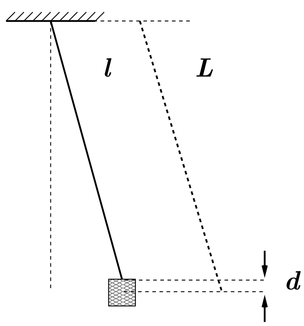
Determinação da aceleração da gravidade usando um pêndulo simples

Nesta prática, explora-se a dependência entre o comprimento e o período de um pêndulo simples para se exercitar a técnica de ajuste de funções a conjuntos de pares de variáveis relacionadas por uma dependência funcional. O objetivo final é obter uma estimativa da aceleração da gravidade g e de sua incerteza σ_g, via ajuste linear dos dados obtidos para o pêndulo.

O pêndulo simples

Um pêndulo simples consiste de um peso suspenso por um fio de comprimento l cuja outra extremidade encontra-se fixa a algum ponto, conforme ilustrado na figura abaixo.



Para pequenos ângulos ($< 10°$) do fio em relação à normal, a seguinte relação entre o período T e a distância L que separa o ponto de fixação do centro de gravidade do peso suspenso é válida:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Longrightarrow \quad L = g\frac{T^2}{4\pi^2}$$

Ajuste linear aplicado ao pêndulo simples

Observe que, em um pêndulo simples, as duas grandezas diretamente mensuráveis são o comprimento (l) e o período (T). Como avaliar a grandeza desejada, a aceleração da gravidade $\boldsymbol{g}$, e sua correspondente incerteza $\sigma_{\mathbf{g}}$, a partir de um conjunto de medidas $\{l_i, T_i\}$ destas grandezas?

Reescrevendo de forma conveniente a equação do pêndulo, podemos fazer uma associação à equação de uma reta.

$$L = l + d \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l = g\left(\tfrac{T}{2\pi}\right)^2 - d}$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{aligned} l &\Longrightarrow y\,, \qquad & \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 &\Longrightarrow x \\ g &\Longrightarrow a\,, \qquad & -d &\Longrightarrow b \end{aligned}$$

Desta maneira, a estimativa dos coeficientes angular (a) e linear (b) é dada pelas relações:

$$a = g = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i - \sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{k=1}^{N} y_k}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{j=1}^{N} x_j)^2}, \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

e suas incertezas (σ_g) e (σ_b) por:

$$\sigma_a = \sigma_g = \frac{1}{\sigma_x}\frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}}, \qquad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - (a.x_i + b)]^2}{N-2}}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\frac{N}{N-2}\left(\sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right)} = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{N-2}(1 - r^2)}$$

Experiência com o Pêndulo

- Montar um pêndulo, usando o peso de 20 gf.
- Realizar pelo menos 5 baterias de medidas, variando o comprimento do fio no intervalo de 50-120cm.
- Fazer em cada bateria uma medida de tempo para 20 períodos do pêndulo.
- Estimar o valor da aceleraçãode gravidade g e da sua incerteza σ_g. (*)
- Verificar a compatibilidade com o valor de referência ($g_{ref} = 9.78789849(14)$ m/s^2). (*)
- Calcular o erro relativo σ_g/g.(*)

Sugestão para a realização do relatório

- Título da experiência.
- Objetivo da experiência. *O quê que vai ser medido e comparado?*
- Descrição da experiência. *Incluir desenho esquematizado da montagem e outros detalhes do procedimento antes e durante a toma de dados.*
- Cálculos, incluindo **tabelas de dados** e indicação dos cálculos parciais. Para os cálculos relativos ao ajuste linear, recomenda-se que seja criada uma tabela com uma coluna correspondente a cada variável que aparecer em somatórios nas equações do ajuste pelo método de mínimos quadrados. Por exemplo:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \times y_i$	$(y_i - (a\,x_i + b))$	$(y_i - (a\,x_i + b))^2$

- Resultados, anàlise (*incluindo uma discussão do valor, erro e compatibilidade com a referência. (*)*) e conclusões.