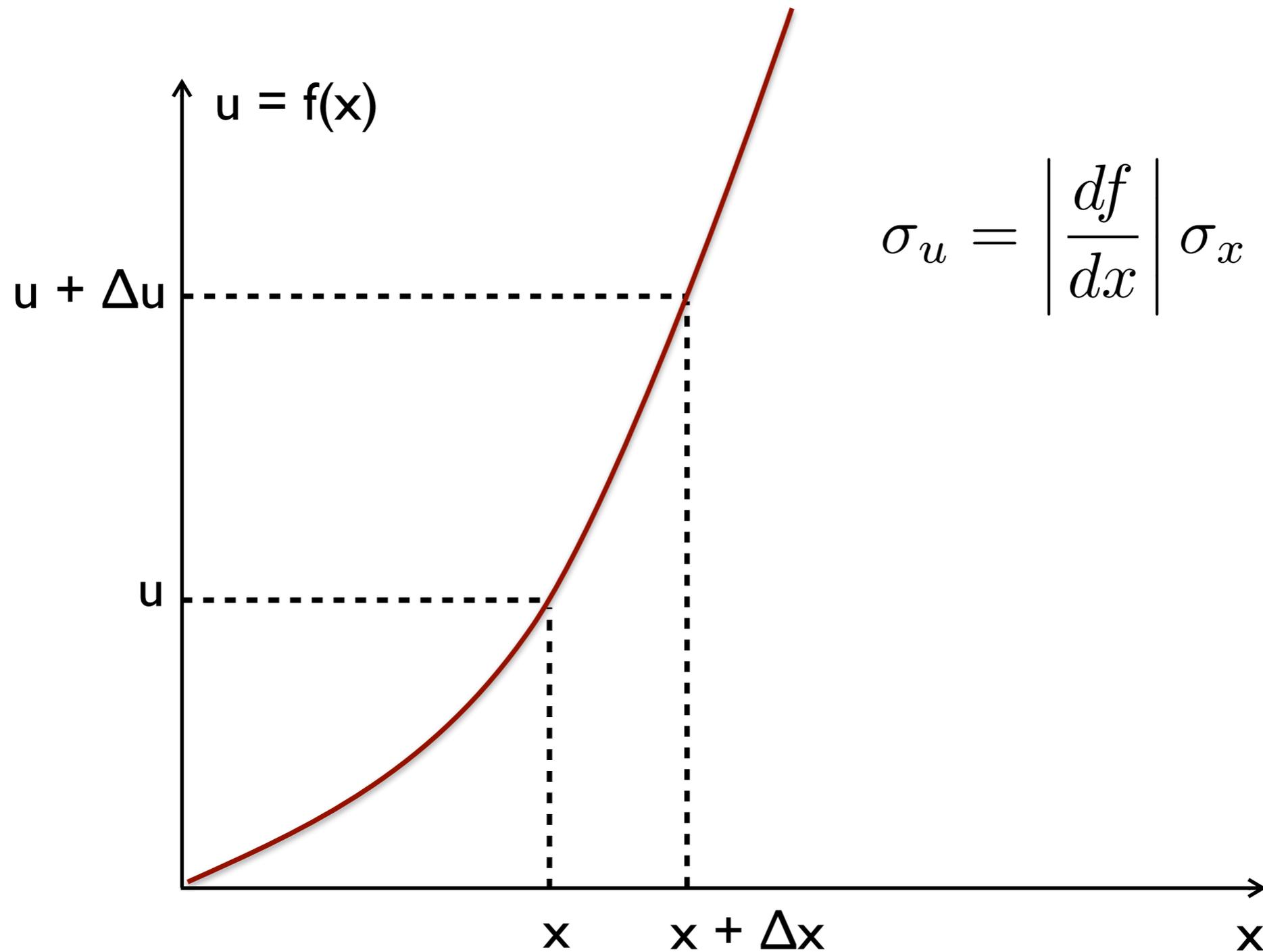
Medidas indiretas - Propagação de erros



Medidas indiretas - Propagação de erros



Medidas indiretas - Propagação de erros



Medidas indiretas - Propagação de erros

□ Propagação de erros

$$u = f(x, y)$$

Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas de duas grandezas x e y :
 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

Medidas indiretas - Propagação de erros

□ Propagação de erros

$$u = f(x, y)$$

Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas de duas grandezas x e y:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$$

Queremos obter: $\bar{u} \pm \sigma_{\bar{u}}$

Propagação de erros

- Estimativa do valor esperado

Propagação de erros

- Estimativa do valor esperado

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Propagação de erros

□ Estimativa do valor esperado

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Exemplo: $u = x + y$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{x} + \bar{y}$$

Propagação de erros

□ Estimativa do valor esperado

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Exemplo: $u = x + y$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$u = x/y$$

$$\bar{u} = \bar{x}/\bar{y}$$

Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Em geral: $u = f(x, y)$

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{xy}$$

Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Adição ou subtração de variáveis

$$u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r \sigma_{\bar{x}} \sigma_{\bar{y}}}$$

Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Adição ou subtração de variáveis

$$u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}}$$

Se x e y são *independentes*
(correlação nula) \longrightarrow $\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$

Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Multiplicação ou divisão de variáveis

Se x e y são *independentes* (correlação nula):

$$u = xy \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

ou

$$u = x/y$$

Se a correlação não é nula:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right) \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)}$$

Propagação de erros

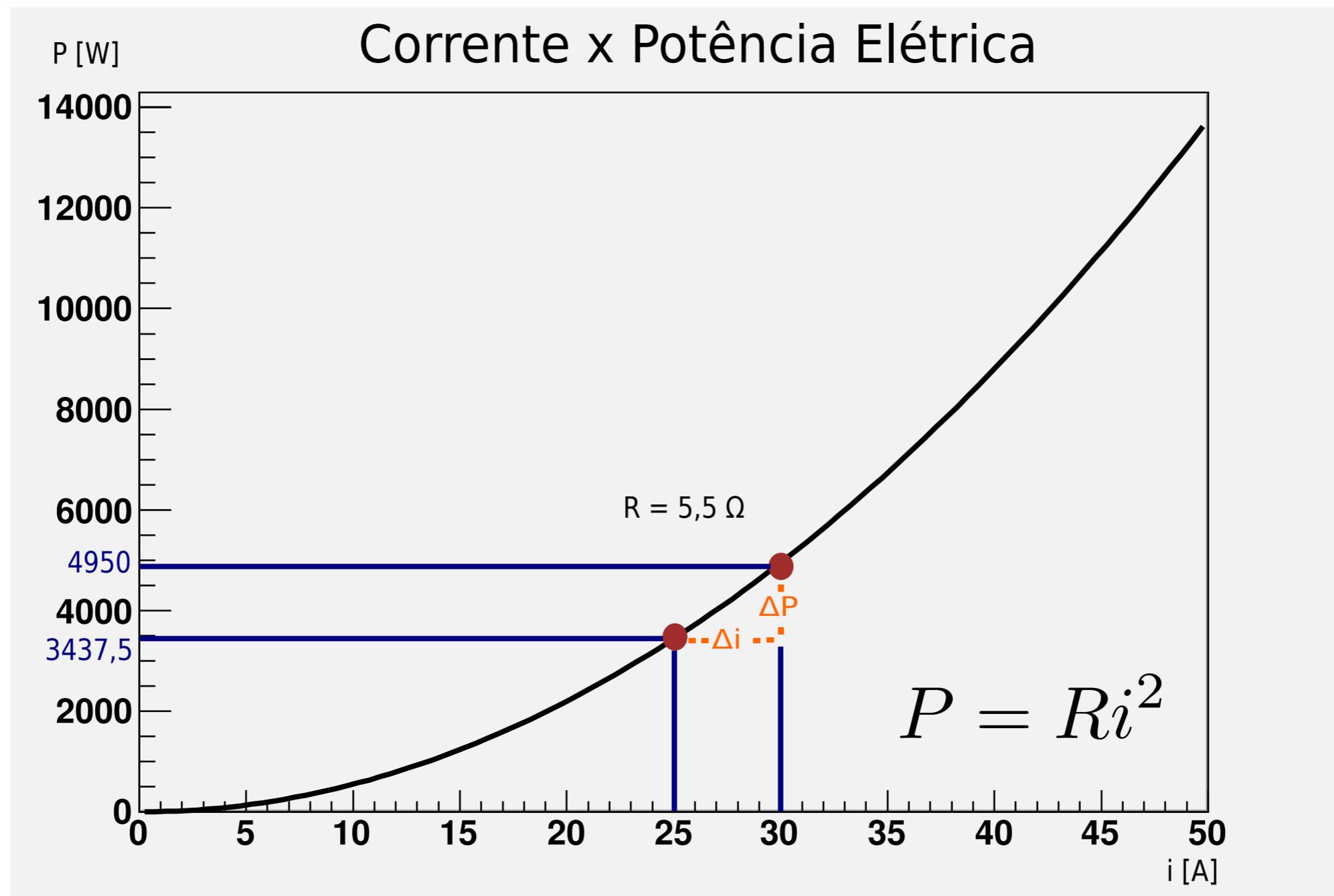
□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo:

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Propagação de erros



Propagação de erros

Exemplo:

$$P = Ri^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = R\sigma_{\bar{i}^2}$$

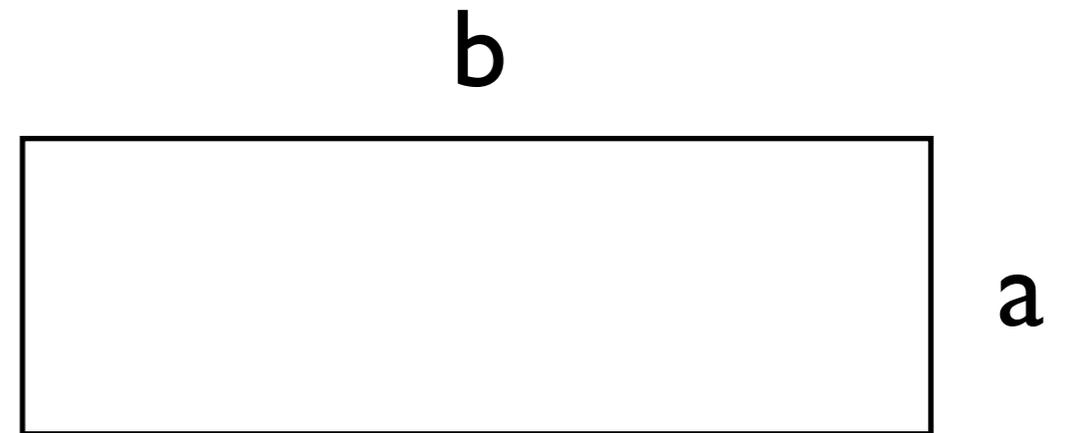
$$i^2 = i \times i \Rightarrow \frac{\sigma_{\bar{i}^2}}{i^2} = 2 \frac{\sigma_{\bar{i}}}{i}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = 2R\bar{i}\sigma_{\bar{i}}$$

Exercício (4.3.1)

Lado a: $10,32 \pm 0,05$ cm

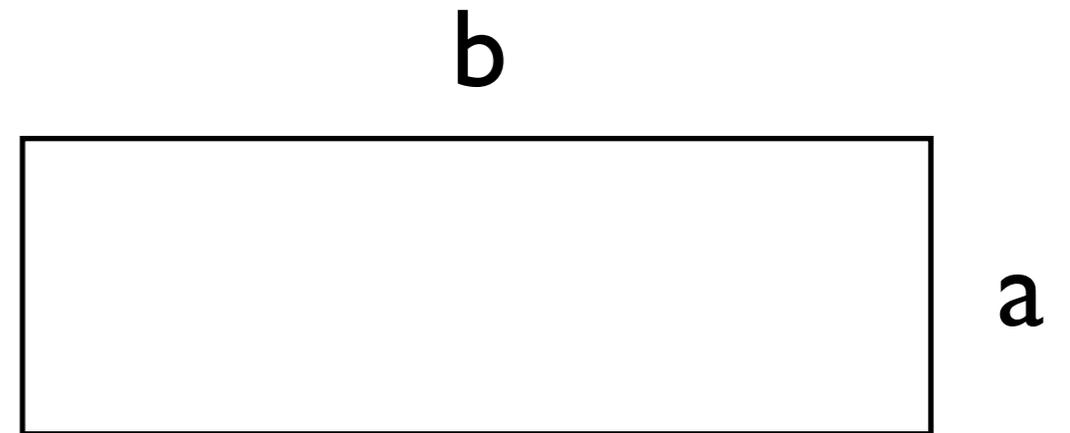
Lado b: $64,27 \pm 0,05$ cm



Exercício (4.3.1)

Lado a: $10,32 \pm 0,05$ cm

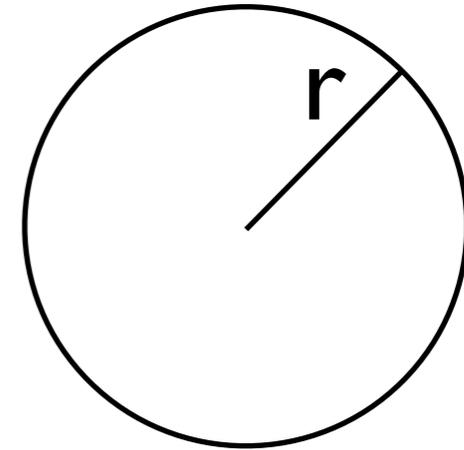
Lado b: $64,27 \pm 0,05$ cm



Perímetro: $149,18 \pm 0,14$ cm

Área: $663,27 \pm 3,25$ cm²

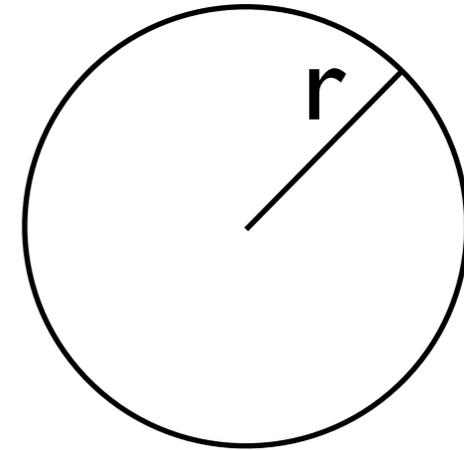
Exercício (4.3.3)



$$r = (10,2 \pm 0,3) \text{ cm}$$

Exercício (4.3.3)

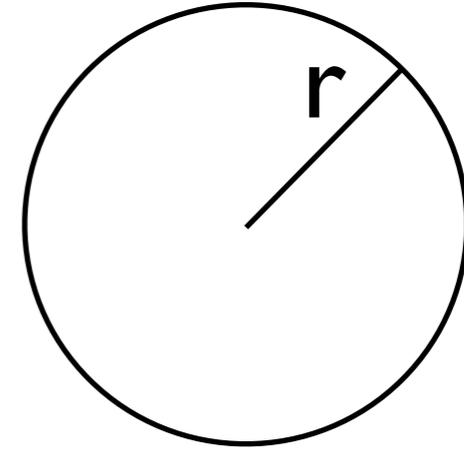
$$A = \pi r^2 \Rightarrow \sigma_{\overline{A}} = \pi \sigma_{\overline{r^2}}$$
$$r^2 = r \times r \Rightarrow \frac{\sigma_{\overline{r^2}}}{\overline{r^2}} = 2 \frac{\sigma_{\overline{r}}}{\overline{r}}$$
$$\Rightarrow \sigma_{\overline{A}} = 2\pi \overline{r} \sigma_{\overline{r}}$$



$$r = (10,2 \pm 0,3) \text{ cm}$$

Exercício (4.3.3)

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \sigma_{\overline{A}} = \pi \sigma_{\overline{r^2}}$$
$$r^2 = r \times r \Rightarrow \frac{\sigma_{\overline{r^2}}}{\overline{r^2}} = 2 \frac{\sigma_{\overline{r}}}{\overline{r}}$$
$$\Rightarrow \sigma_{\overline{A}} = 2\pi \overline{r} \sigma_{\overline{r}}$$



$$r = (10,2 \pm 0,3) \text{ cm}$$
$$A = (327 \pm 19) \text{ cm}^2$$

Propagação de erros

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Exercícios:

i) $u = x^2$

ii) $u = (x \cdot y) / (x + y)$

iii) $u = x + y + z$

iv) $u = xy + z$

v) $p = kl$

vi) $I = V/R$

vii) $v = \sqrt{2gh}$

viii) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Extras