Física Geral - Laboratório
2015/2

Estimativas e erros em medidas diretas (II)
Níveis de confiança, compatibilidade e combinação

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Resumo: estimativa do valor esperado

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \pm \textit{erro (unidade)}}$$

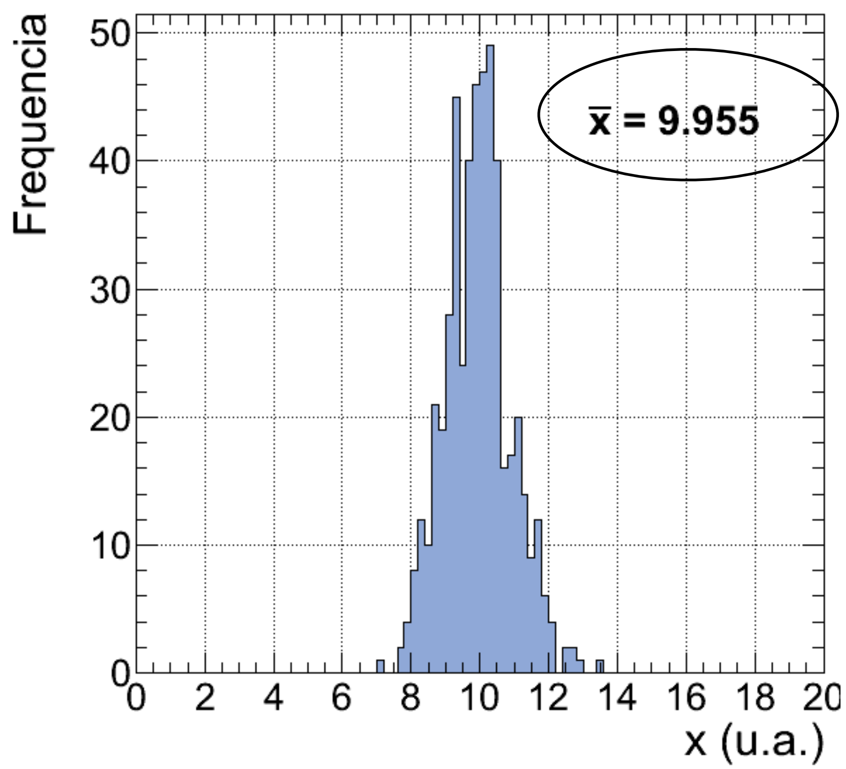
$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

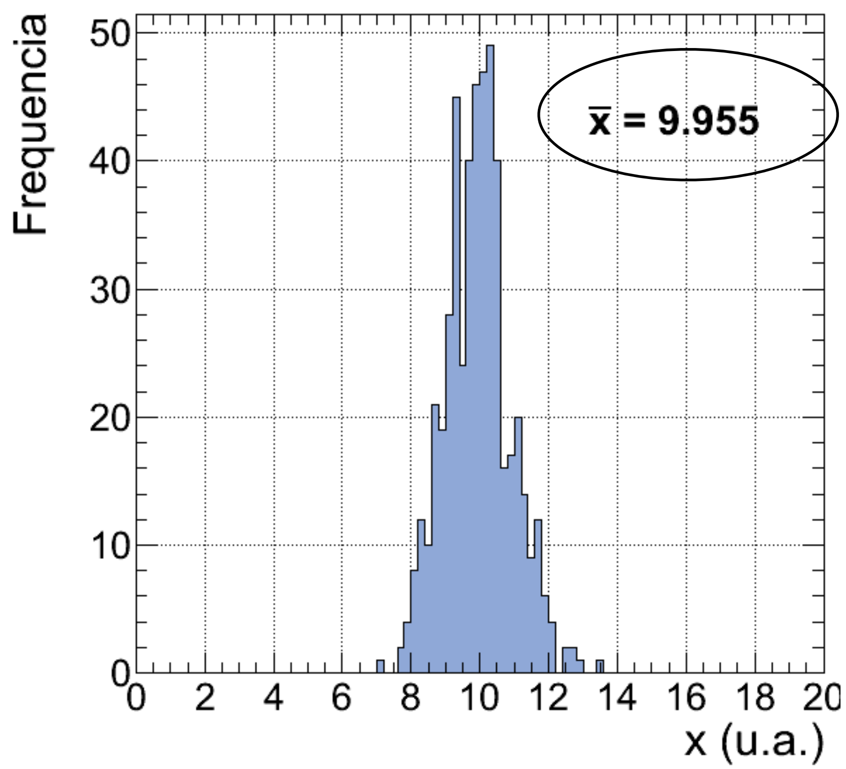
Estimativa do erro de cada medida $\longrightarrow$ $$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

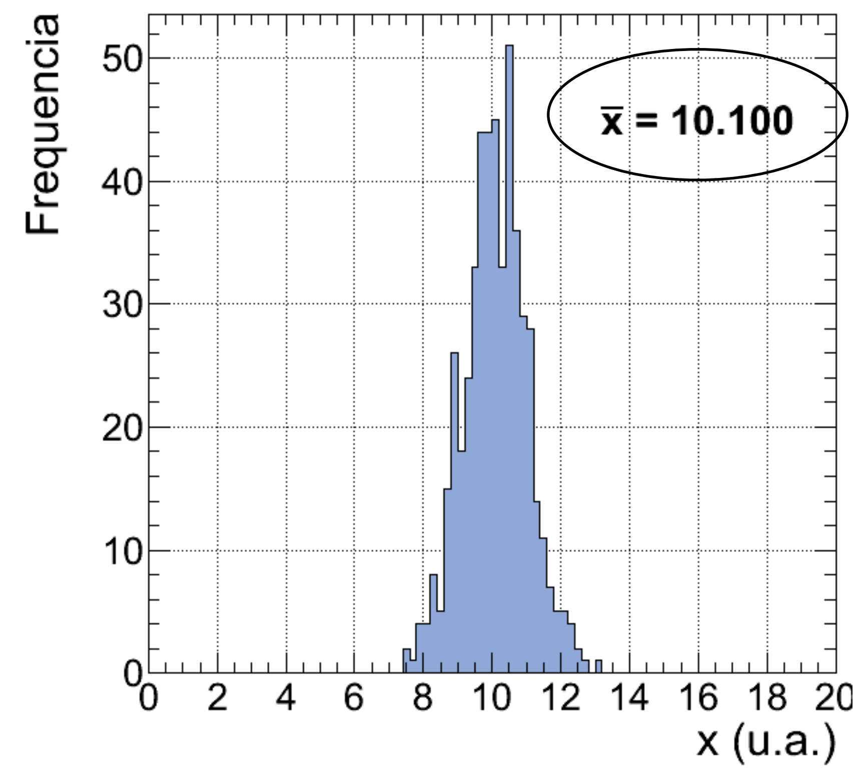
Estimativa do erro da média $\longrightarrow$ $$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Resumo: Erro da média

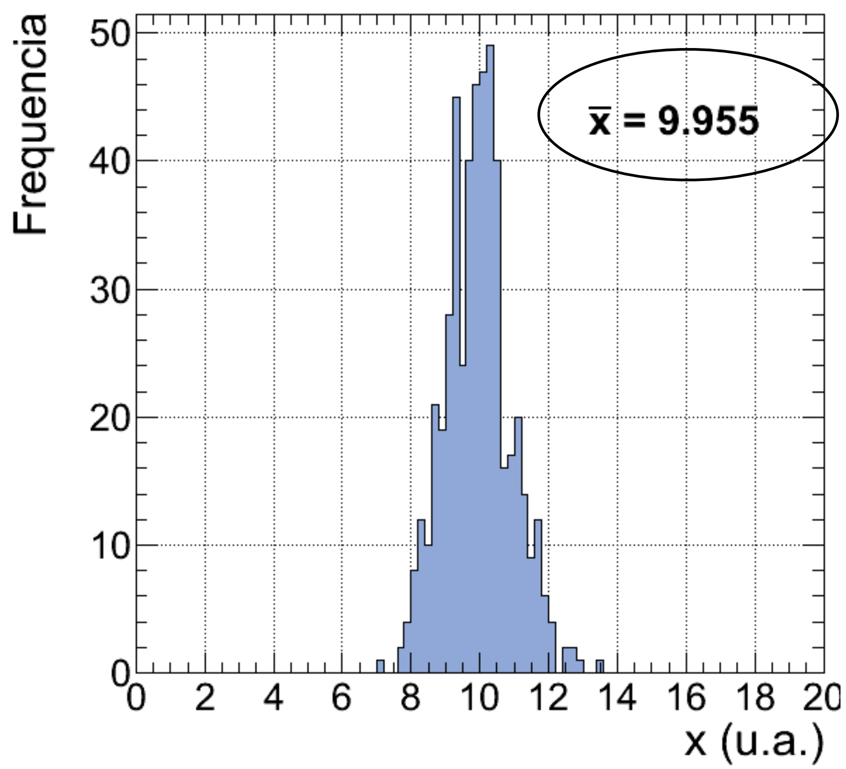


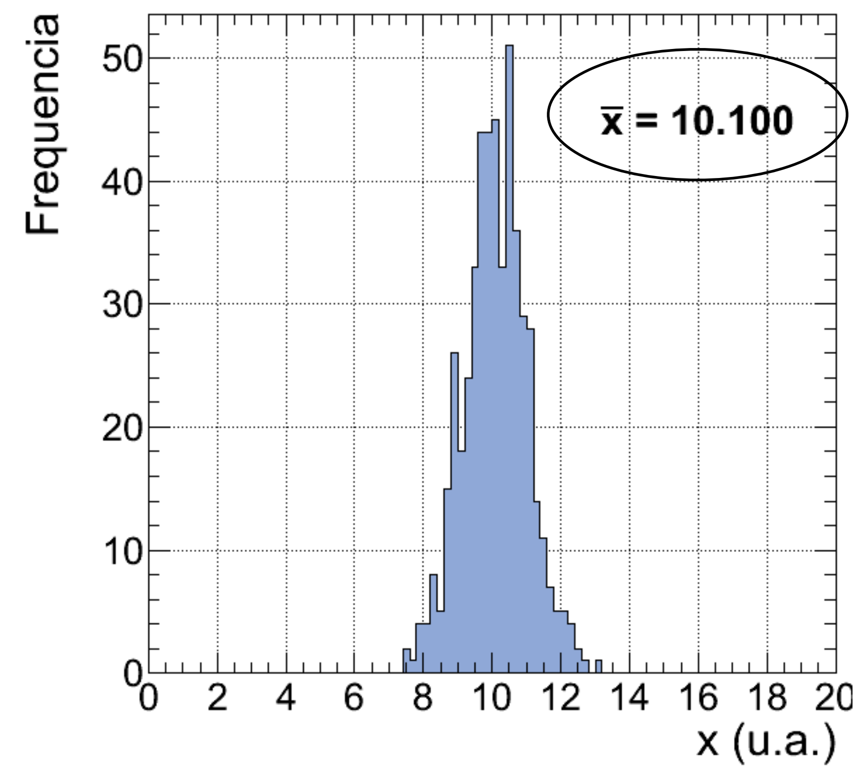
Resumo: Erro da média

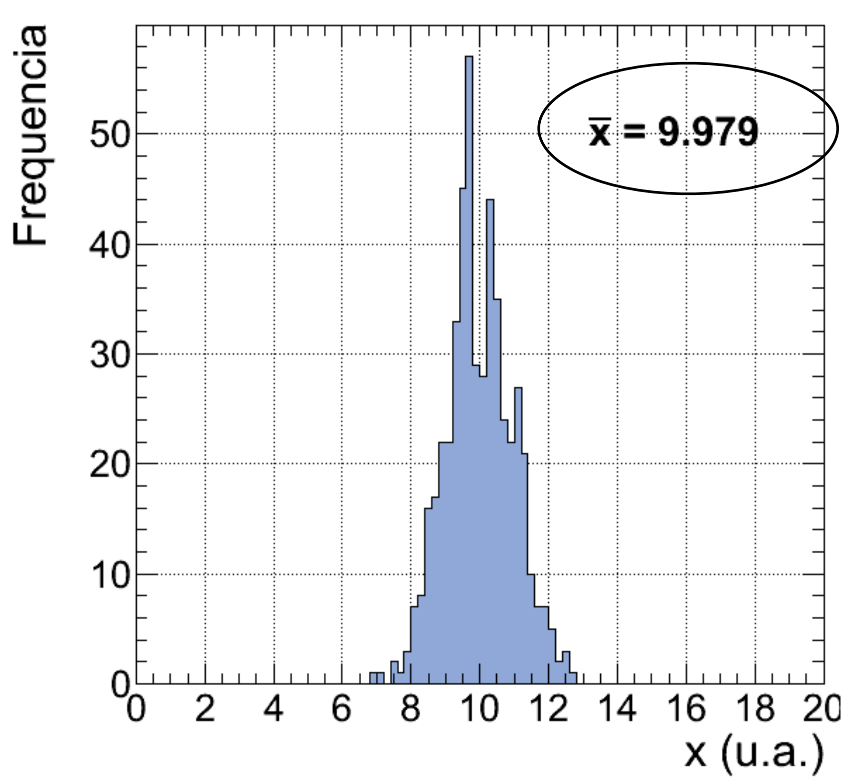




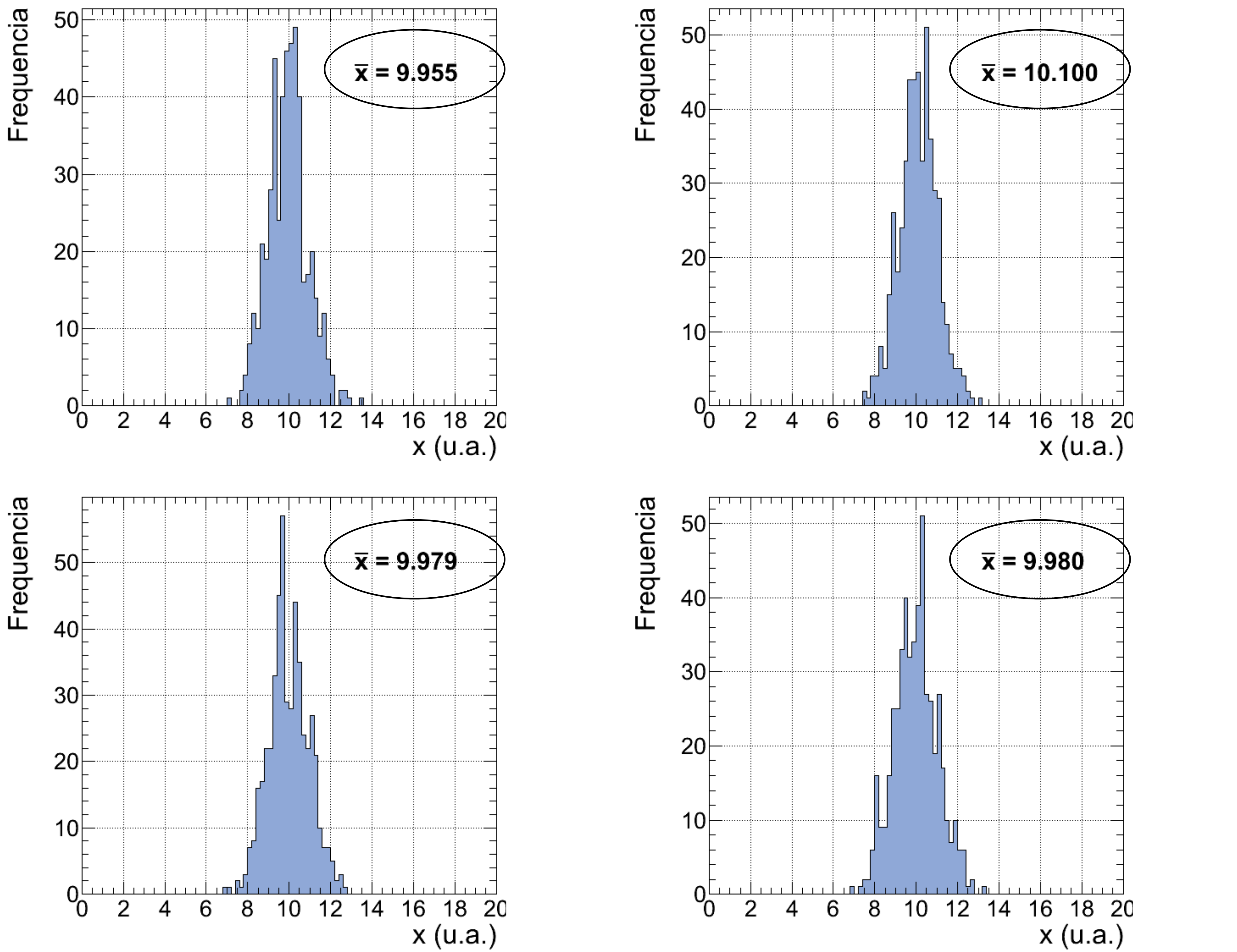
Resumo: Erro da média



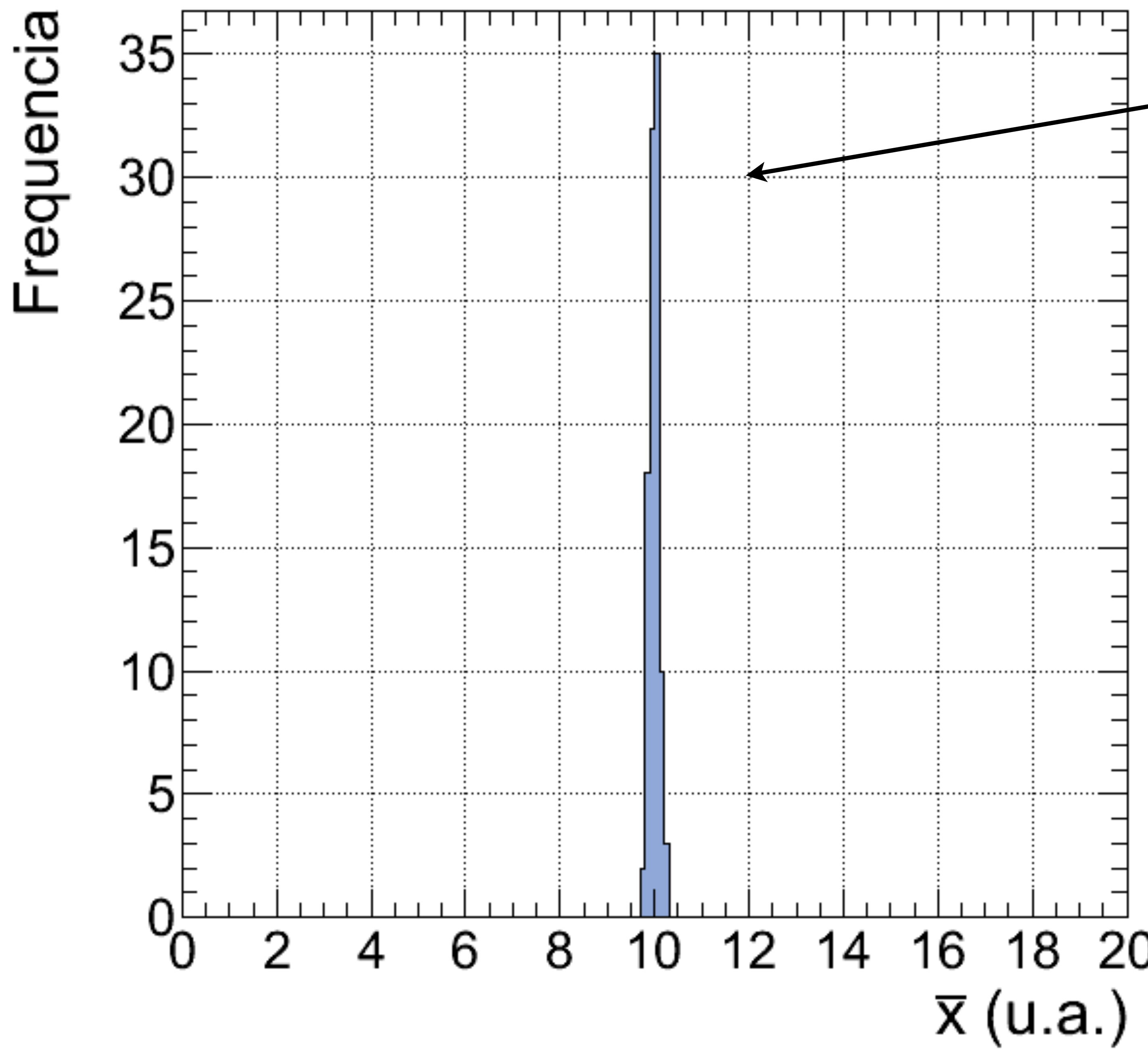




Resumo: Erro da média



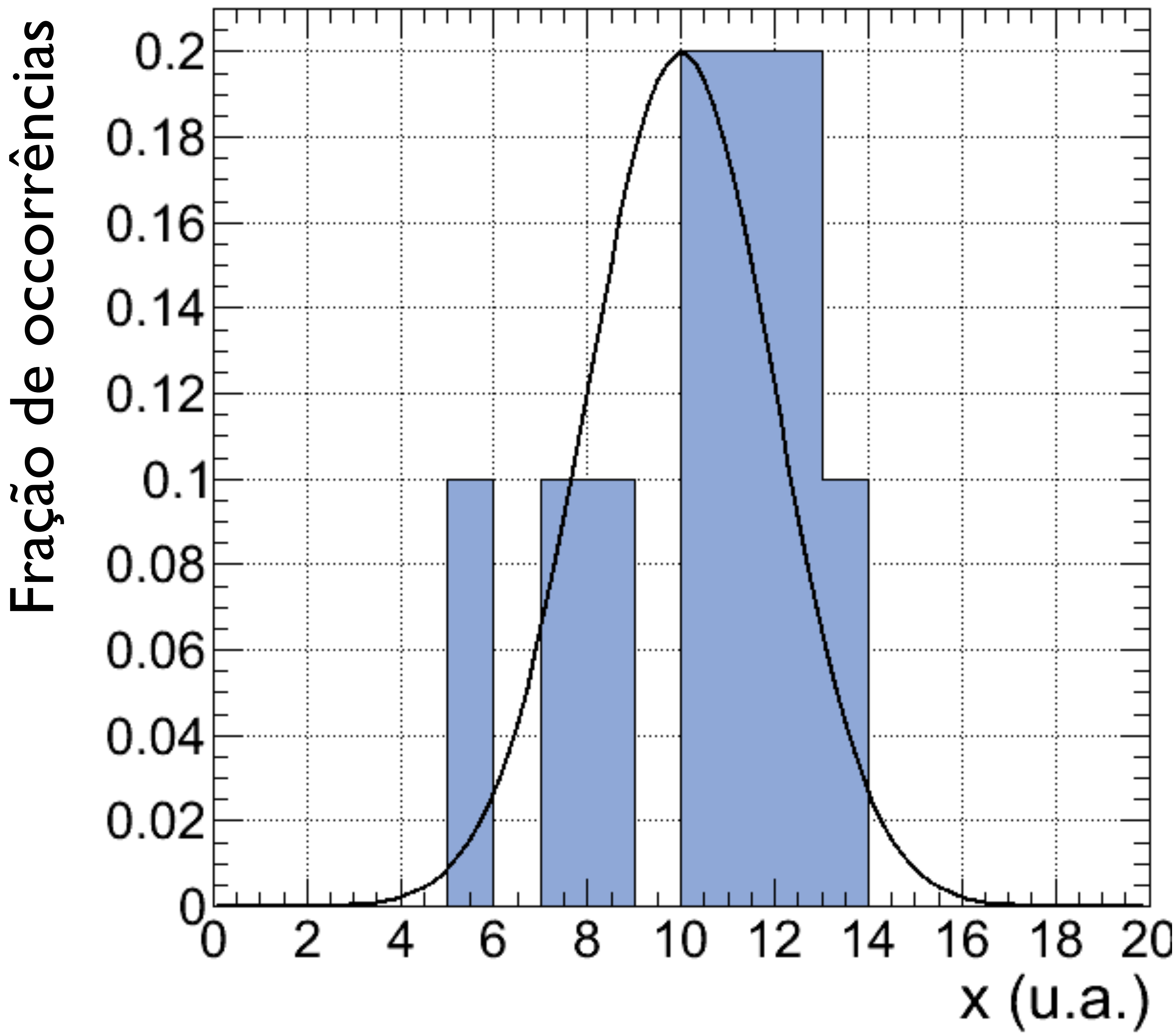
Resumo: Erro da média



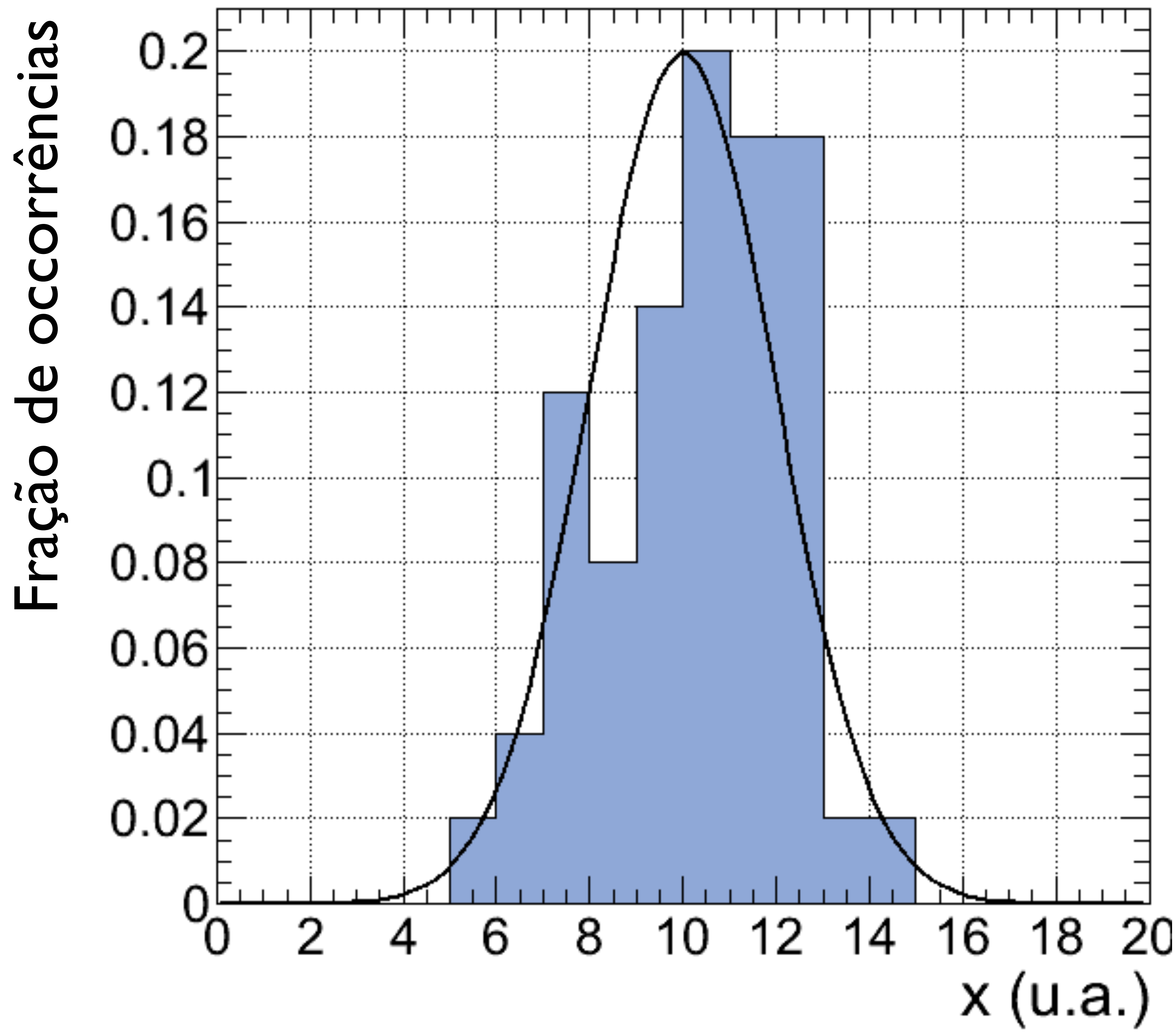
Distribuição das médias de 100 "experimentos", cada um com 100 medidas

Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

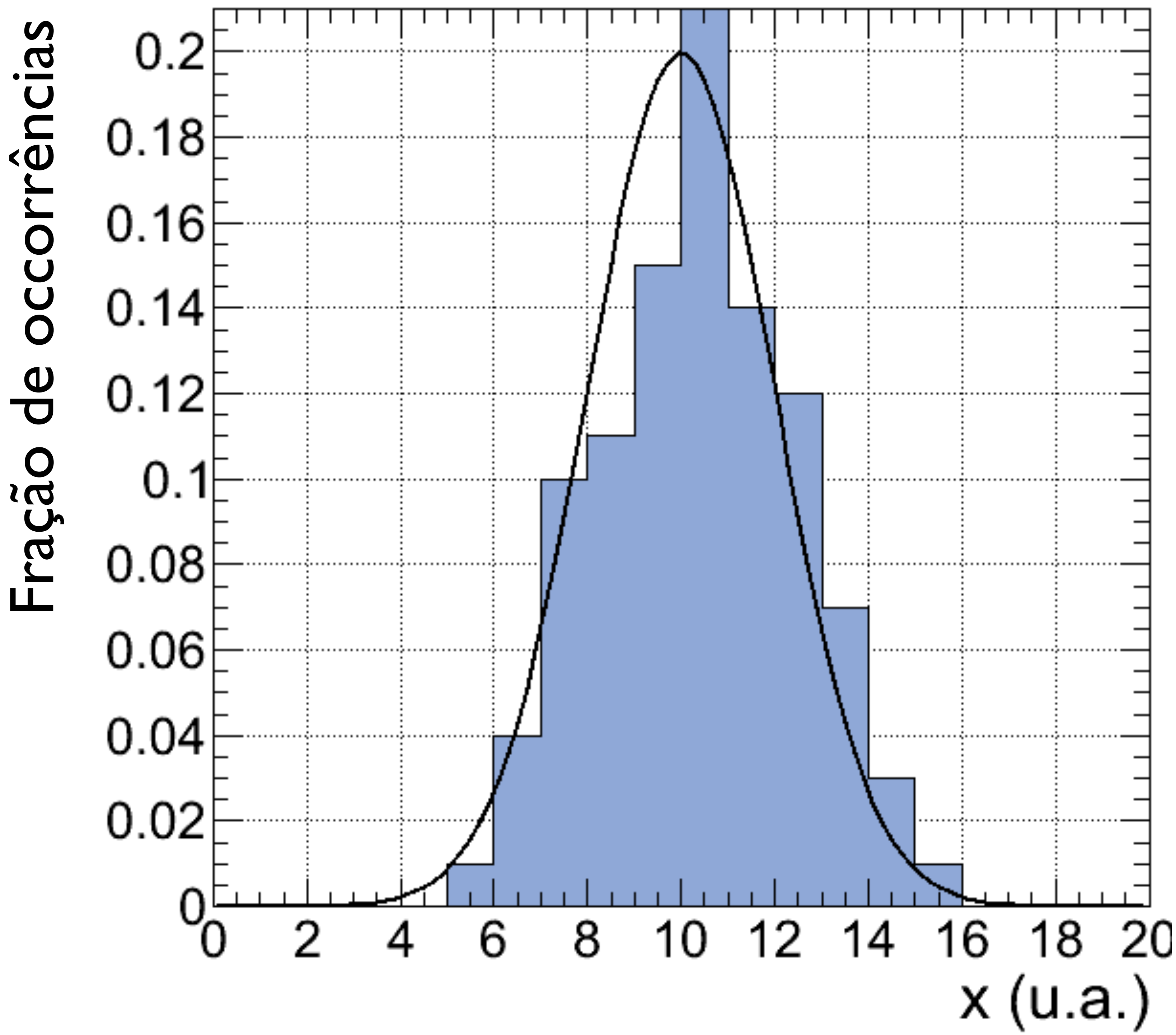
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



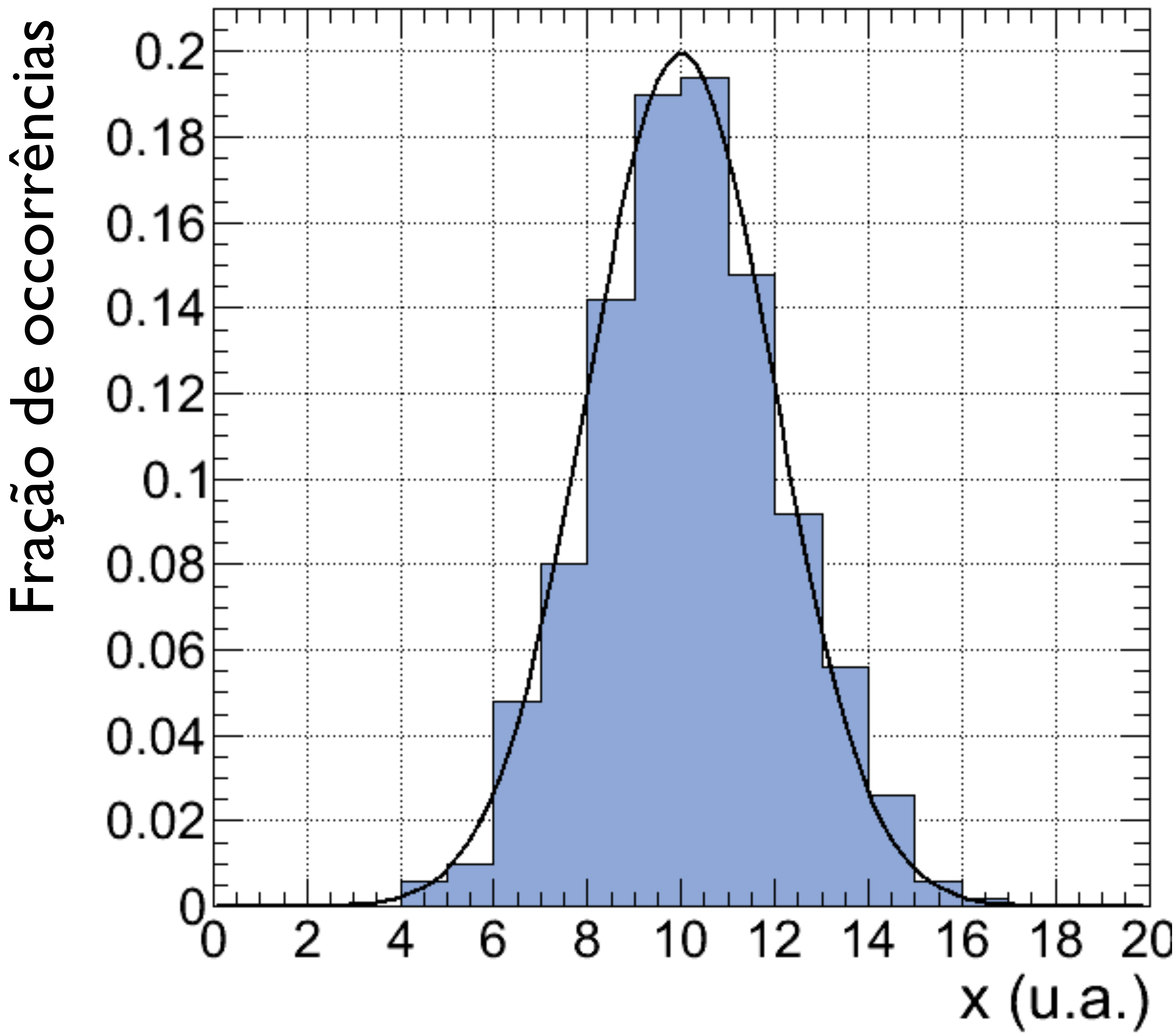
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



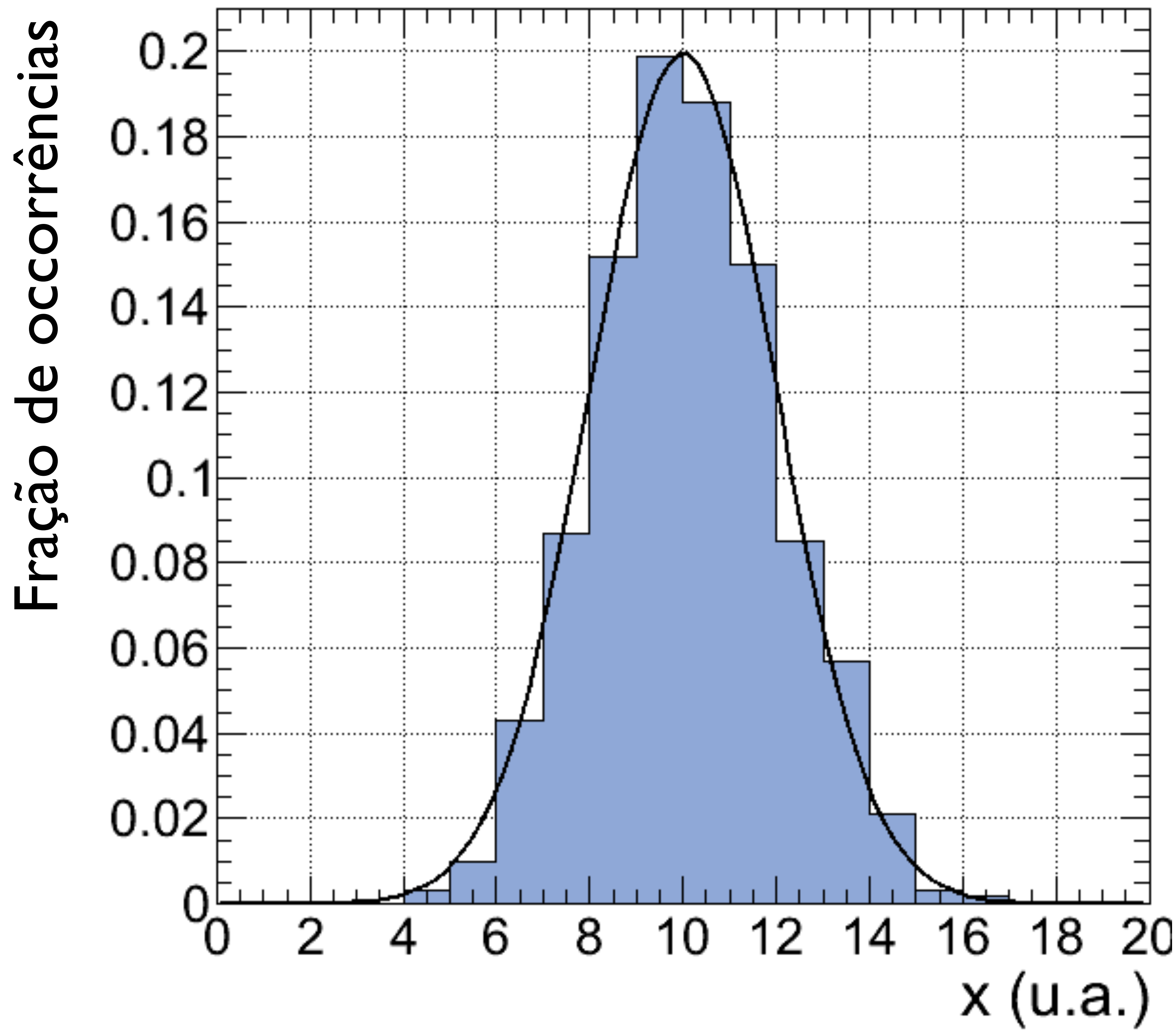
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

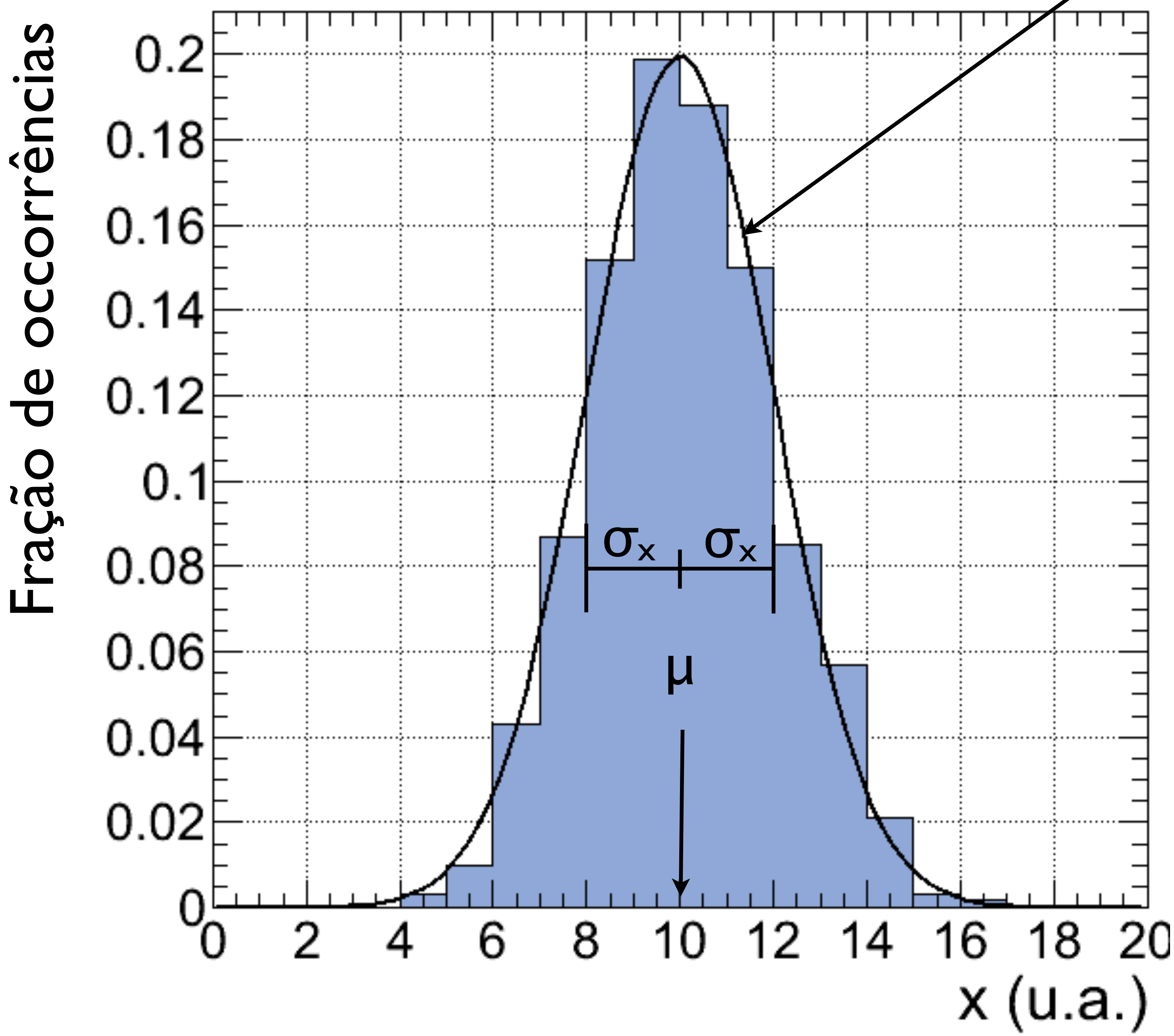


Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



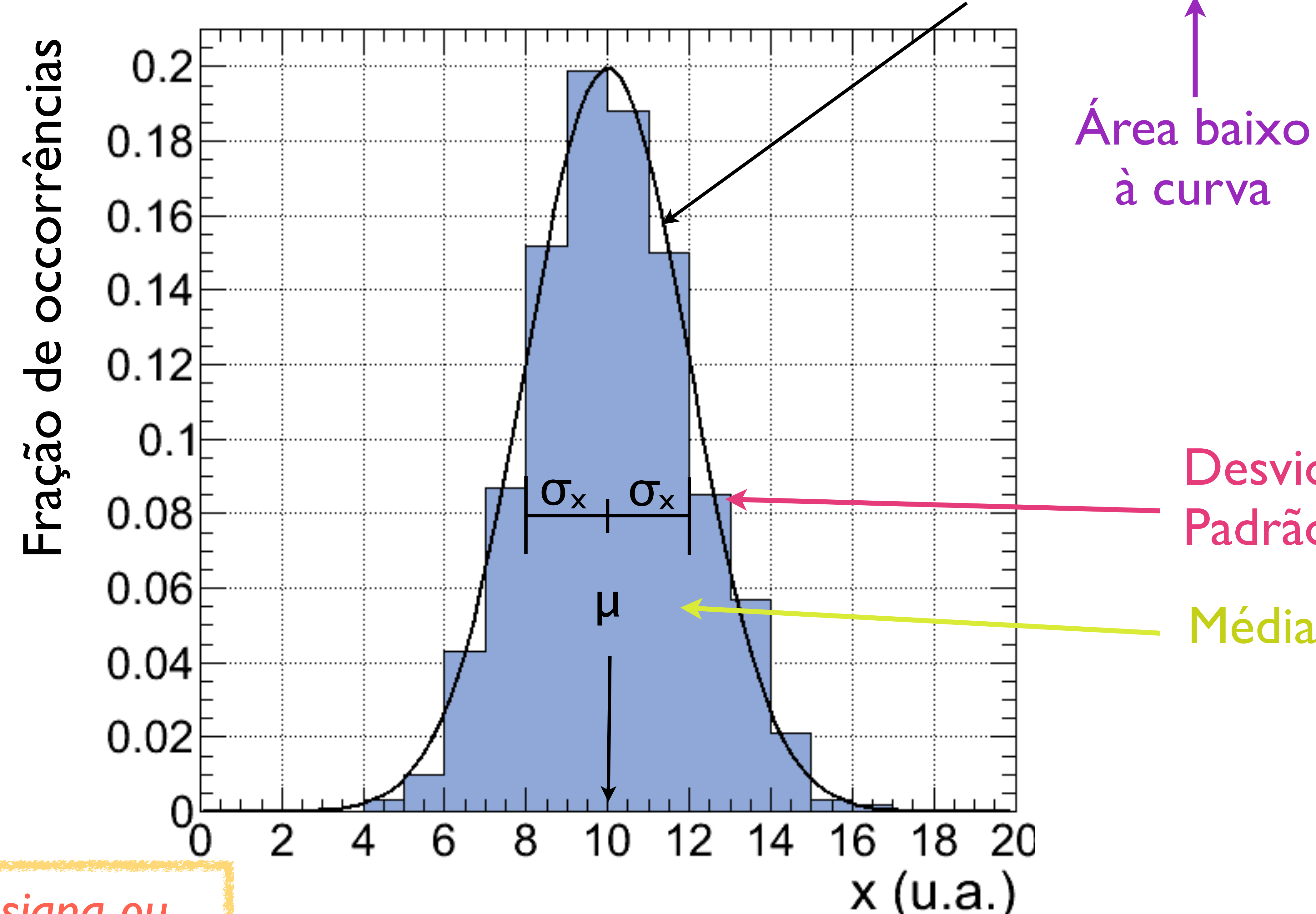
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

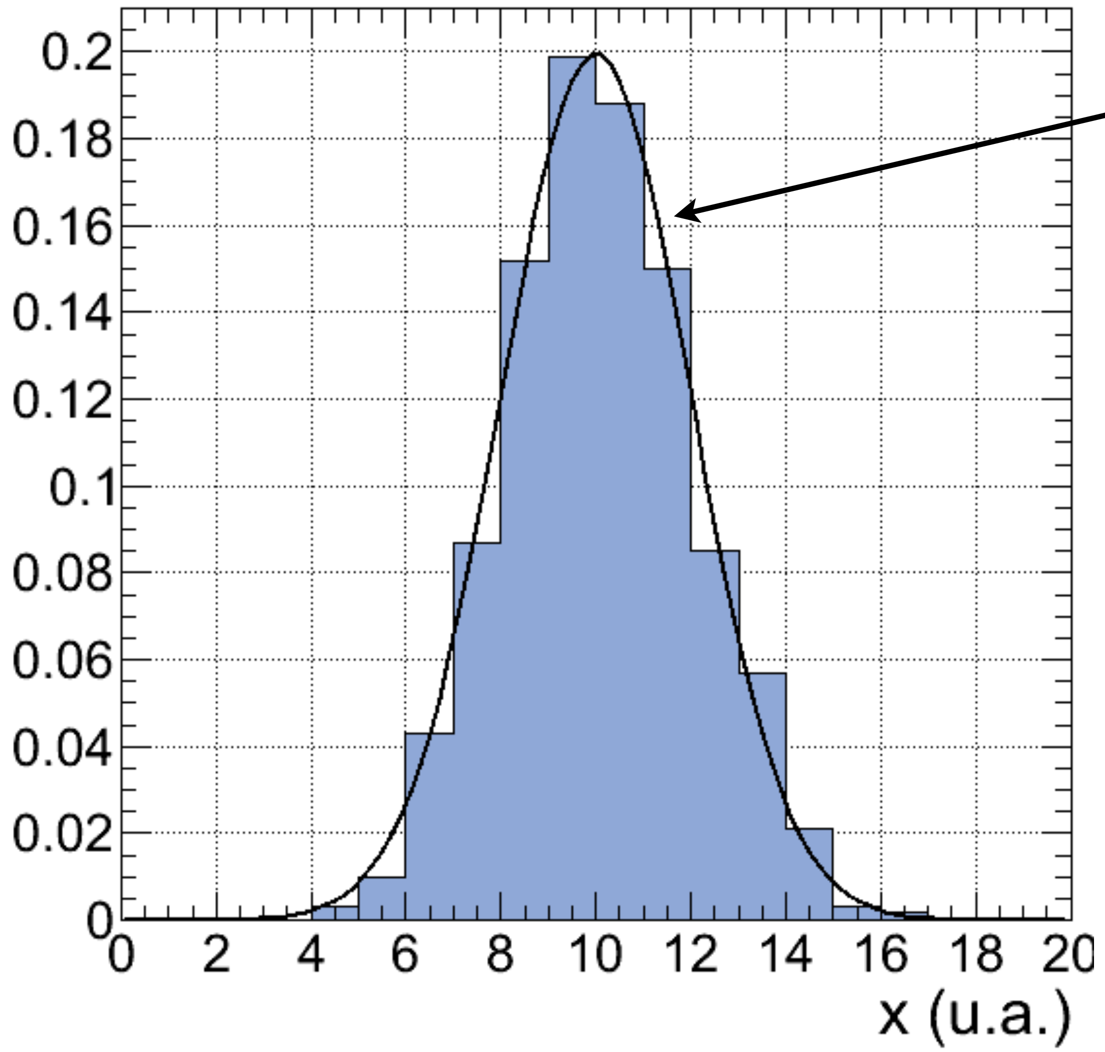
$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$



TCC: gaussiana ou distribuição normal

Incertezas aleatórias: Lei dos Erros

"Lei dos Erros": Para um número indefinidamente grande de medidas a distribuição das frequências se comporta como uma distribuição de Gauss. *TCC : "Teorema do Limite Central".*



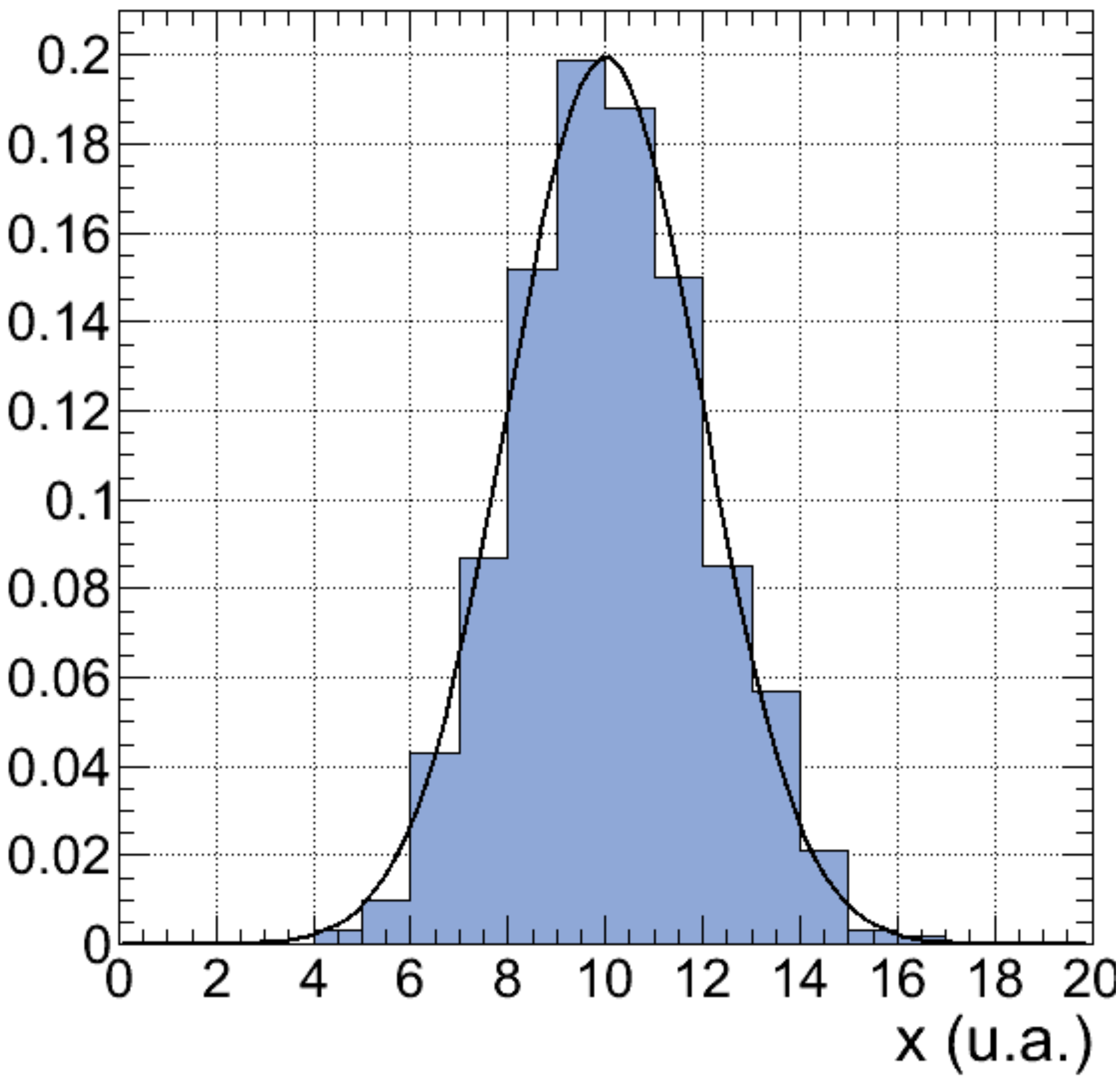
$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

área A

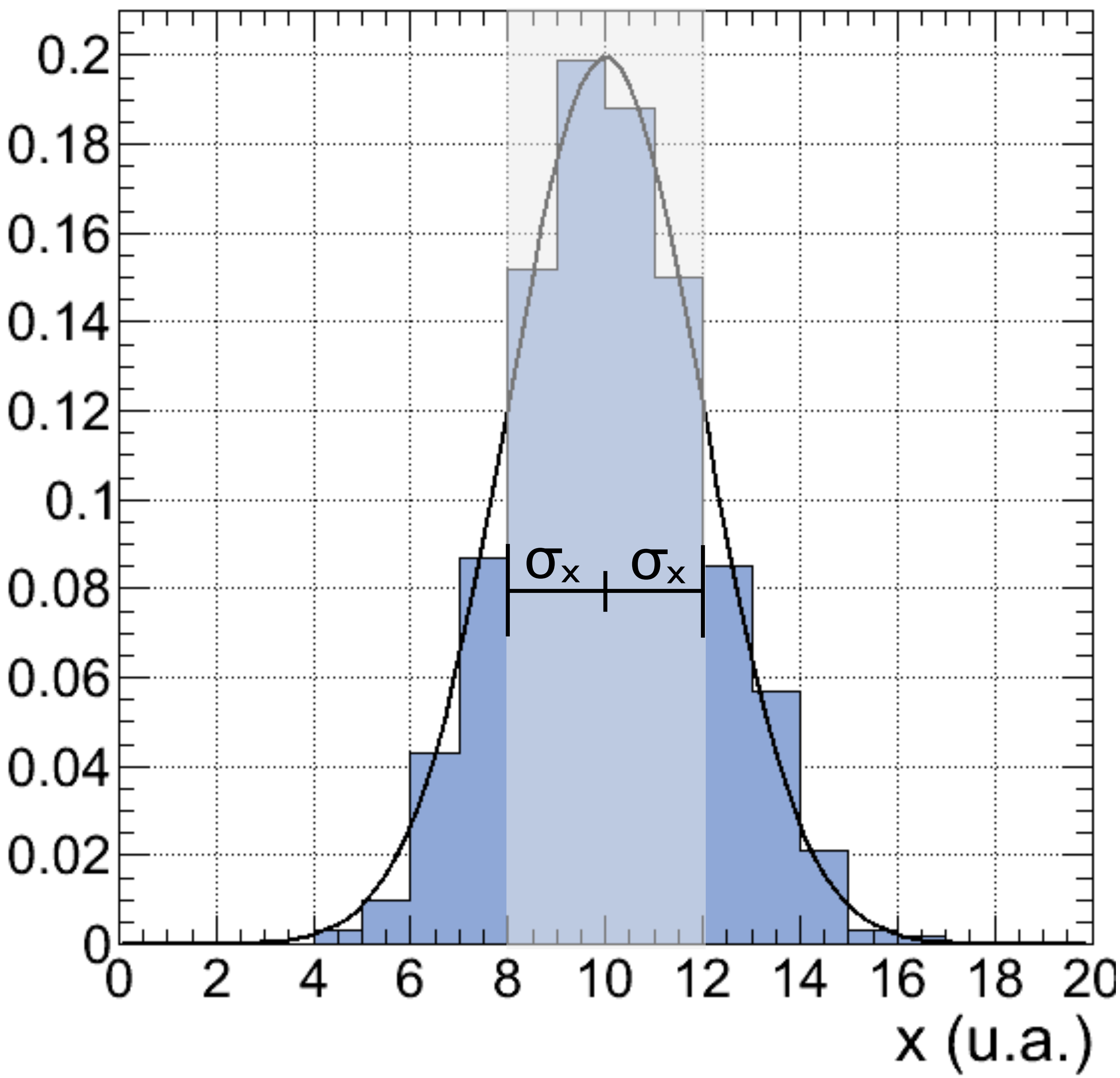
média $\overline{x} = \mu$

variância $\overline{x^2} - \overline{x}^2 = \sigma_x^2$

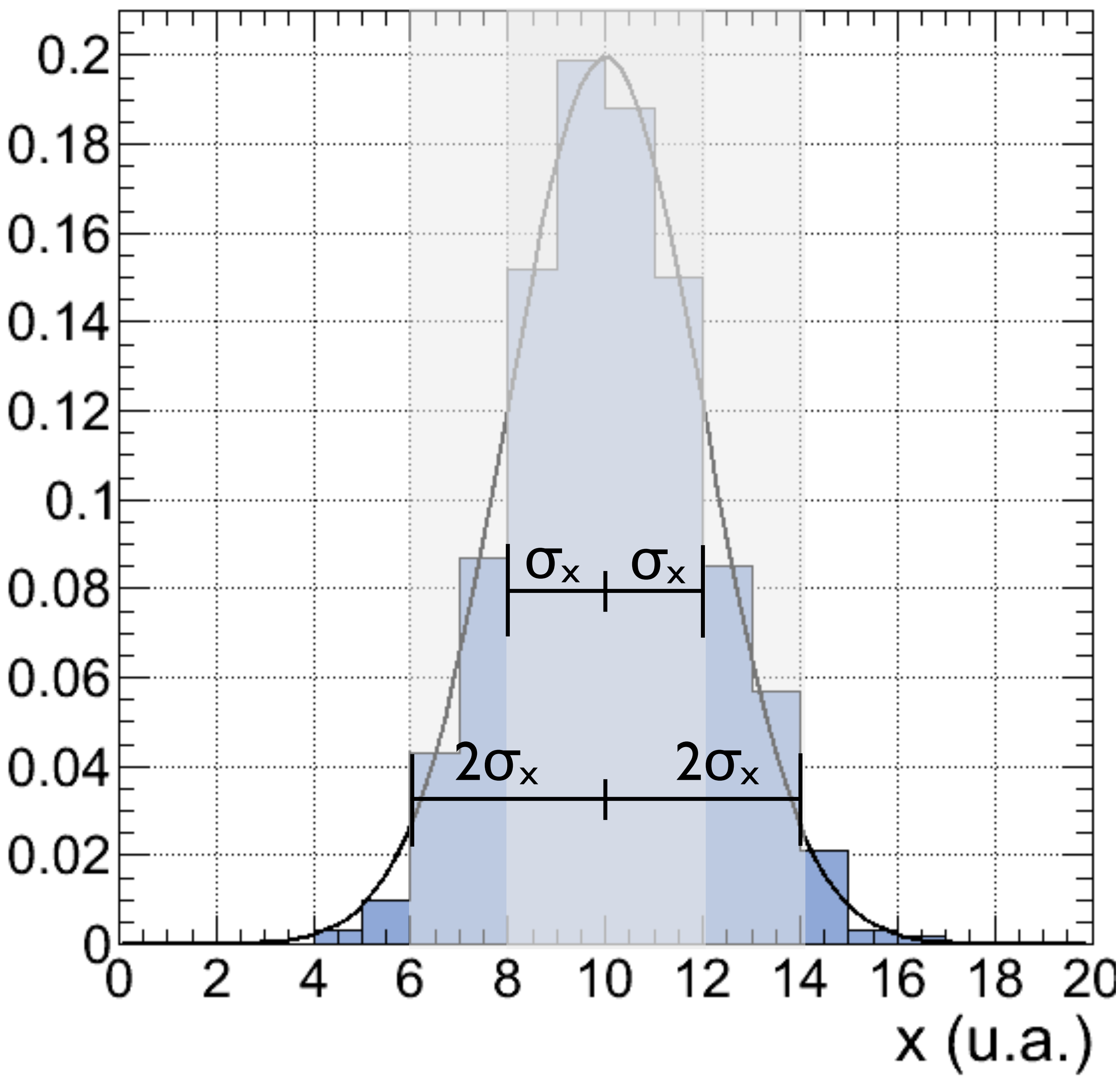
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



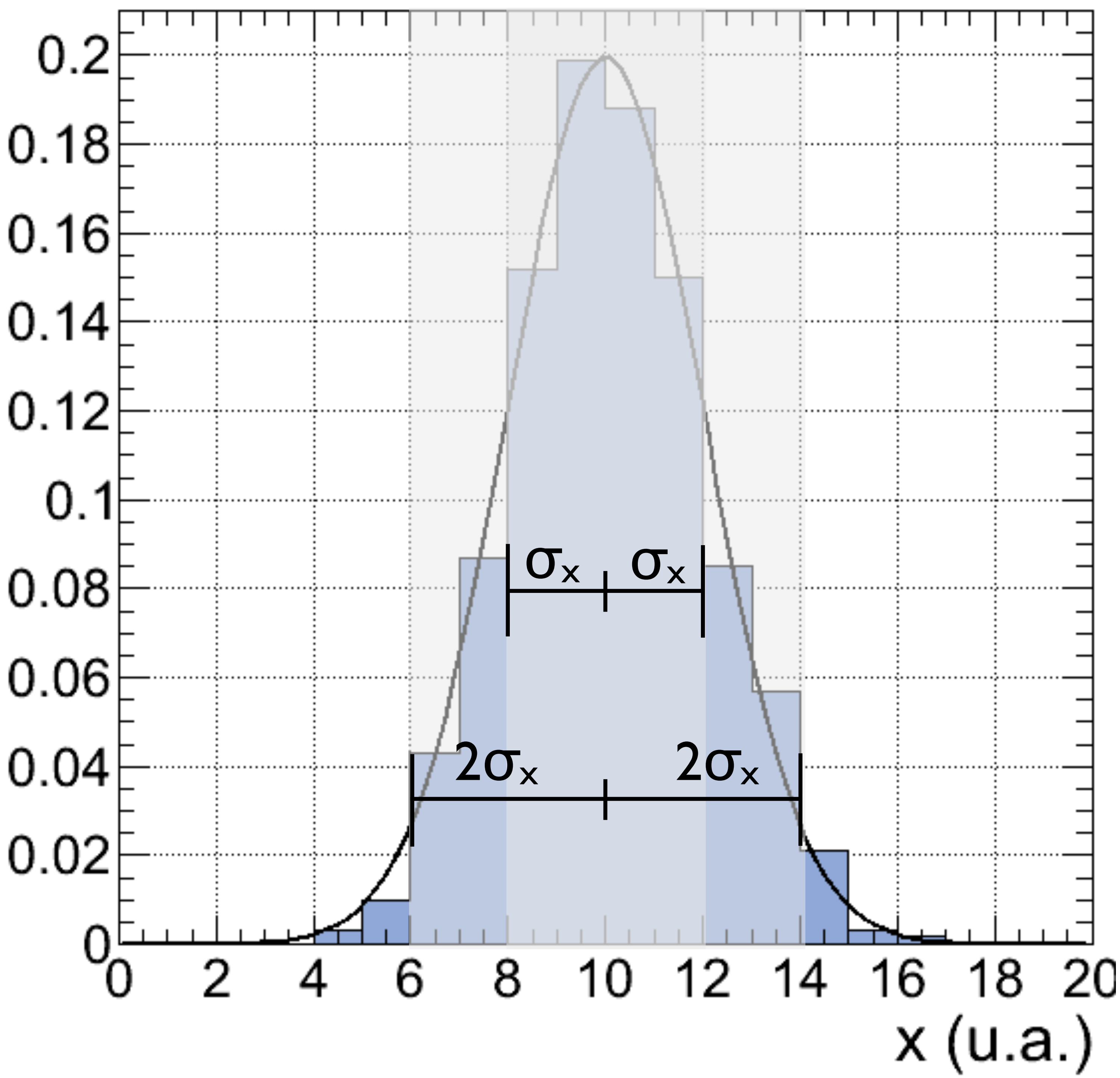
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



68,3% da área entre $(\mu - \sigma_x)$ e $(\mu + \sigma_x)$

95,5% da área entre $(\mu - 2\sigma_x)$ e $(\mu + 2\sigma_x)$

99,7% da área entre $(\mu - 3\sigma_x)$ e $(\mu + 3\sigma_x)$

...

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro (unidade)}}$

$\bar{x}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \pm \textit{erro (unidade)}}$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

As estimativas do valor esperado e de seu erro associado definem um intervalo ao qual atribuímos um *nível de confiança*, de que o intervalo contenha o valor esperado

Se considerarmos que as medidas se distribuem de acordo com uma distribuição de Gauss (Lei dos Erros), os valores dos níveis de confiança são determinados pela sua área correspondente.

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro} \; (\textit{unidade})}$$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Intervalo de Confiança	Nível de Confiança (cl)
$(\bar{x} - 0{,}67\,\sigma_{\bar{x}}\,,\ \bar{x} + 0{,}67\,\sigma_{\bar{x}})$	50,0 %
$(\bar{x} - 1{,}00\,\sigma_{\bar{x}}\,,\ \bar{x} + 1{,}00\,\sigma_{\bar{x}})$	68,3 %
$(\bar{x} - 1{,}65\,\sigma_{\bar{x}}\,,\ \bar{x} + 1{,}65\,\sigma_{\bar{x}})$	90,0 %
$(\bar{x} - 1{,}96\,\sigma_{\bar{x}}\,,\ \bar{x} + 1{,}96\,\sigma_{\bar{x}})$	95,0 %
$(\bar{x} - 2{,}00\,\sigma_{\bar{x}}\,,\ \bar{x} + 2{,}00\sigma_{\bar{x}})$	95,5 %
$(\bar{x} - 3{,}00\,\sigma_{\bar{x}}\,,\ \bar{x} + 3{,}00\,\sigma_{\bar{x}})$	99,7 %

Intervalo de confiança de 68,3%

Intervalo de confiança de 95,5%

Intervalo de confiança de 99,7%

Exercício (3.7.1): De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o erro padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos intervalos:

a) (14,18)

b) (12,16)

c) (18,20)

Exercício (3.7.1): De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o erro padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos intervalos:

a) (14,18)

b) (12,16)

c) (18,20)

a) (14,18) → (16 - 2, 16 + 2) → (16 - σ, 16 + σ)

→ Associamos ao intervalo o nível de confiança de aprox. 68,3%
Para um grande número de leituras, 68,3% delas estarão no intervalo (16 - σ, 16 + σ)

Exercício (3.7.1): De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o erro padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos intervalos:

a) (14,18)

b) (12,16)

c) (18,20)

a) (14,18) → (16 - 2, 16 + 2) → (16 - σ, 16 + σ)

→ Associamos ao intervalo o nível de confiança de aprox. 68,3% Para um grande número de leituras, 68,3% delas estarão no intervalo (16 - σ, 16 + σ)

b) (12,16) → (16 - 4, 16 + 0) → (16 - 2σ, 16 + 0σ)

→ Nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 2σ): 95,5% → O nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 0σ) será a metade: 47,75%

Exercício (3.7.1): De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o erro padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos intervalos:

a) (14,18)

b) (12,16)

c) (18,20)

a) (14,18) $\rightarrow$ (16 - 2, 16 + 2) $\rightarrow$ (16 - σ, 16 + σ)

$\rightarrow$ Associamos ao intervalo o nível de confiança de aprox. 68,3% Para um grande número de leituras, 68,3% delas estarão no intervalo (16 - σ, 16 + σ)

b) (12,16) $\rightarrow$ (16 - 4, 16 + 0) $\rightarrow$ (16 - 2σ, 16 + 0σ)

$\rightarrow$ Nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 2σ): 95,5% $\rightarrow$ O nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 0σ) será a metade: 47,75%

c) (18,20) $\rightarrow$ (16 + 1σ, 16 + 2σ)

$\rightarrow$ Nível de confiança: 95,5% / 2 - 68,3% / 2 = 13,6%

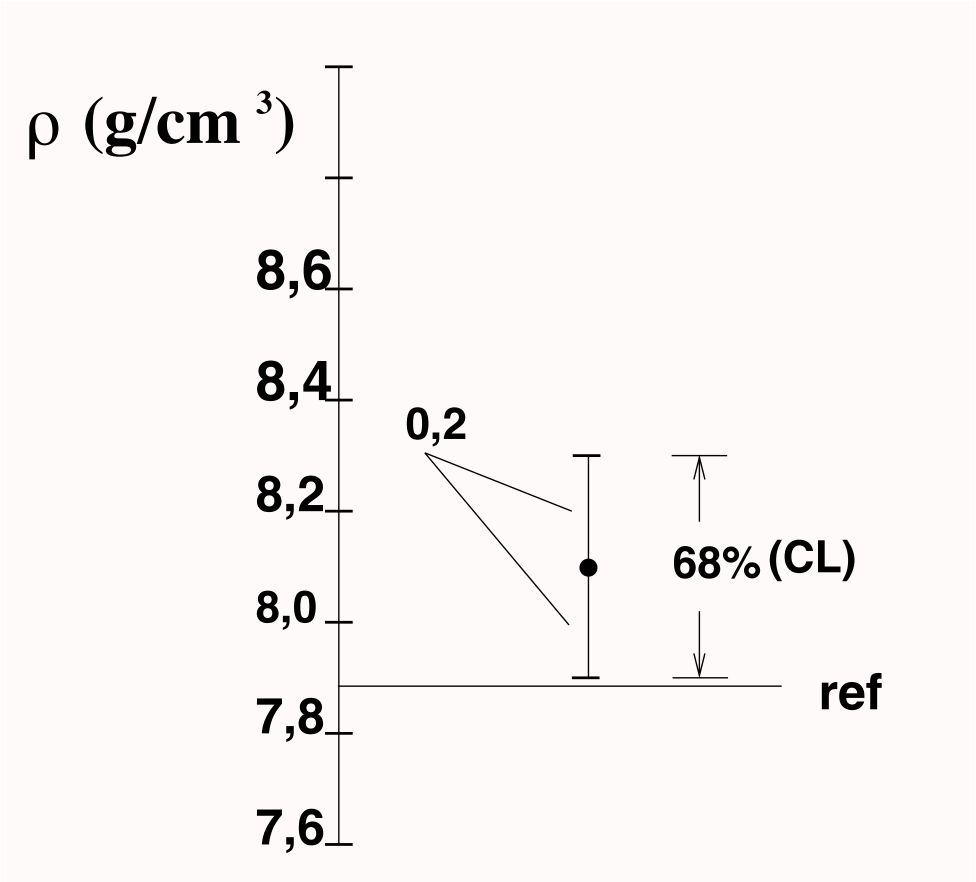
Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a **densidade do ferro**, com valor de referência $\rho_{ref} = 7{,}86\ g/cm^3$

Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a **densidade do ferro**, com valor de referência $\rho_{ref} = 7{,}86$ g/cm^3

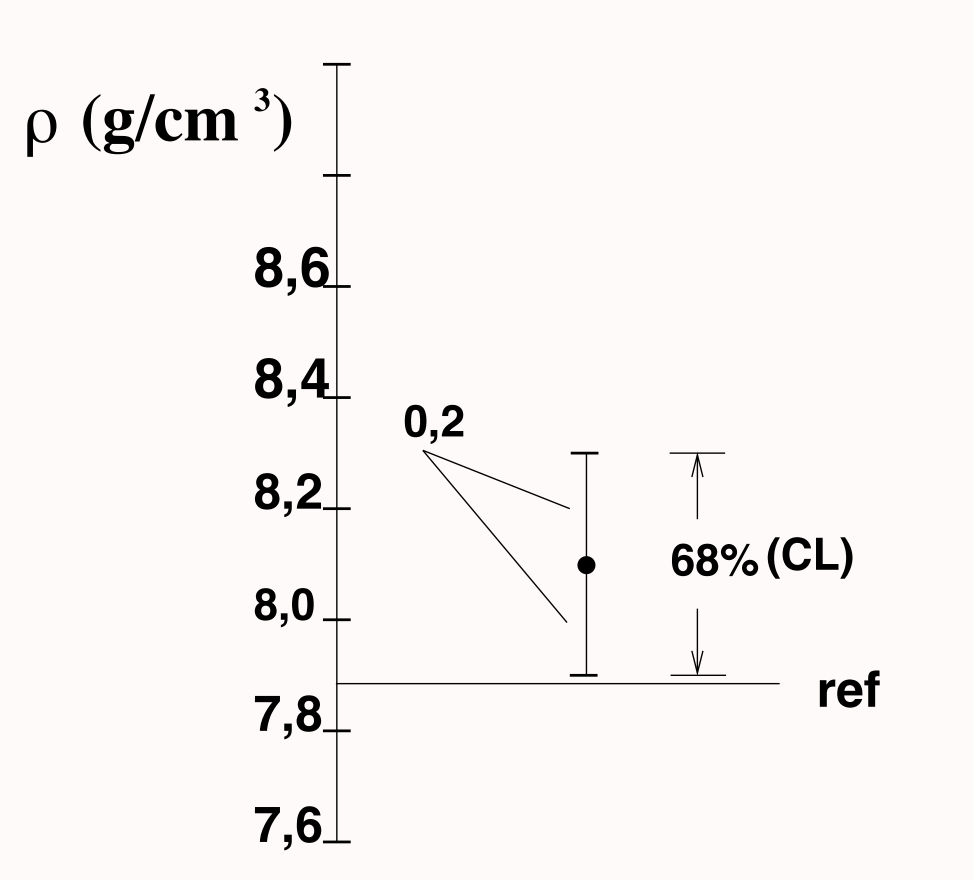
Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



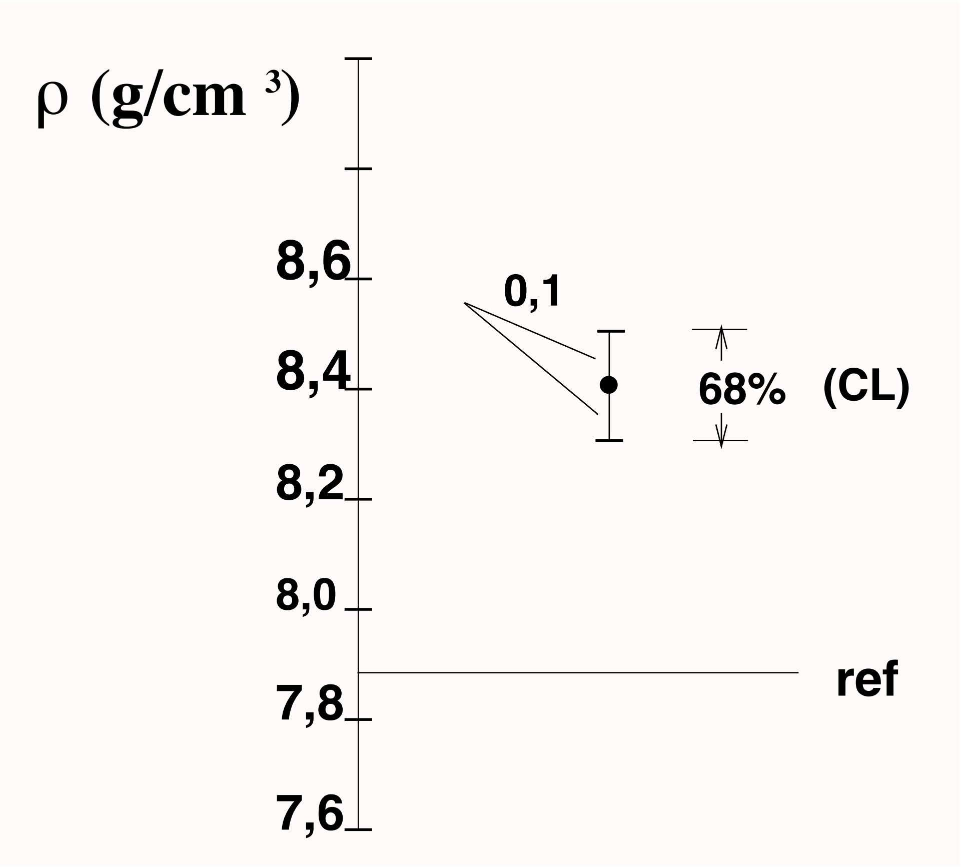
Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a **densidade do ferro**, com valor de referência $\rho_{ref} = 7{,}86\ g/cm^3$

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2\ g/cm^3$



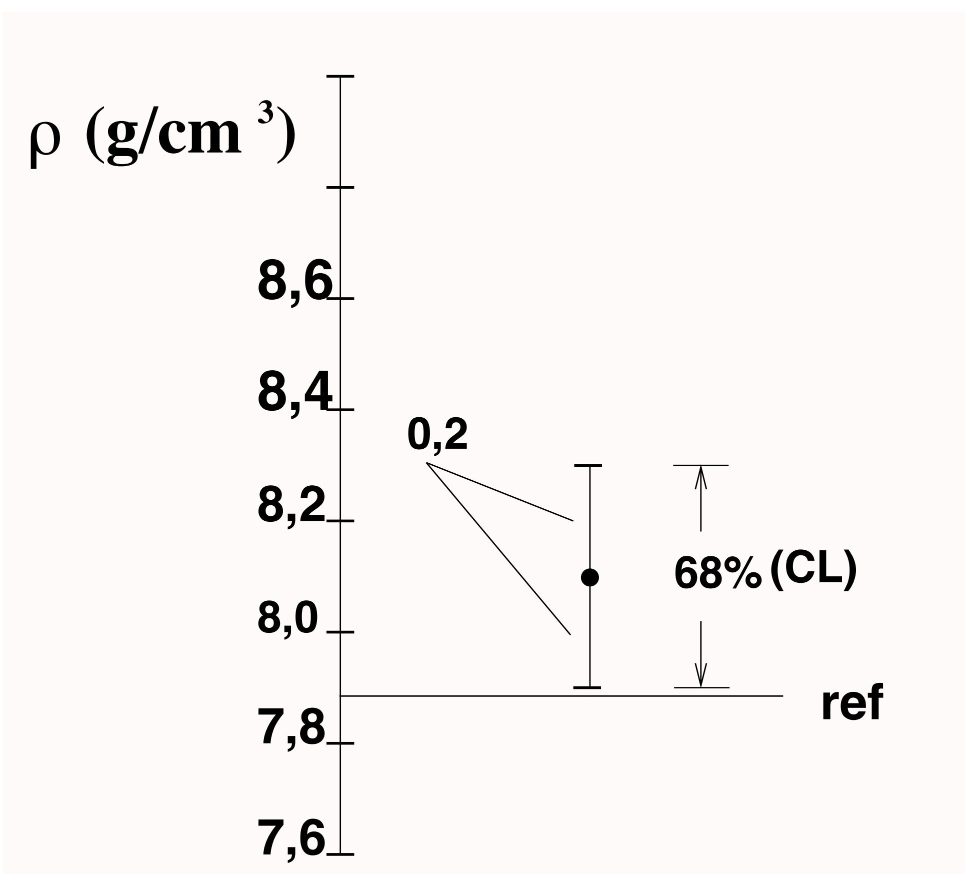
Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1\ g/cm^3$



Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

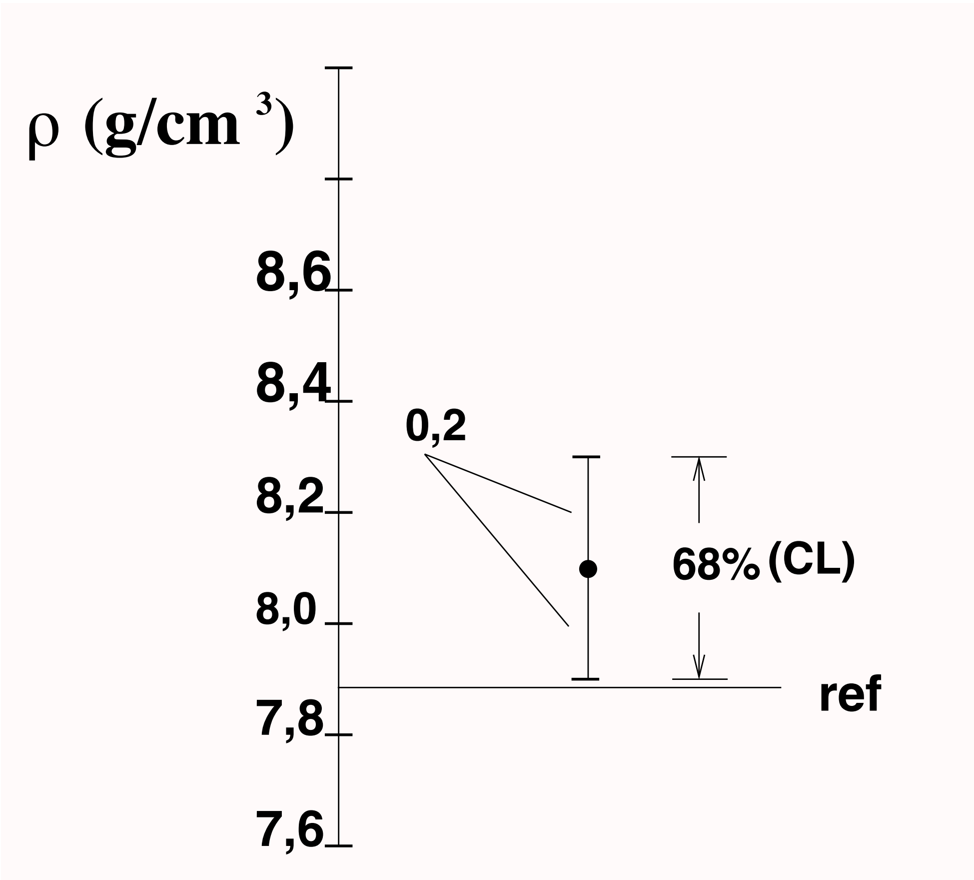
Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3

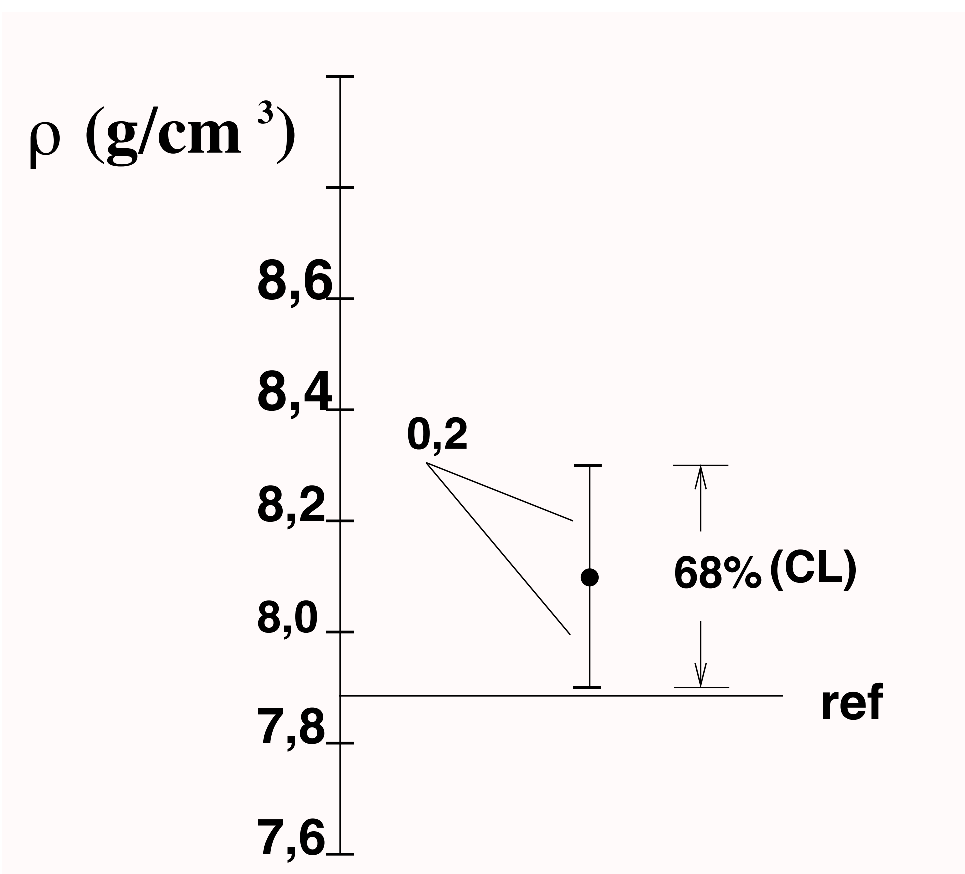


Discrepância
$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8{,}1 - 7{,}86 | = 0{,}24 \sim 1\sigma$

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



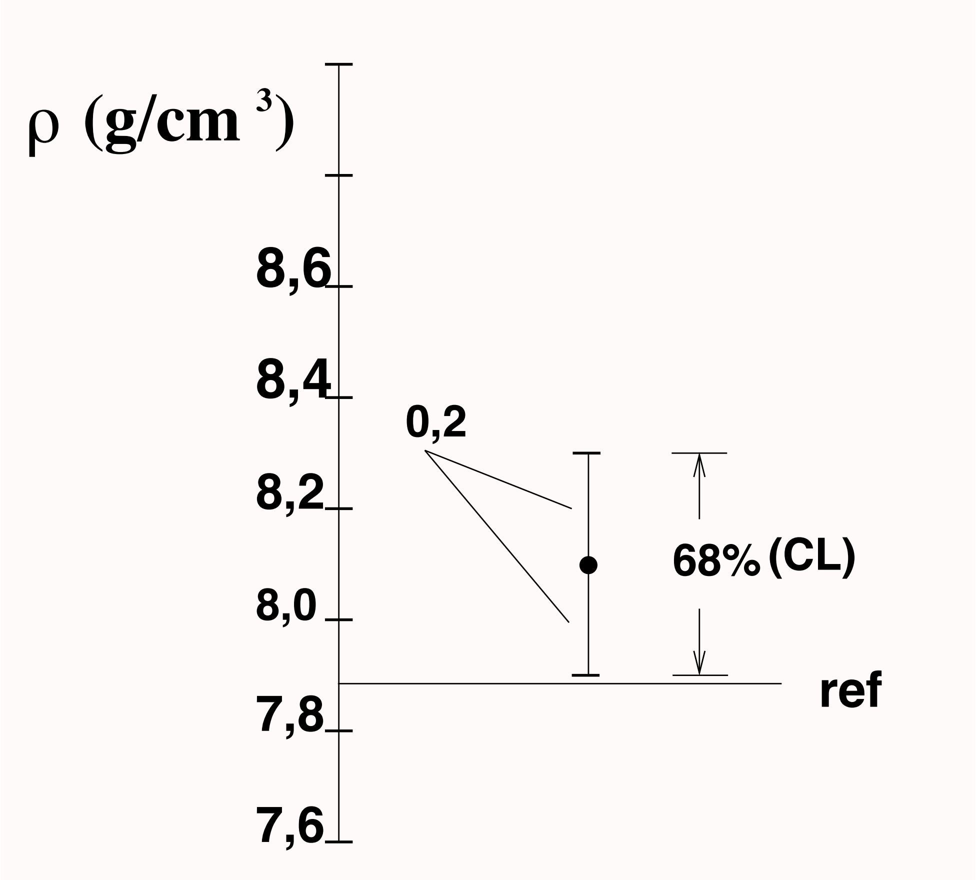
Discrepância
$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8{,}1 - 7{,}86 | = 0{,}24 \sim 1\sigma$

Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas ~68% de que o intervalo contenha o valor esperado

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2$ g/cm^3



Discrepância
$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8,1 - 7,86 | = 0,24 \sim 1\sigma$

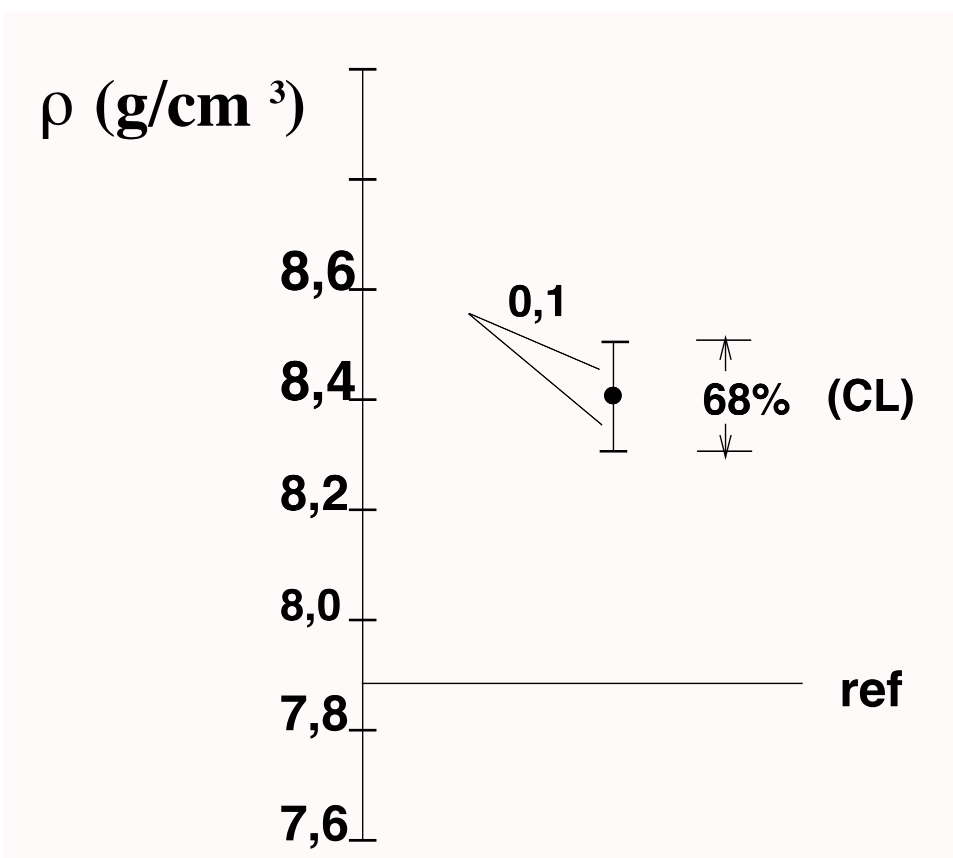
Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas ~68% de que o intervalo contenha o valor esperado

A discrepância não é *estatisticamente significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

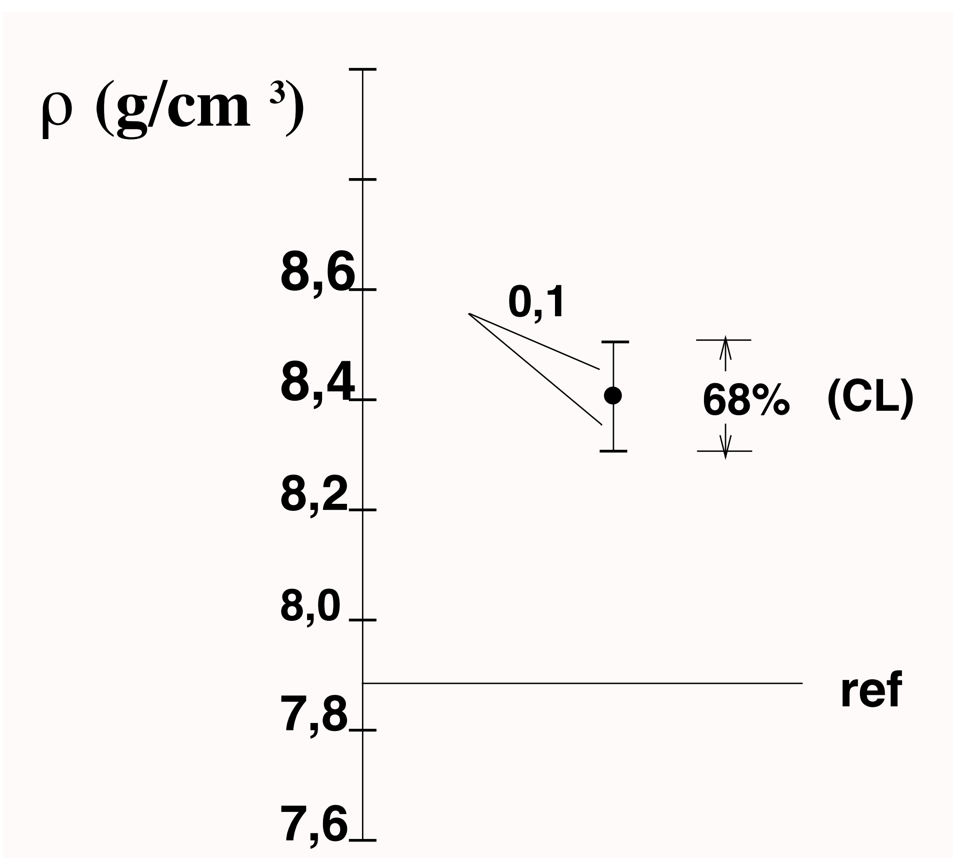
Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1$ g/cm^3

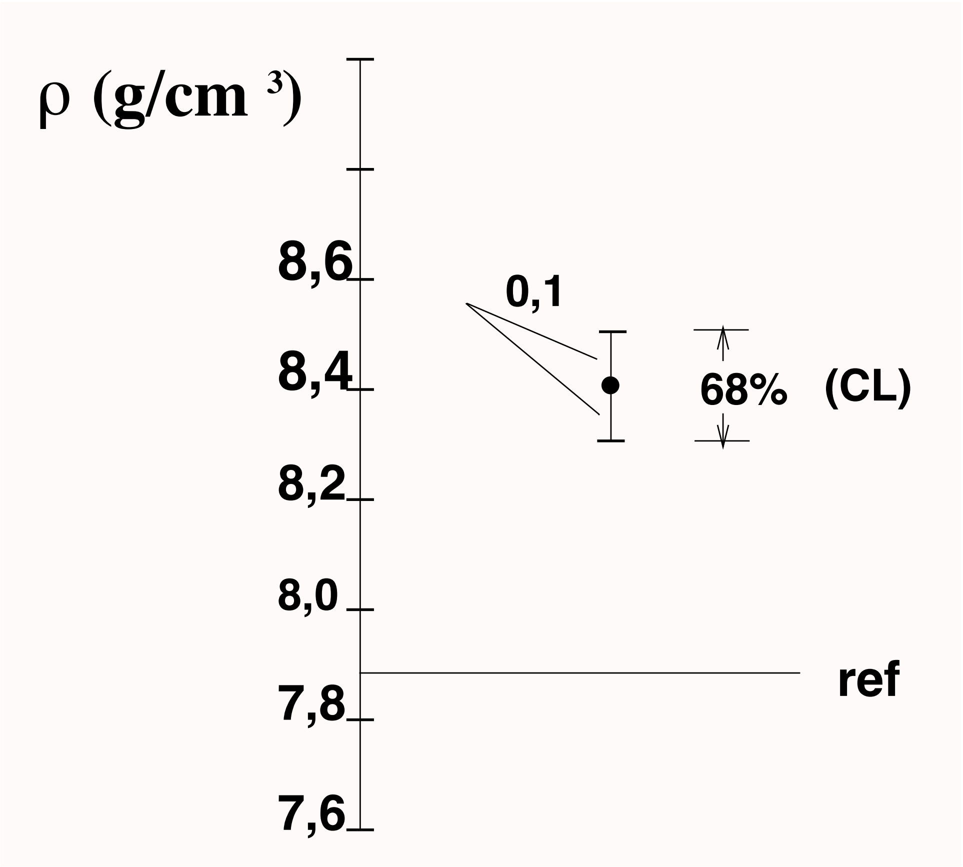


Discrepância
$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8,4 - 7,86 | = 0,54 > 3\sigma$

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



Discrepância
$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8{,}4 - 7{,}86 | = 0{,}54 > 3\sigma$

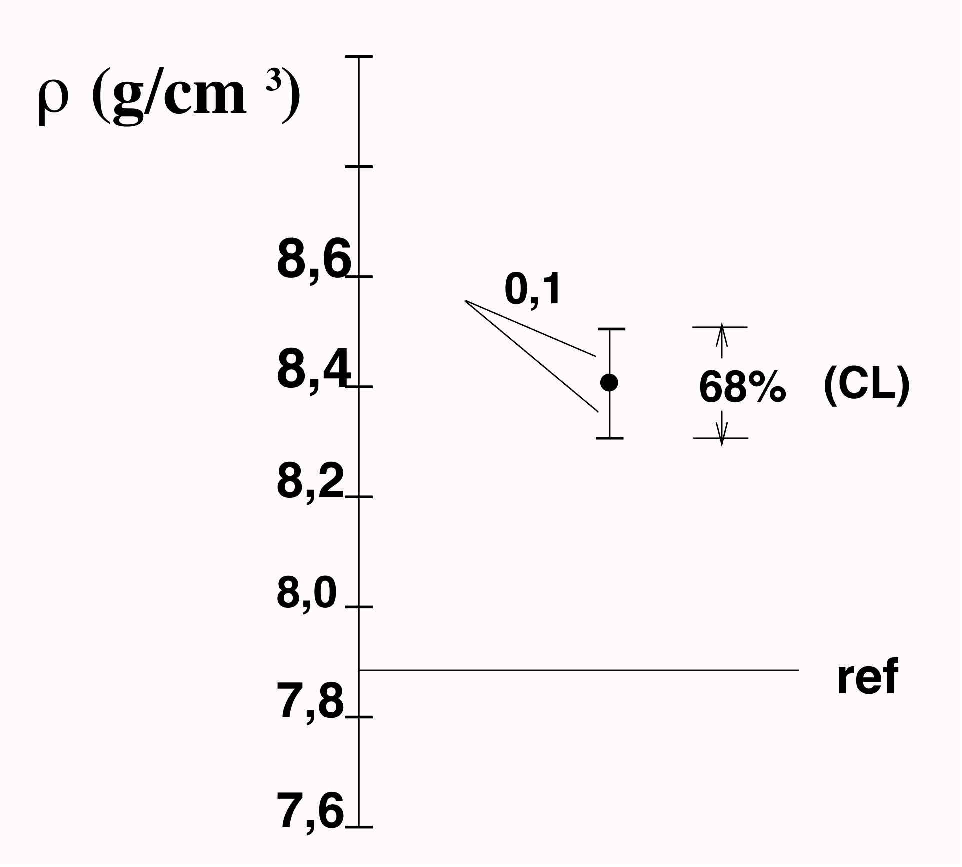
99,7% (CL)

Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável (< 1%) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



Discrepância
$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8{,}4 - 7{,}86 | = 0{,}54 > 3\sigma$

99,7% (CL)

Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável (< 1%) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Regra prática: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Inconclusivo}$$

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1{,}72 \pm 0{,}04) \,.\, 10^{-19}\ C$$
$$e_2 = (1{,}75 \pm 0{,}07) \,.\, 10^{-19}\ C$$
$$e_3 = (1{,}62 \pm 0{,}03) \,.\, 10^{-19}\ C$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron: $1{,}60217733(49) \,.\, 10^{-19}$ C

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1{,}72 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-19}\ C$$
$$e_2 = (1{,}75 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-19}\ C$$
$$e_3 = (1{,}62 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-19}\ C$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron: $1{,}60217733(49) \cdot 10^{-19}$ C

i) Discrepância para e_1: $|1{,}72 - 1{,}60217733| \cdot 10^{-19}\ C = 0{,}12 \cdot 10^{-19}\ C$

$\rightarrow |\, e_1 - e_{ref} \,| \sim 3\sigma$ ($\sigma = 0.04 \cdot 10^{-19}$ C)

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1{,}72 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-19}\ C$$
$$e_2 = (1{,}75 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-19}\ C$$
$$e_3 = (1{,}62 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-19}\ C$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron: $1{,}60217733(49) \cdot 10^{-19}$ C

i) Discrepância para e_1: $|1{,}72 - 1{,}60217733| \cdot 10^{-19}\ C = 0{,}12 \cdot 10^{-19}\ C$

$\rightarrow |\ e_1 - e_{ref}\ | \sim 3\sigma$ $(\sigma = 0.04 \cdot 10^{-19}\ C)$

ii) Discrepância para e_2: $|1{,}75 - 1{,}60217733| \cdot 10^{-19}\ C = 0{,}15 \cdot 10^{-19}\ C$

$\rightarrow 2\sigma < |\ e_2 - e_{ref}\ | < 3\sigma$ $(\sigma = 0.07 \cdot 10^{-19}\ C)$

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1{,}72 \pm 0{,}04) \,.\, 10^{-19}\ C$$
$$e_2 = (1{,}75 \pm 0{,}07) \,.\, 10^{-19}\ C$$
$$e_3 = (1{,}62 \pm 0{,}03) \,.\, 10^{-19}\ C$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron: 1,60217733(49) . 10^{-19} C

i) Discrepância para e_1: $|1{,}72 - 1{,}60217733| \,.\, 10^{-19}\ C = 0{,}12 \,.\, 10^{-19}\ C$

$\rightarrow |\, e_1 - e_{ref} \,| \sim 3\sigma$ ($\sigma = 0.04 \,.\, 10^{-19}\ C$)

ii) Discrepância para e_2: $|1{,}75 - 1{,}60217733| \,.\, 10^{-19}\ C = 0{,}15 \,.\, 10^{-19}\ C$

$\rightarrow 2\sigma < |\, e_2 - e_{ref} \,| < 3\sigma$ ($\sigma = 0.07 \,.\, 10^{-19}\ C$)

iii) Discrepância para e_3: $|1{,}62 - 1{,}60217733| \,.\, 10^{-19}\ C = 0{,}02 \,.\, 10^{-19}\ C$

$\rightarrow |\, e_3 - e_{ref} \,| < 1\sigma$ ($\sigma = 0.03 \,.\, 10^{-19}\ C$)

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1{,}9;\ 1{,}9;\ 1{,}8;\ 2{,}0;\ 1{,}9\}\ (\mathrm{g/cm^3})$$

a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido

b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de 1,8524(4) $\mathrm{g/cm^3}$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1{,}9;\ 1{,}9;\ 1{,}8;\ 2{,}0;\ 1{,}9\}\ (\mathrm{g/cm^3})$$

a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido

b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de 1,8524(4) g/cm^3

a) Estimativa para o valor esperado:

→ Média: 1,9000

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9} (g/cm^3)

a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido

b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de 1,8524(4) g/cm^3

a) Estimativa para o valor esperado:

→ Média: 1,9000

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Estimativa padrão para a incerteza:

→ Erro padrão: 0,0316228

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1,9;\ 1,9;\ 1,8;\ 2,0;\ 1,9\}\ (\text{g/cm}^3)$$

a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido

b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de 1,8524(4) g/cm^3

a) Estimativa para o valor esperado:

→ Média: 1,9000

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Estimativa padrão para a incerteza:

→ Erro padrão: 0,0316228

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$(1,90 \pm 0,03)\ (\text{g/cm}^3)$$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1,9;\ 1,9;\ 1,8;\ 2,0;\ 1,9\}\ (g/cm^3)$$

a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido

b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de 1,8524(4) g/cm^3

b) Discrepância entre (1,90 ± 0,03) (g/cm^3) e o valor de referência 1,8524(4) g/cm^3:

$$| d_1 - d_{ref} | = |1,90 - 1,8524 |\ g/cm^3 = 0,0476\ g/cm^3$$

$$\rightarrow | d_1 - d_{ref} | \sim 1,5\sigma \quad (\sigma = 0,03\ g/cm^3)$$

→ Discrepância menor que 2σ. Podemos dizer que há compatibilidade entre a medição e o valor de referência

Exercício (3.7.10): Um estudante apresenta como estimativa padrão da medição da aceleração local da gravidade o resultado:

$$g = (9{,}5 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m/s^2}$$

Se o valor de referência é 9,78791660(15) $\mathrm{m/s^2}$, analise o resultado.

Exercício (3.7.10): Um estudante apresenta como estimativa padrão da medição da aceleração local da gravidade o resultado:

$$g = (9{,}5 \pm 0{,}1)\ m/s^2$$

Se o valor de referência é 9,78791660(15) m/s^2, analise o resultado.

i) Discrepância entre $g = (9{,}5 \pm 0{,}1)\ m/s^2$ e o valor de referência 9,78791660 m/s^2:

$$| g_1 - g_{ref} | = 0{,}287916\ m/s^2$$

$\rightarrow | g_1 - g_{ref} | \sim 2{,}8\sigma$ ($\sigma = 0{,}1\ m/s^2$)

$\rightarrow$ Discrepância maior que 2σ e menor que 3σ. Não há compatibilidade entre a medição e o valor de referência. Podemos dizer que o experimento é inconclusivo.

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

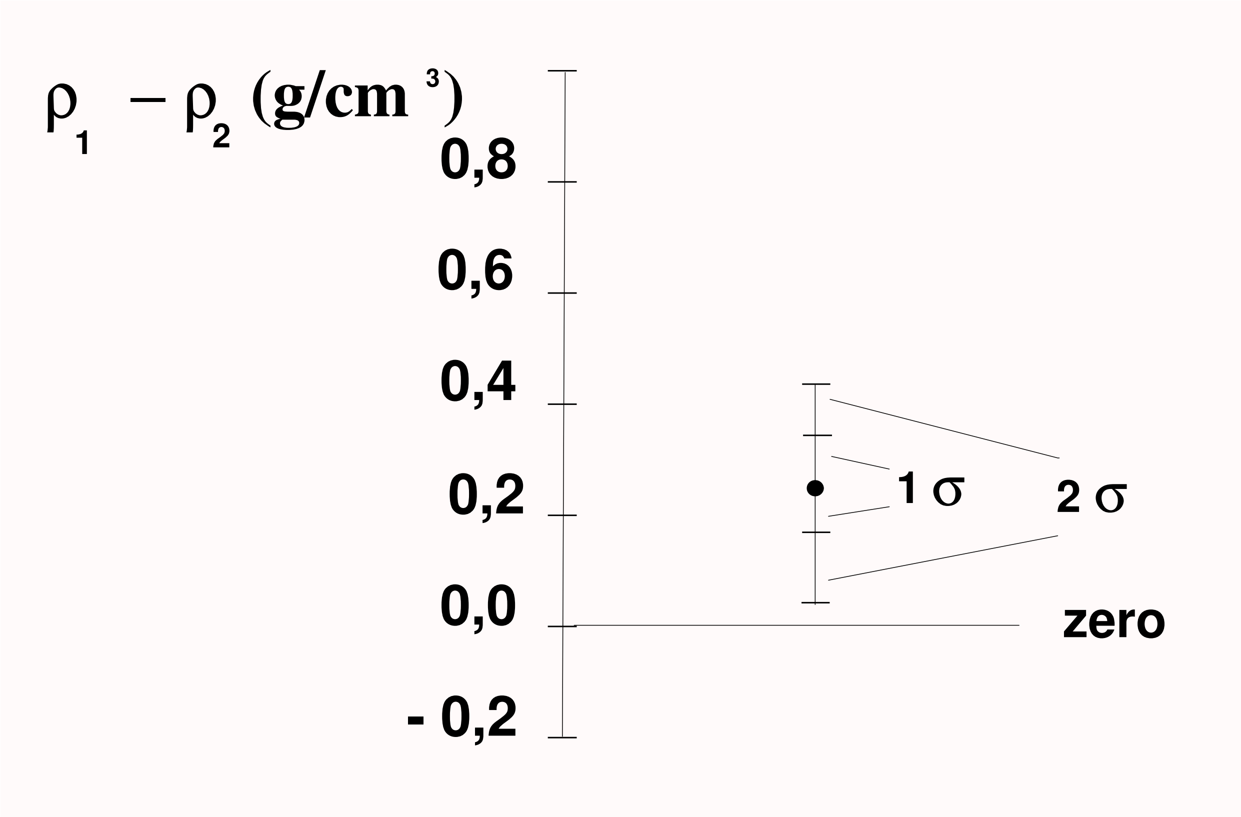
Discrepância: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Erro associado: $\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

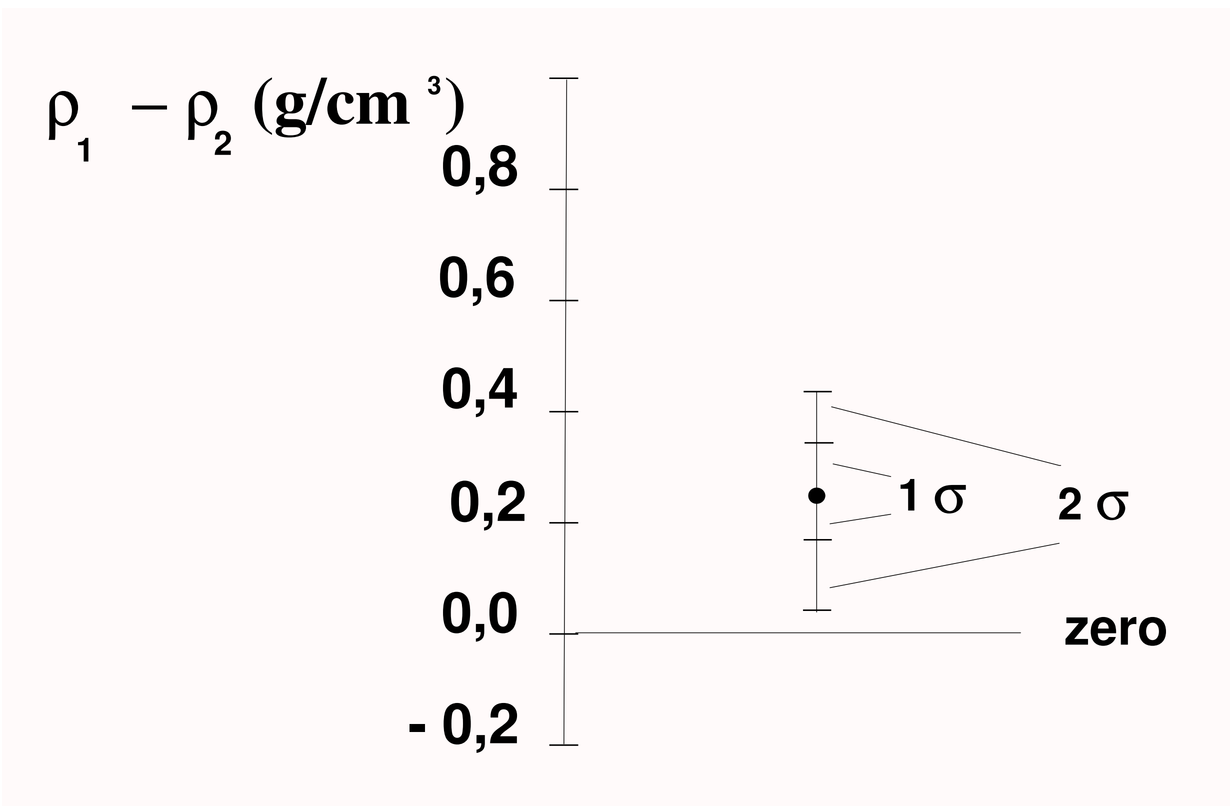
Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3



Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

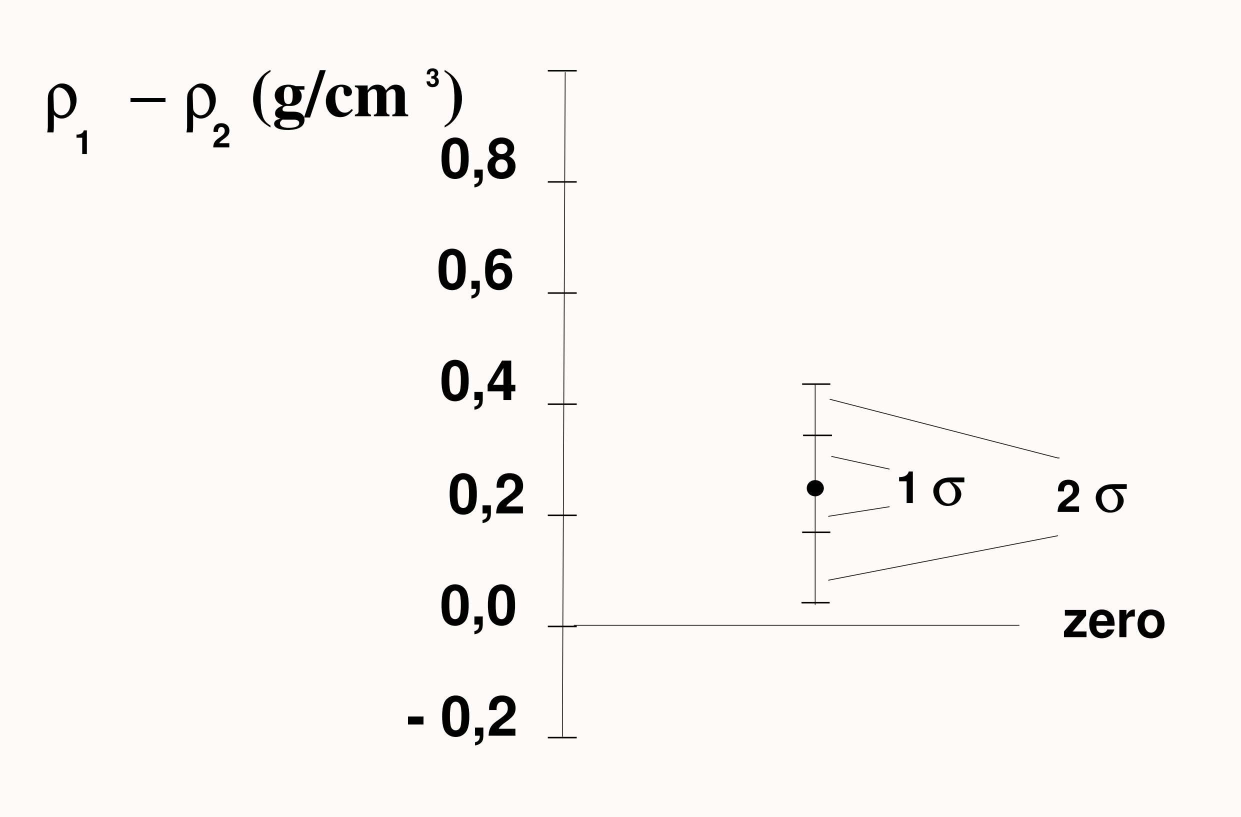
Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

As estimativas são compatíveis *entre si* (discrepância < 2σ)

Exercício (3.7.6): Dois experimentos anunciam a descoberta de uma nova partícula, com a medição da massa apresentada, com nível de confiança de 68%, por :

$$m_1 = (7{,}8 \pm 0{,}2) \;.\; 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_2 = (7{,}0 \pm 0{,}3) \;.\; 10^{-27}\ \text{kg}$$

Esses valores podem representar a massa de uma mesma partícula?

Exercício (3.7.6): Dois experimentos anunciam a descoberta de uma nova partícula, com a medição da massa apresentada, com nível de confiança de 68%, por :

$$m_1 = (7,8 \pm 0,2) \;.\; 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_2 = (7,0 \pm 0,3) \;.\; 10^{-27}\ \text{kg}$$

Esses valores podem representar a massa de uma mesma partícula?

i) Erro associado entre m_1 e m_2: $\sigma = 0,4 \;.\; 10^{-27}$ kg $\qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}$

Exercício (3.7.6): Dois experimentos anunciam a descoberta de uma nova partícula, com a medição da massa apresentada, com nível de confiança de 68%, por :

$$m_1 = (7{,}8 \pm 0{,}2) \,.\, 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_2 = (7{,}0 \pm 0{,}3) \,.\, 10^{-27}\ \text{kg}$$

Esses valores podem representar a massa de uma mesma partícula?

i) Erro associado entre m_1 e m_2: $\sigma = 0{,}4 \,.\, 10^{-27}$ kg $\quad \sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

ii) Discrepância entre m_1 e m_2: $|7{,}8 - 7{,}0| \,.\, 10^{-27}$ kg $= 0{,}8 \,.\, 10^{-27}$ kg

→ $|\ m_1 - m_2\ | = 2\sigma$

→ Discrepância no nível de 2σ. Podemos dizer que o experimento é inconclusivo

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial (E_i) e final (E_f) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3)\ \text{MeV}$$
$$E_f = (60 \pm 9)\ \text{MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial (E_i) e final (E_f) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3) \text{ MeV}$$
$$E_f = (60 \pm 9) \text{ MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

i) Erro associado entre E_i e E_f:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

$\sigma = 9{,}4868 \text{ MeV} \rightarrow 9 \text{ MeV}$

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial (E_i) e final (E_f) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3)\ \text{MeV}$$
$$E_f = (60 \pm 9)\ \text{MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

i) Erro associado entre E_i e E_f:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}$$

σ = 9,4868 MeV → 9 MeV

ii) Discrepância entre E_i e E_f: |75 - 60| MeV = 15 MeV

→ $| E_i - E_f | \sim 1{,}6\sigma < 2\sigma$

→ Discrepância menor que 2σ. Podemos dizer que há compatibilidade entre as medições das energias inicial e final na reação

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Média ponderada pelo erro: medições com maior precisão valem mais.

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Média ponderada pelo erro: medições com maior precisão valem mais.

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):

ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0{,}2)^2} + \frac{1}{(0{,}1)^2}}} = 0,08944$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 $\quad$ ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0{,}2)^2} + \frac{1}{(0{,}1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

$$\Rightarrow \rho = (8,34 \pm 0,09)\ \text{g/cm}^3$$

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179{,}0 \pm 5{,}1)\ \mathrm{GeV}/c^2$$
$$m_t(CDF) = (176{,}1 \pm 6{,}6)\ \mathrm{GeV}/c^2$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179{,}0 \pm 5{,}1)\ \mathrm{GeV/c^2}$$

$$m_t(CDF) = (176{,}1 \pm 6{,}6)\ \mathrm{GeV/c^2}$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

i) Erro padrão da combinação de $m_t(D0)$ e $m_t(CDF)$:

$\sigma = 4{,}03555\ \mathrm{GeV/c^2}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179{,}0 \pm 5{,}1)\ \text{GeV/c}^2$$
$$m_t(CDF) = (176{,}1 \pm 6{,}6)\ \text{GeV/c}^2$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

i) Erro padrão da combinação de $m_t(D0)$ e $m_t(CDF)$:

$\sigma = 4{,}03555$ GeV/c^2

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

ii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação de $m_t(D0)$ e $m_t(CDF)$:

$m_t = 177{,}916$ GeV/c^2

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179{,}0 \pm 5{,}1)\ \mathrm{GeV/c^2}$$
$$m_t(CDF) = (176{,}1 \pm 6{,}6)\ \mathrm{GeV/c^2}$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

i) Erro padrão da combinação de $m_t(D0)$ e $m_t(CDF)$:

$\sigma = 4{,}03555\ \mathrm{GeV/c^2}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

ii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação de $m_t(D0)$ e $m_t(CDF)$:

$m_t = 177{,}916\ \mathrm{GeV/c^2}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$m_t = (177{,}9 \pm 4{,}0)\ (\mathrm{GeV/c^2})$$

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da *f.e.m.* de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$x = 1{,}022\,V \quad \sigma_x = 0{,}01\,V$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$x = 1{,}018\,V \quad \sigma_x = 0{,}004\,V$$

Determine a estimativa para *f.e.m.* da pilha resultante da combinação das duas amostras.

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da *f.e.m.* de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$x = 1{,}022\,\text{V} \quad \sigma_x = 0{,}01\,\text{V}$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$x = 1{,}018\,\text{V} \quad \sigma_x = 0{,}004\,\text{V}$$

Determine a estimativa para *f.e.m.* da pilha resultante da combinação das duas amostras.

i) Os erros padrão de cada medida são:

$\sigma_1 = \sigma_x/\sqrt{N\text{-}1} = 0{,}001601\,\text{V}$

$\sigma_2 = \sigma_x/\sqrt{N\text{-}1} = 0{,}001333\,\text{V}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

ii) Erro padrão da combinação:

$\sigma = 0{,}001025\,\text{V}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da f.e.m. de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$x = 1{,}022\,V \quad \sigma_x = 0{,}01\,V$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$x = 1{,}018\,V \quad \sigma_x = 0{,}004\,V$$

Determine a estimativa para f.e.m. da pilha resultante da combinação das duas amostras.

iii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação:

f.e.m. = 1,01964 V

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

f.e.m. = (1,020 ± 0,001) (V)