

Física Geral - Laboratório (2015/2)

Organização e descrição de dados
...continuação



Física Geral - 2015/2

Bibliografia:



“Estimativas e Erros em Experimentos de Física”
(EdUERJ)

Dados e medidas

Dados: Valores ou qualificações de atributos dos elementos de um conjunto

Medidas: Dados numéricos associados a grandezas que descrevem um fenômeno ou sistema físico

Dados brutos

Exemplo de conjunto de dados:

1) Valores das idades de um grupo de estudantes de Física Geral

Estudante 1: 18 anos

Estudante 2: 19 anos

Estudante 3: 18 anos

Unidade: Anos

Dados brutos

Exemplo de conjunto de dados:

2) Valores das massas de um grupo de estudantes de Física Geral

Estudante 1: 60,2 Kg

Estudante 2: 72,4 Kg

Estudante 3: 65,6 Kg

Unidade: Quilograma (Kg)

Dados brutos

Exemplo de conjunto de dados:

3) Valores das alturas de um grupo de estudantes de Física Geral

Estudante 1: 172 cm

Estudante 2: 168 cm

Estudante 3: 180 cm

Unidade: Centímetro (cm)

Dados e medidas

Representação do conjunto de dados:

Idades dos estudantes = {18; 19; 18} (anos)

Massas dos estudantes = {60,2; 72,4; 65,6} (Kg)

Alturas dos estudantes = {172; 168; 180} (cm)

Em geral:

$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\} = \{\text{valor n}^\circ 1, \text{valor n}^\circ 2, \text{valor n}^\circ 3, \dots, \text{valor n}^\circ \text{'N'}\}$

Dados e medidas

Outros exemplos:

Medidas do comprimento de uma mesa:

$\{150,3; 152,0; 150,4; 151,8\}$ (cm)

Medidas de temperatura de uma sala:

$\{29,3; 28,6; 30,4\}$ ($^{\circ}\text{C}$)

Medidas da tensão da rede elétrica:

$\{115,2; 124,5; 128,3; 121,1\}$ (V)

Tipo sanguíneo dos estudantes de FG:

$\{\text{'O-'; 'A-'; 'O+'}\}$

Organizando um conjunto de dados: Tabelas

Tabelas: arranjos, ordenados ou não, de dados

Estudante de FG	Idade (anos)	Massa (Kg)	Altura (cm)
1	18	60,2	172
2	19	72,4	168
3	18	65,6	180

Mesa	Comprimento (cm)
1	150,3
2	152,0
3	150,4
4	151,8

Organizando um conjunto de dados: Classes e Histogramas

Classes: Intervalos em que um conjunto de dados é agrupado

Histogramas: Número de ocorrências ou frequência das classes de agrupamento de um conjunto de dados

- Passo n° 1: Definir classes de agrupamento de dados
- Passo n° 2: Computar frequências para cada classe de dados
- Passo n° 3: Representar graficamente frequências em forma de histogramas

Que tamanho de intervalo devemos usar para cada classe de frequência?

Organizando um conjunto de dados: Classes e Histogramas

Classes: Intervalos em que um conjunto de dados é agrupado

Histogramas: Número de ocorrências ou frequência das classes de agrupamento de um conjunto de dados

Exemplo:

Um conjunto maior de dados (idades): {10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

24 elementos



Organizando um conjunto de dados: Classes e Histogramas

Um conjunto maior de dados (idades): {10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Escolha 1:

Classe de idades (anos)	Frequências
6	1
7	3
8	3
9	3
10	6
11	1
12	3
13	1
14	2
15	1

Escolha 2:

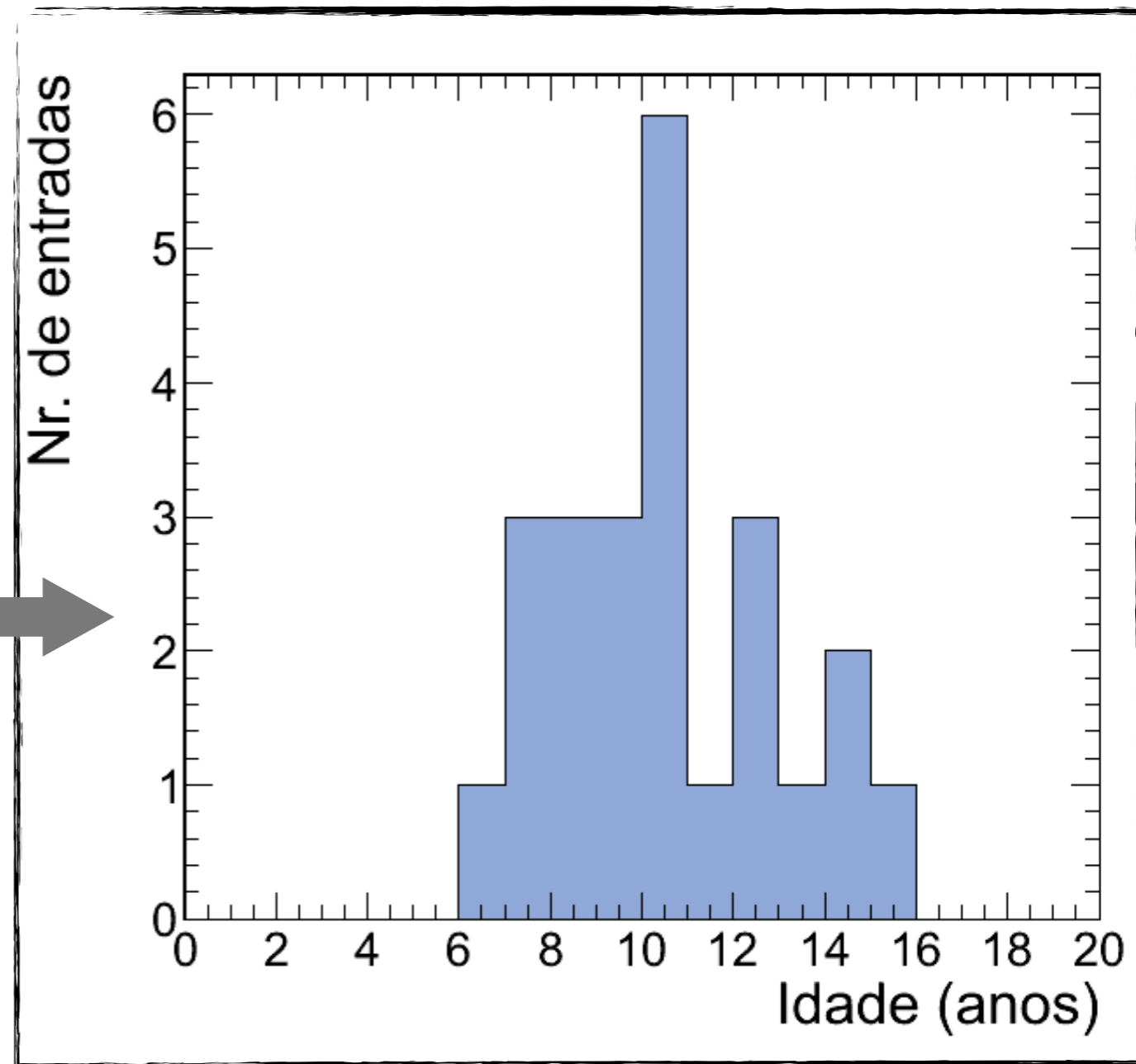
Classe de idades (anos)	Frequência
[6 - 8)	4
[8 - 10)	6
[10 - 12)	7
[12 - 14)	4
[14 - 16)	3

Organizando um conjunto de dados: Classes e Histogramas

Conjunto de idades:

{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Classe de idades (anos)	Frequências
6	1
7	3
8	3
9	3
10	6
11	1
12	3
13	1
14	2
15	1

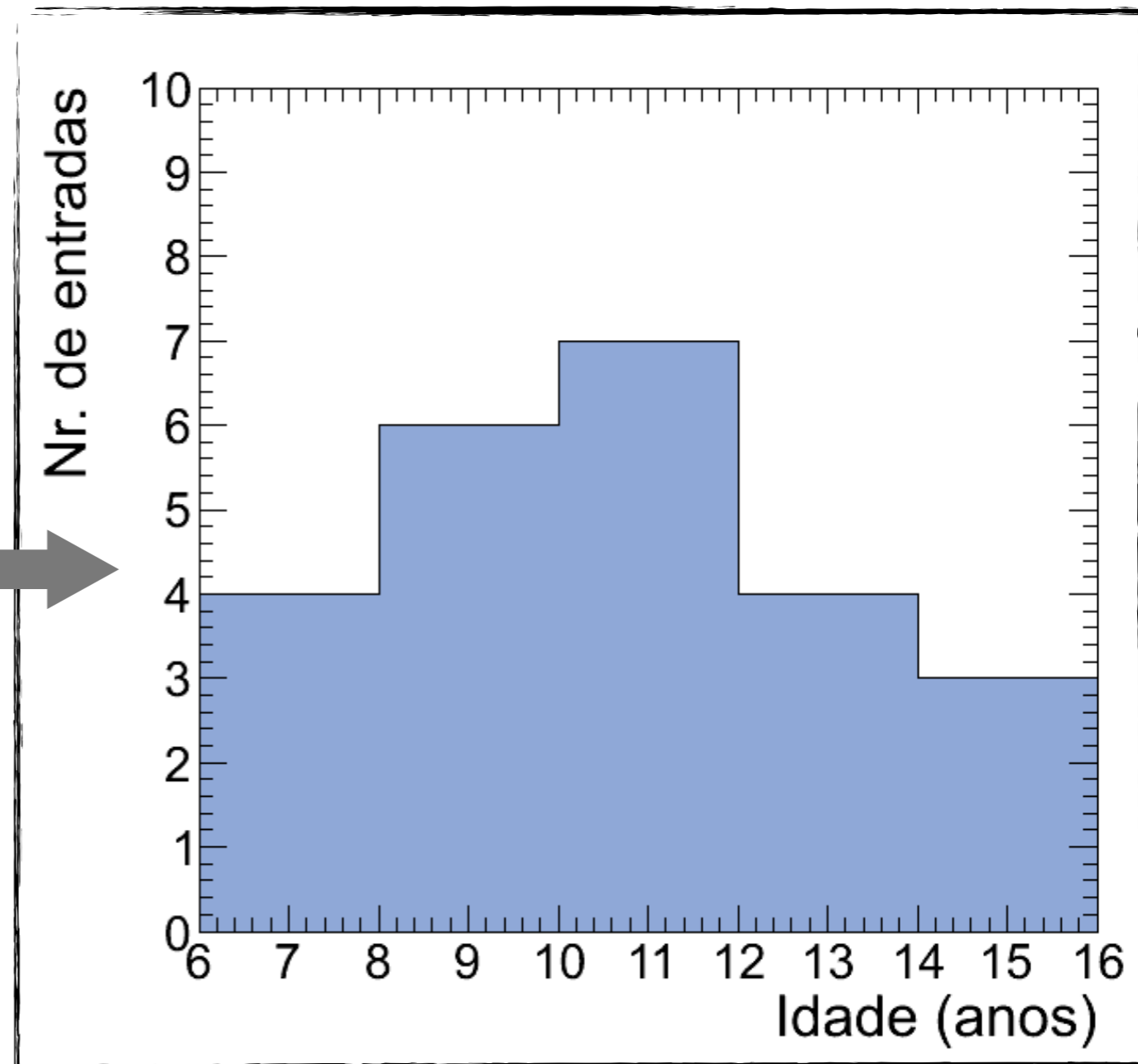


Organizando um conjunto de dados: Classes e Histogramas

Conjunto de idades:

{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Classe de idades (anos)	Frequência
6 - 8	4
8 - 10	6
10 - 12	7
12 - 14	4
14 - 16	3

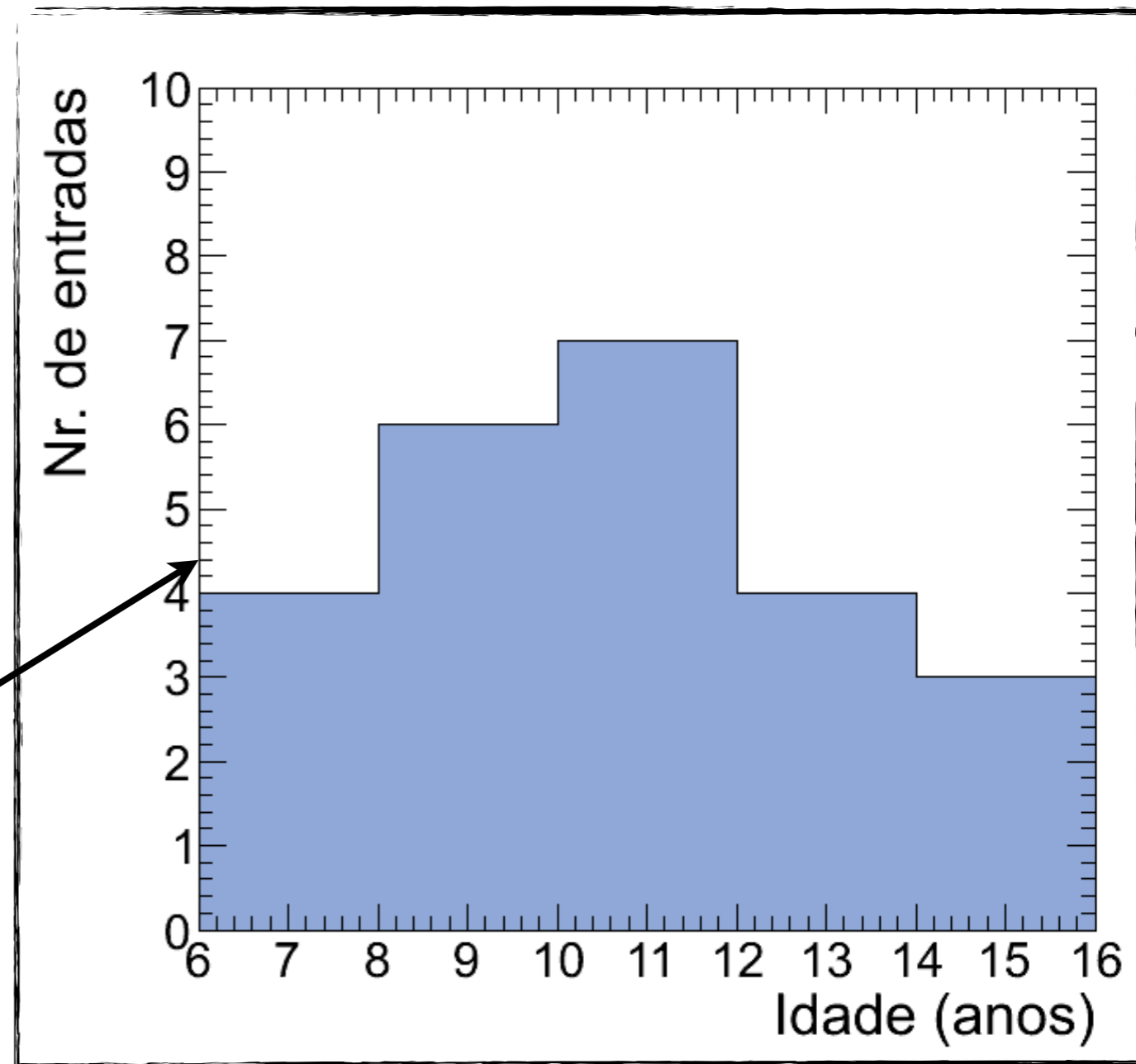
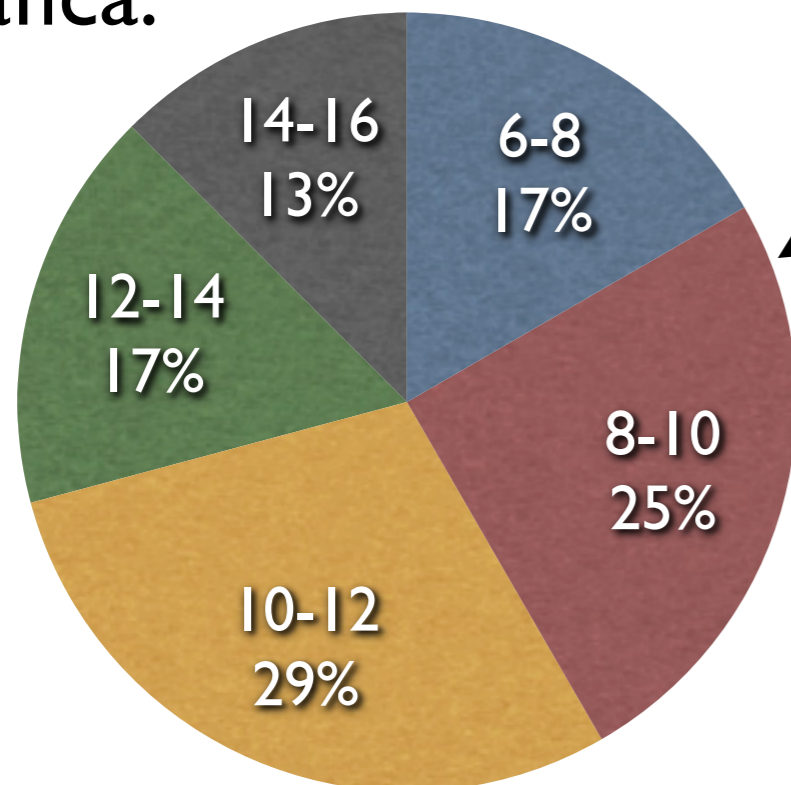


Organizando um conjunto de dados: Classes e Histogramas

Conjunto de idades:

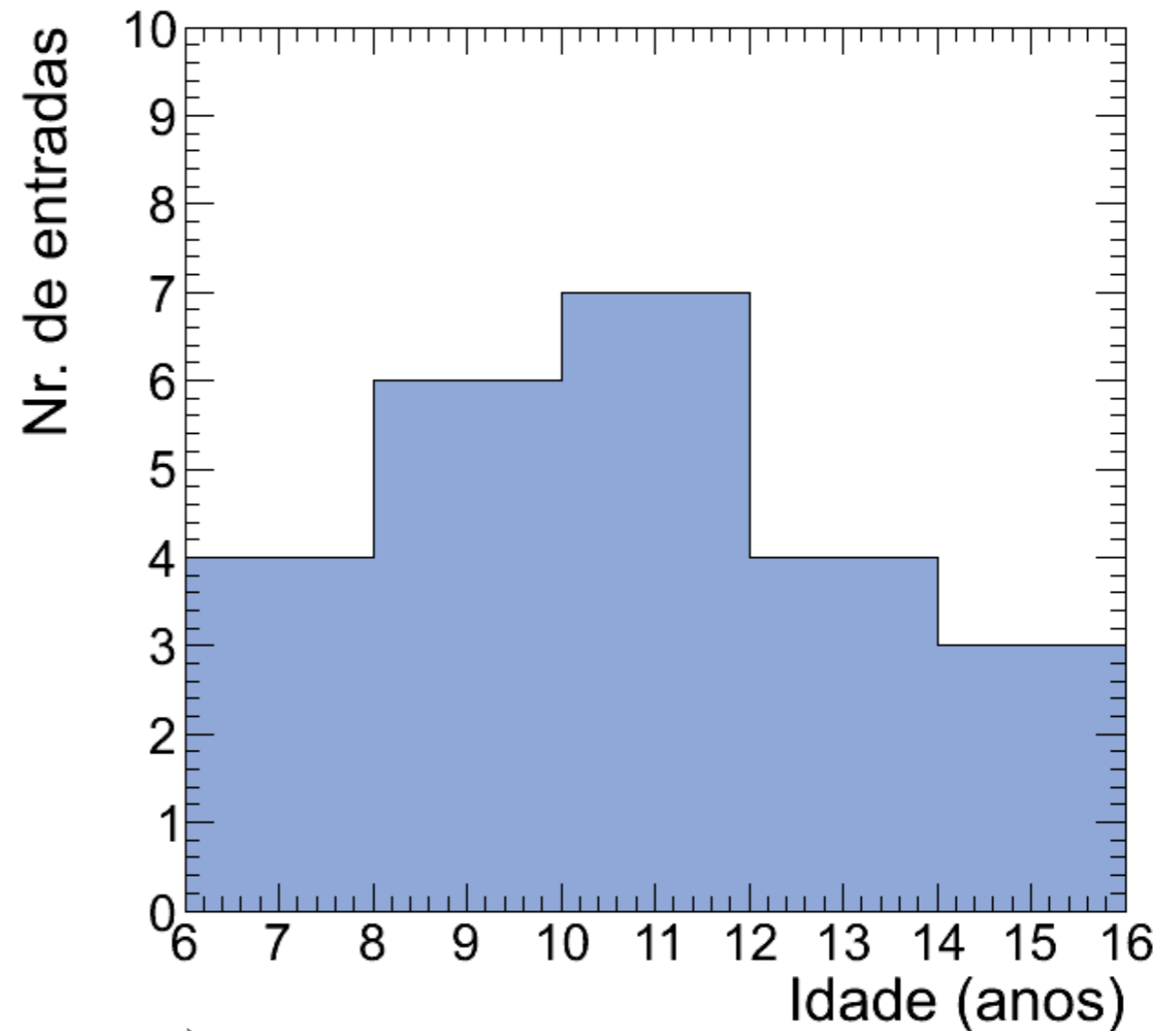
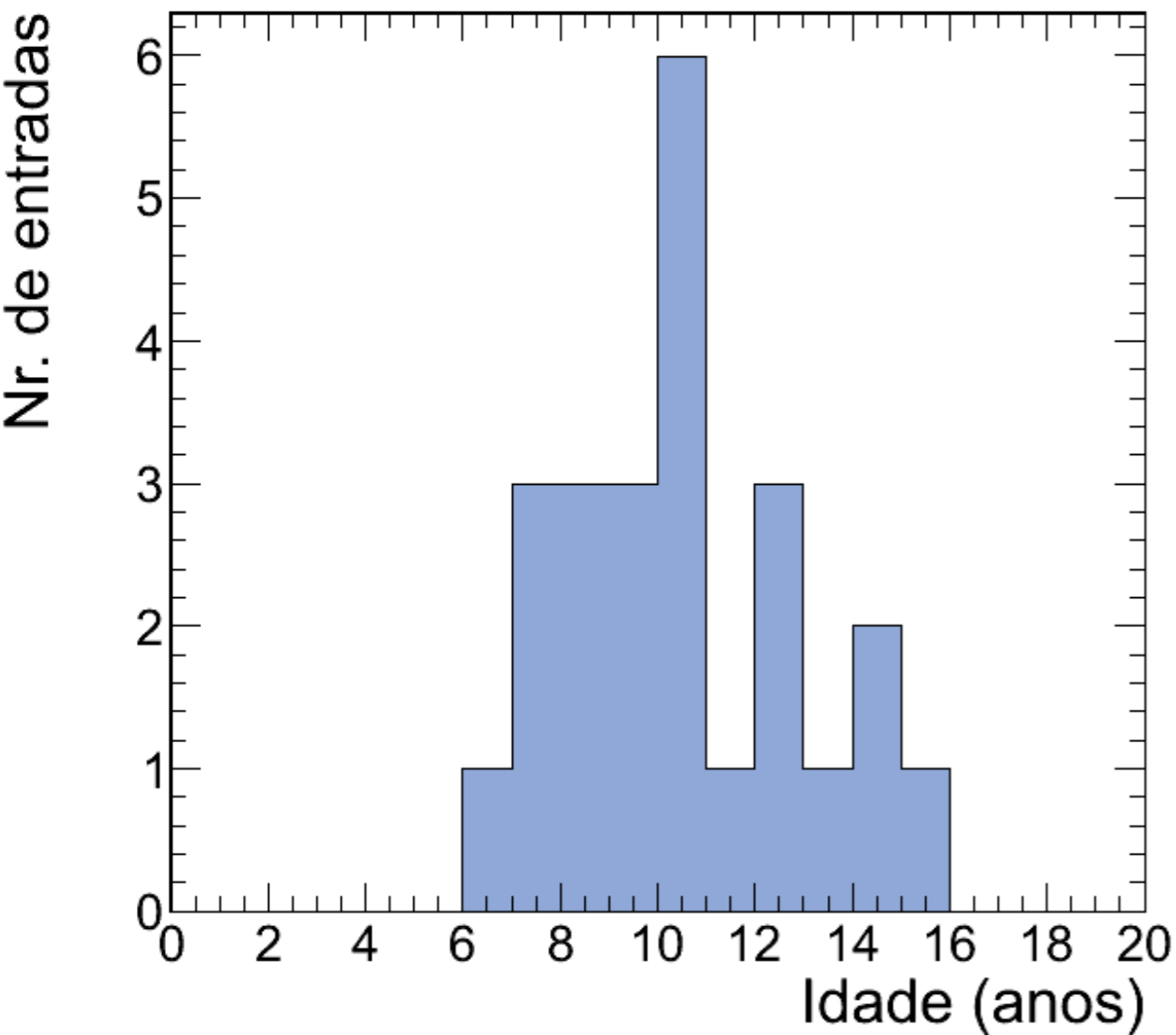
{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Outra representação gráfica:



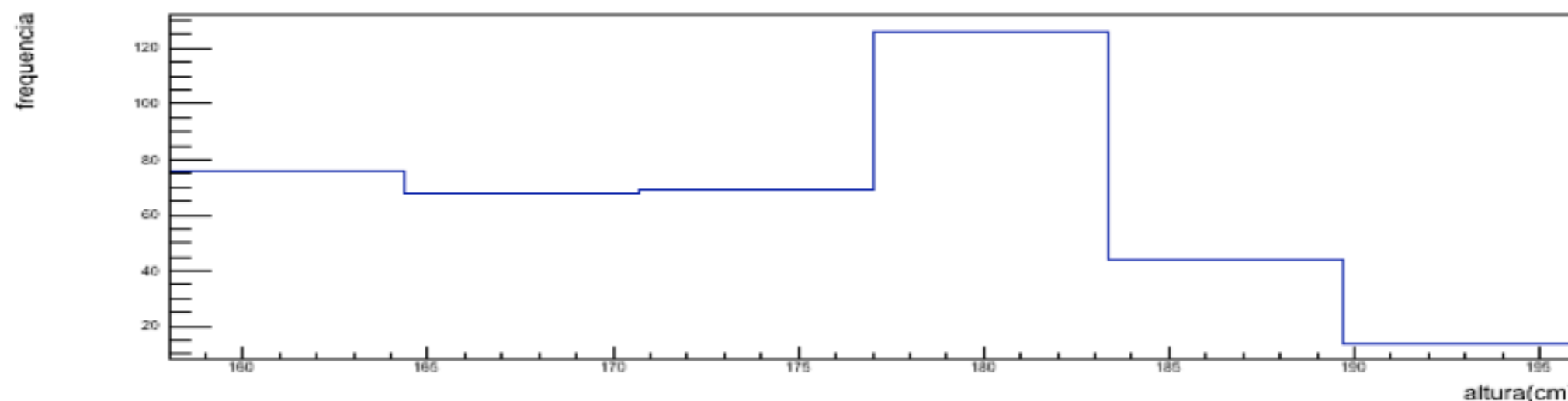
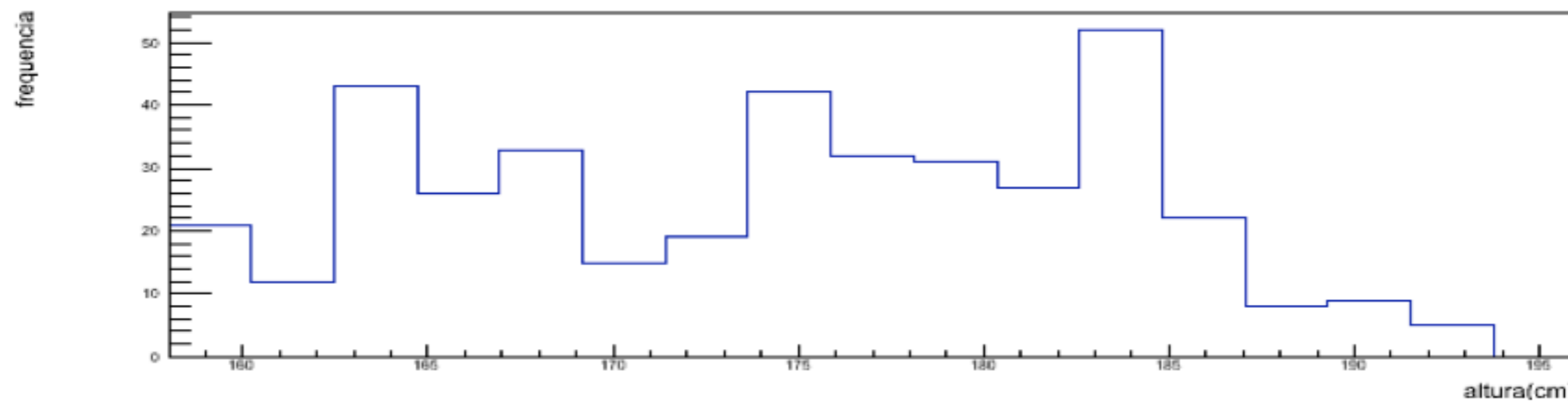
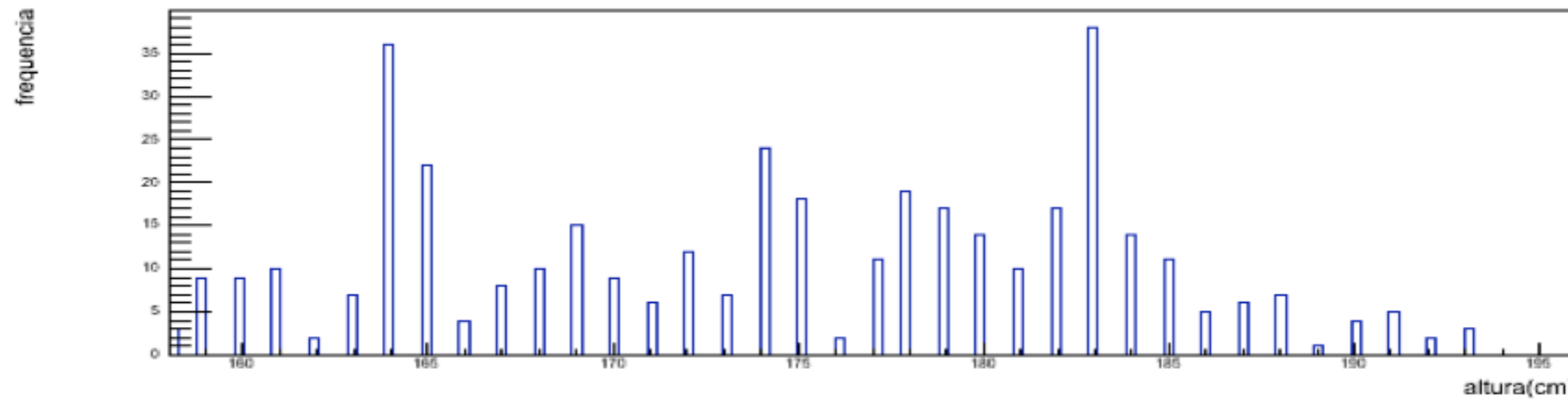
Organizando um conjunto de dados: Histogramas

Que tamanho de intervalo devemos usar para cada classe de frequência?



➔
Maior valor de intervalo

Um conjunto ainda maior de dados (valores de alturas de estudantes):



Maior valor de intervalo

Parâmetros de posição

Média: Valor médio de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$

Símbolo

$$\boxed{\bar{x}} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Cada elemento do conjunto de dados

Parâmetros de posição

Média: Valor médio de um conjunto de dados agrupados em M classes de frequência

Cada classe possui ponto médio $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, \dots, n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_M x_M}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M n_j x_j$$

M : número de classes de frequência

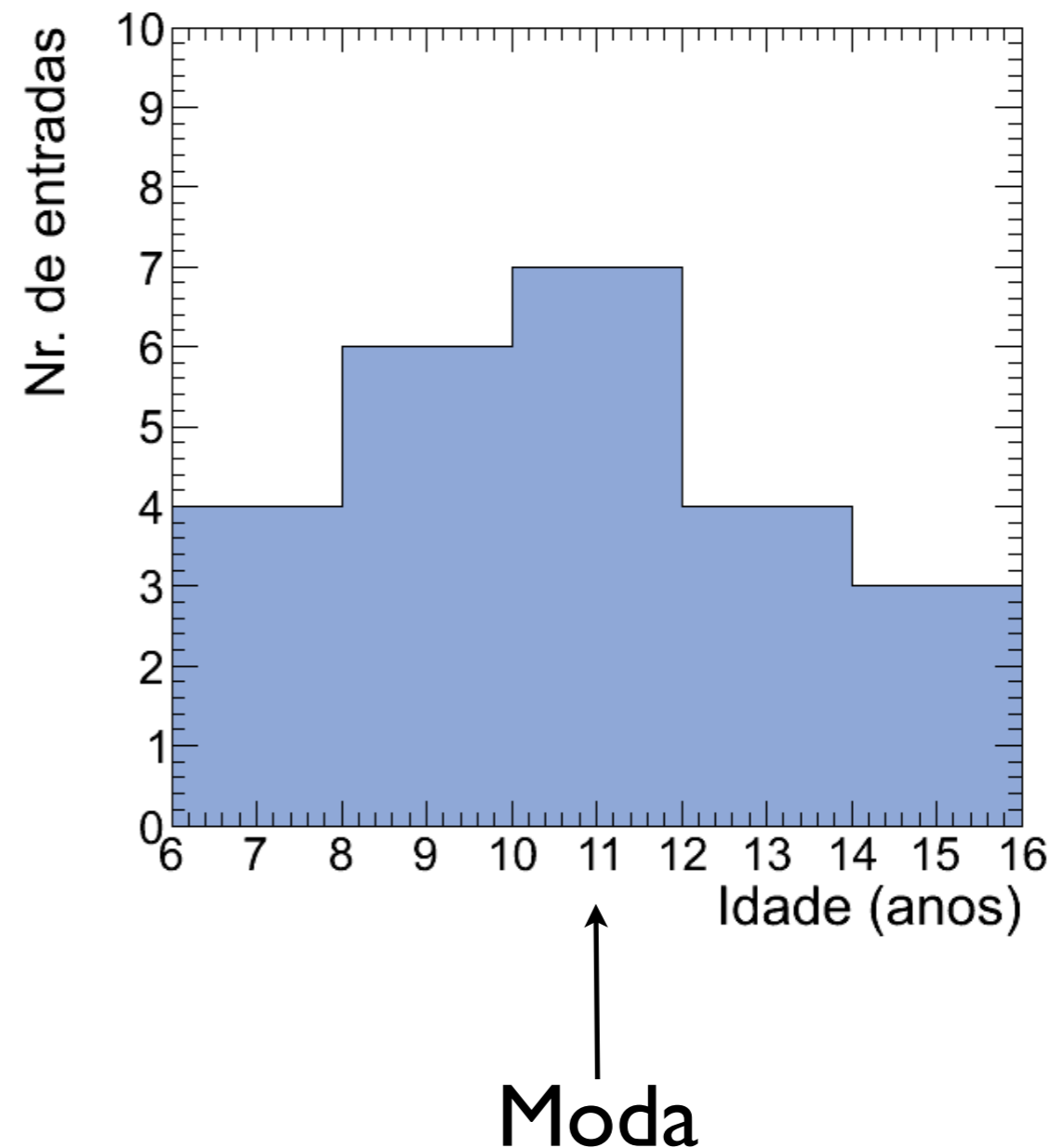
N : número total de elementos $\sum_{j=1}^M n_j = n_1 + n_2 + \dots + n_M = N$

Parâmetros de posição

Moda: Valor mais frequente de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$

Símbolo: x_{mod}

Para dados agrupados em classes de frequências a moda é o ponto médio da classe de maior frequência



Parâmetros de posição

Média quadrática: raiz quadrada da média dos quadrados dos dados:

Símbolo

$$\boxed{x_{\text{rms}}} \equiv \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Parâmetros de posição

Mediana: valor que divide uma distribuição ordenada de dados de forma que metade dos dados está acima, e metade abaixo deste valor

$$N(\text{ímpar}) \rightarrow x_{\text{med}} = x_{(N+1)/2}$$

$$N(\text{par}) \rightarrow x_{\text{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

Resumo parâmetros de posição

1. **Média:** Valor médio de um conjunto de dados

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$$

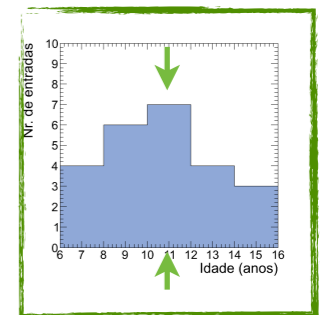
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i$$

ou

classes de frequências

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^M x_j n_j$$

2. **Moda:** Valor mais frequente de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ (ou o ponto médio da classe de maior frequência)



3. **Média quadrática:** raiz quadrada da média dos quadrados dos dados

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i^2}$$

4. **Mediana:** valor que divide uma distribuição ordenada de dados de forma que metade dos dados está acima, e metade abaixo deste valor

$$x_{\text{med}} = x_{(N+1)/2}$$
$$x_{\text{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Idade (anos)	Massa (kg)	Altura (cm)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

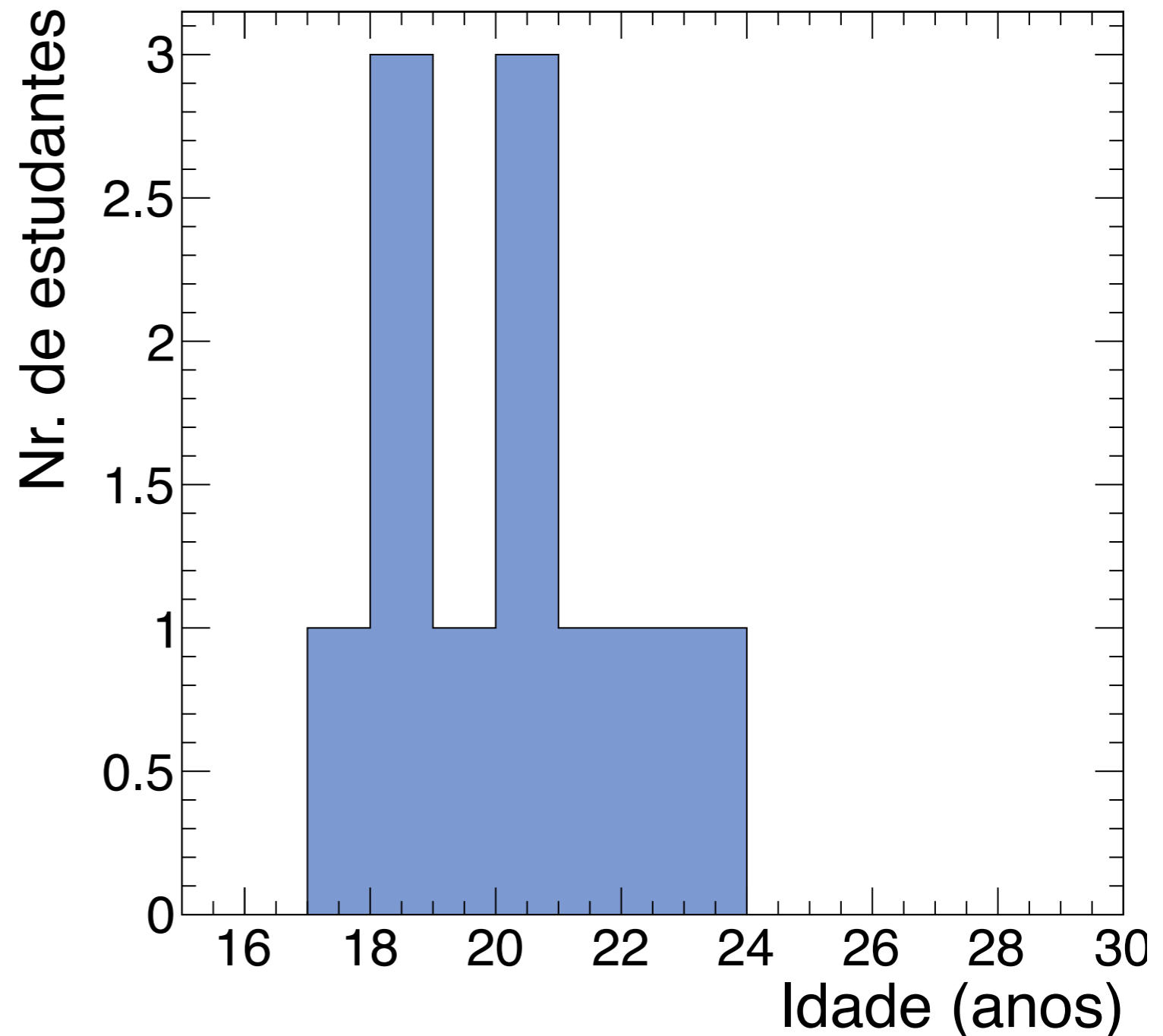
Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Idade (anos)	Massa (kg)	Altura (cm)
1	20	64	163
2	19	85	168
3	21	96	196
4	17	60	166
5	22	80	175
6	20	55	160
7	23	68	183
8	20	70	169
9	18	80	180
10	18	72	185
11	18	88	178

(Dados coletados na aula passada 24/08)

Atividade de aula - Idade, massa e altura

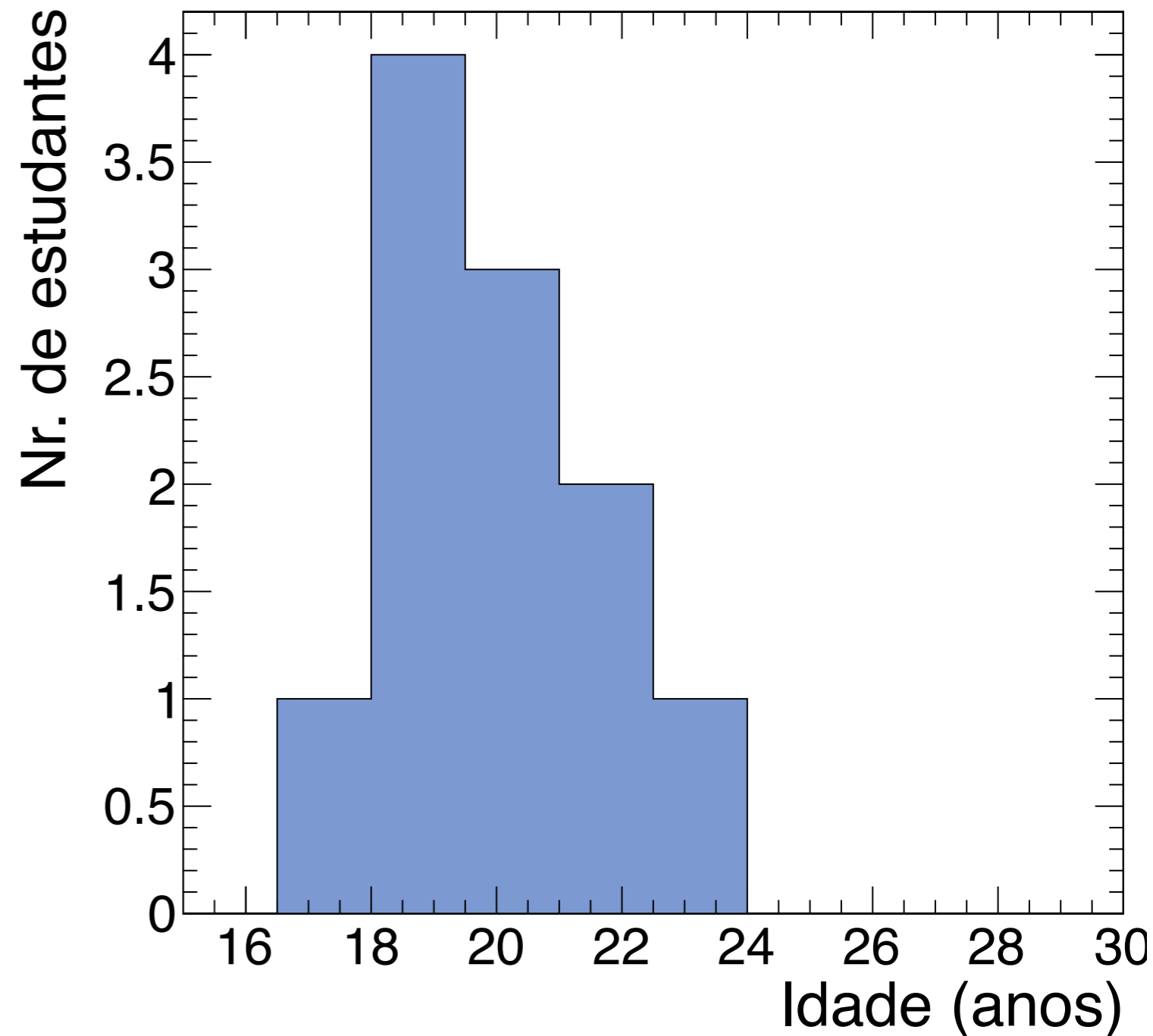
Estudante	Idade (anos)
1	20
2	19
3	21
4	17
5	22
6	20
7	23
8	20
9	18
10	18
11	18



Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Idade (anos)
1	20
2	19
3	21
4	17
5	22
6	20
7	23
8	20
9	18
10	18
11	18

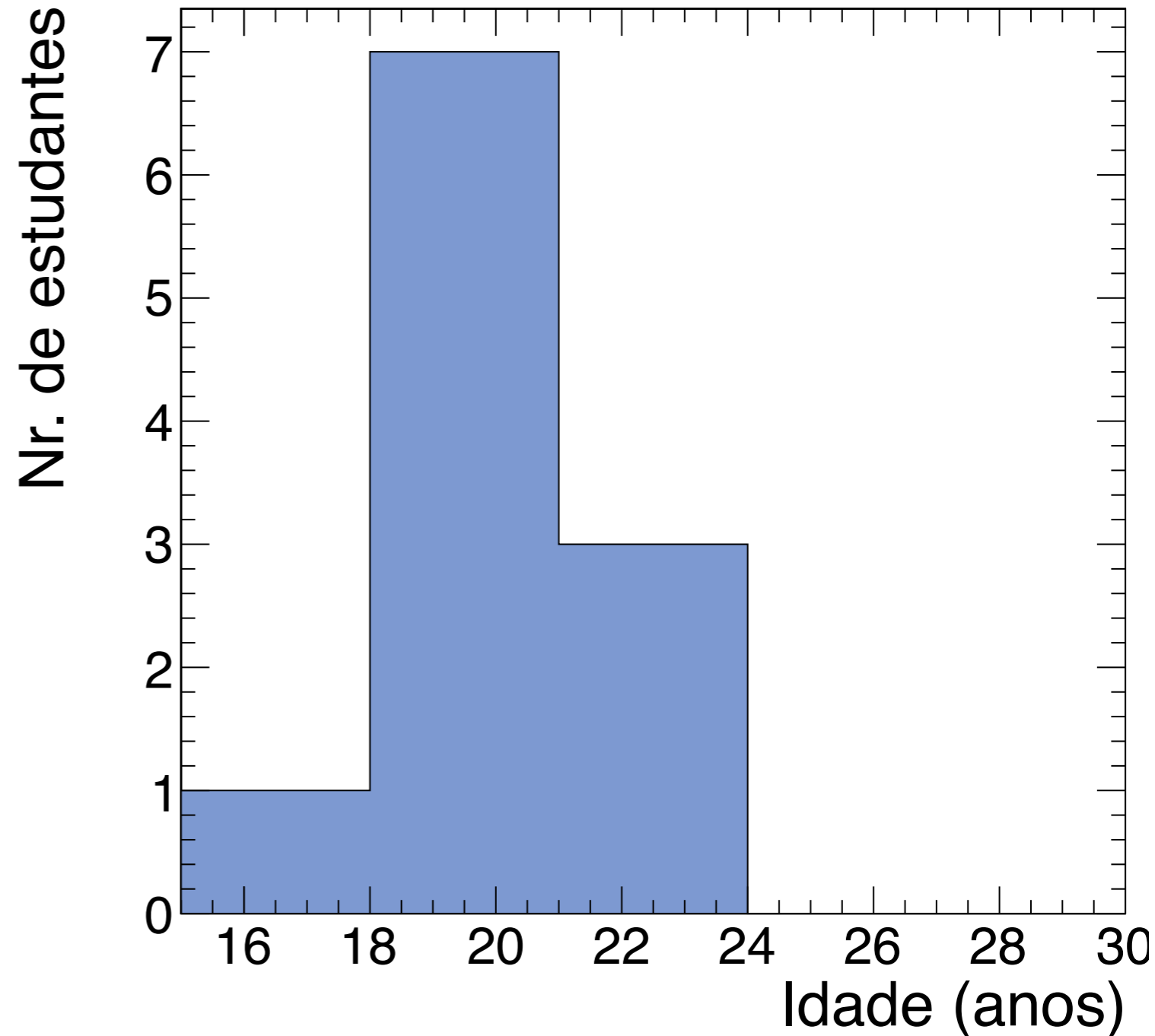
M=10 intervalos (1,5 anos)



Atividade de aula - Idade, massa e altura

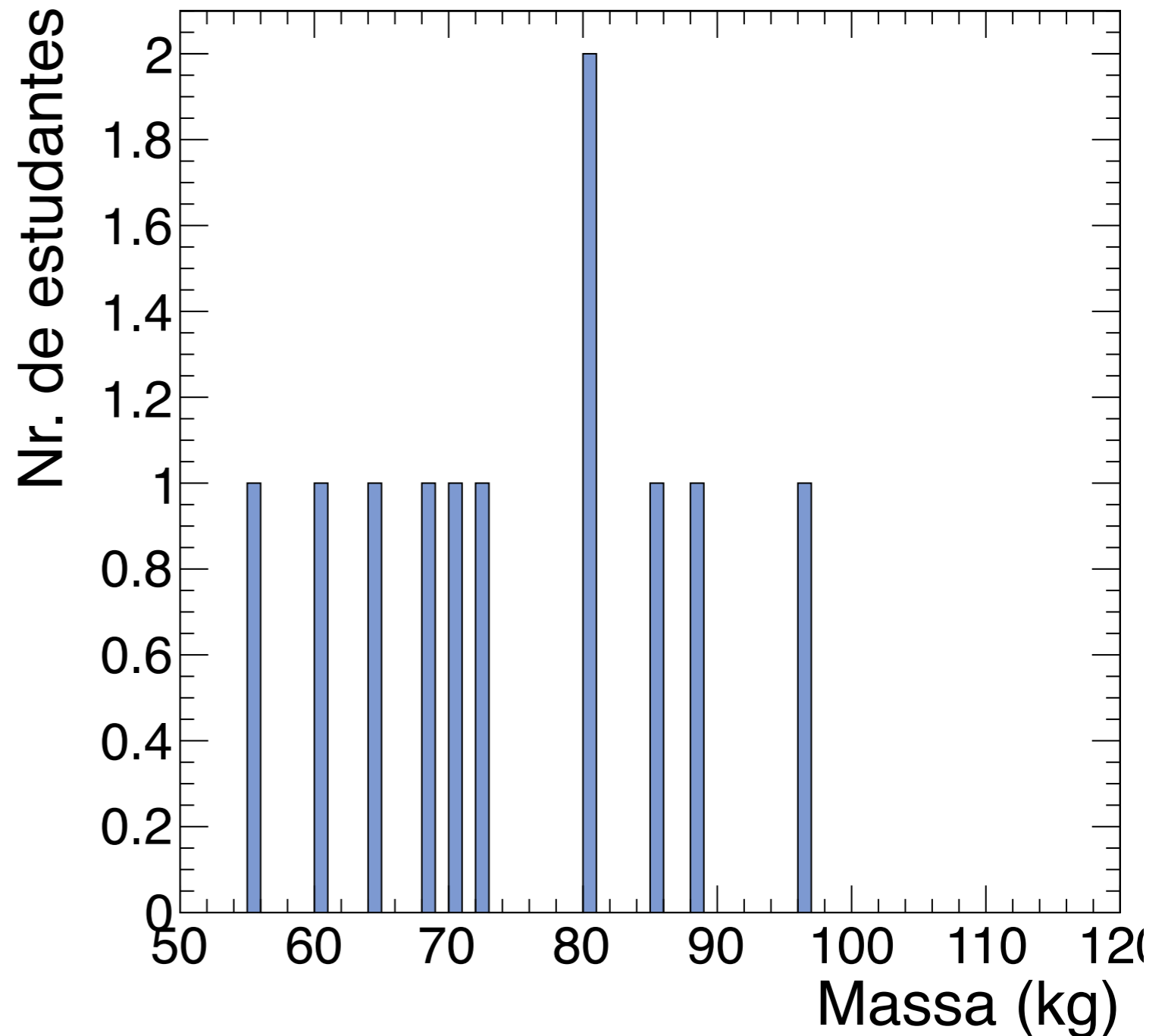
Estudante	Idade (anos)
1	20
2	19
3	21
4	17
5	22
6	20
7	23
8	20
9	18
10	18
11	18

M=5 intervalos (3 anos)



Atividade de aula - Idade, massa e altura

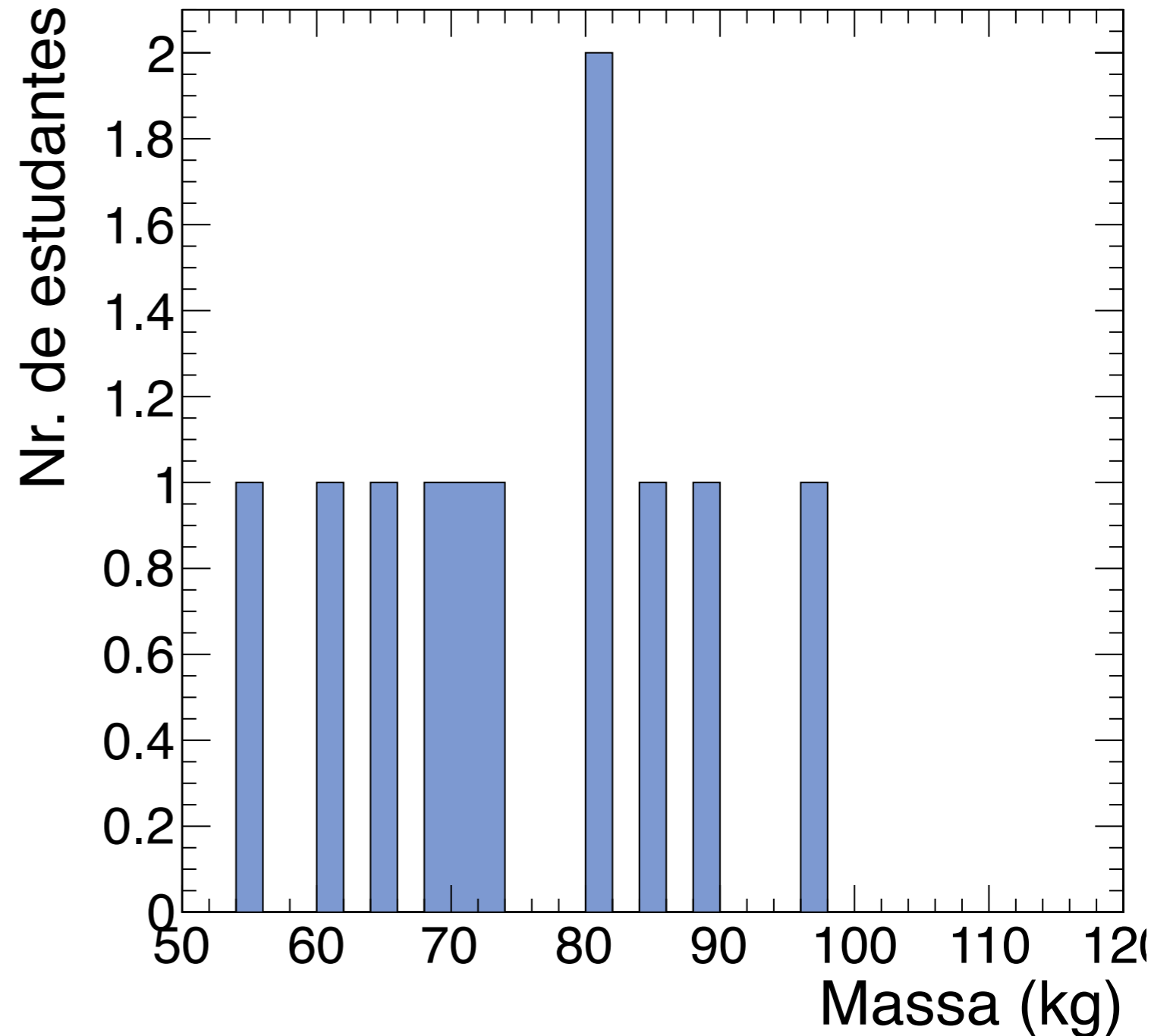
Estudante	Massa (Kg)
1	64
2	85
3	96
4	60
5	80
6	55
7	68
8	70
9	80
10	72
11	88



Atividade de aula - Idade, massa e altura

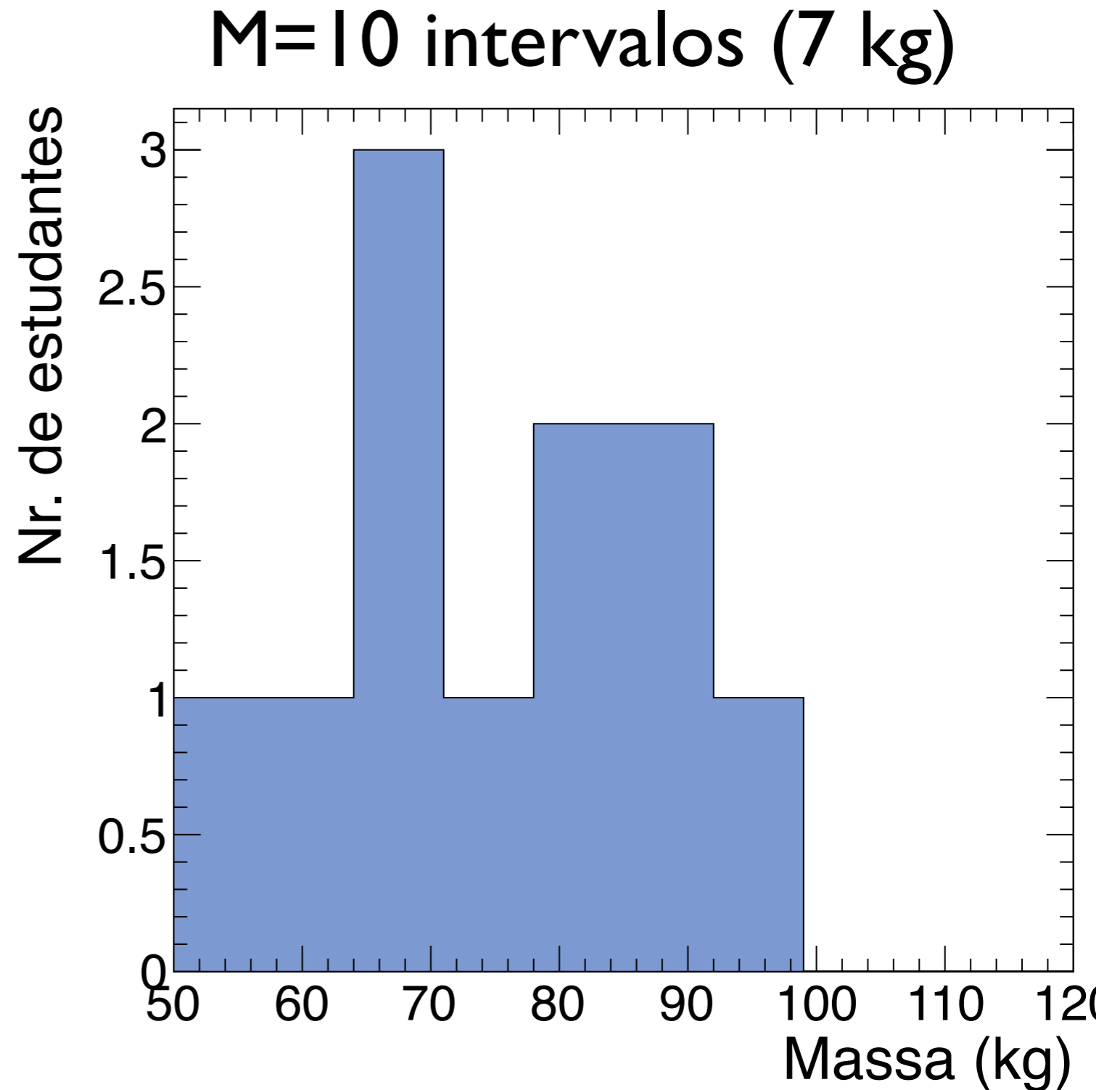
M=35 intervalos (2 kg)

Estudante	Massa (Kg)
1	64
2	85
3	96
4	60
5	80
6	55
7	68
8	70
9	80
10	72
11	88



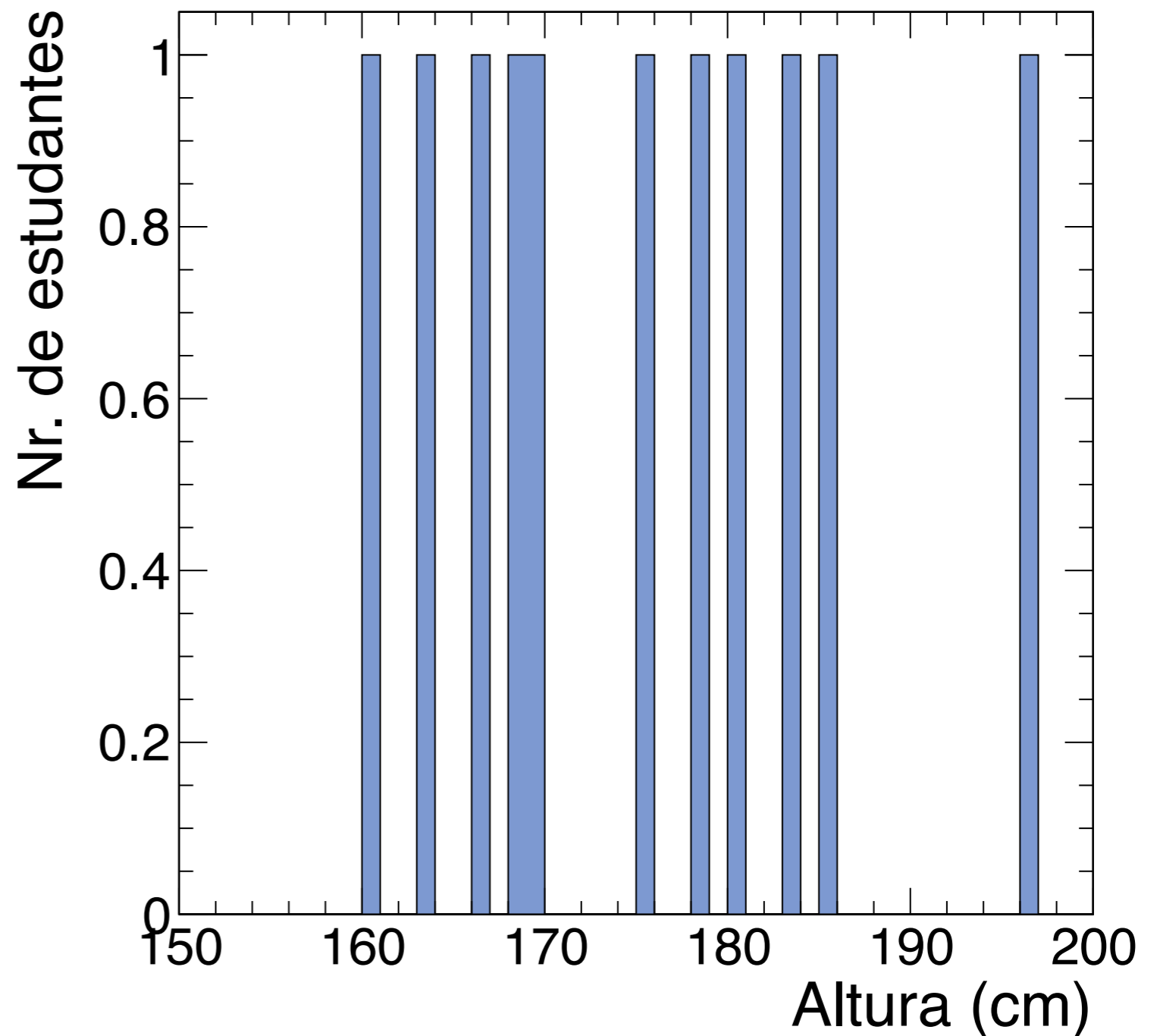
Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Massa (Kg)
1	64
2	85
3	96
4	60
5	80
6	55
7	68
8	70
9	80
10	72
11	88



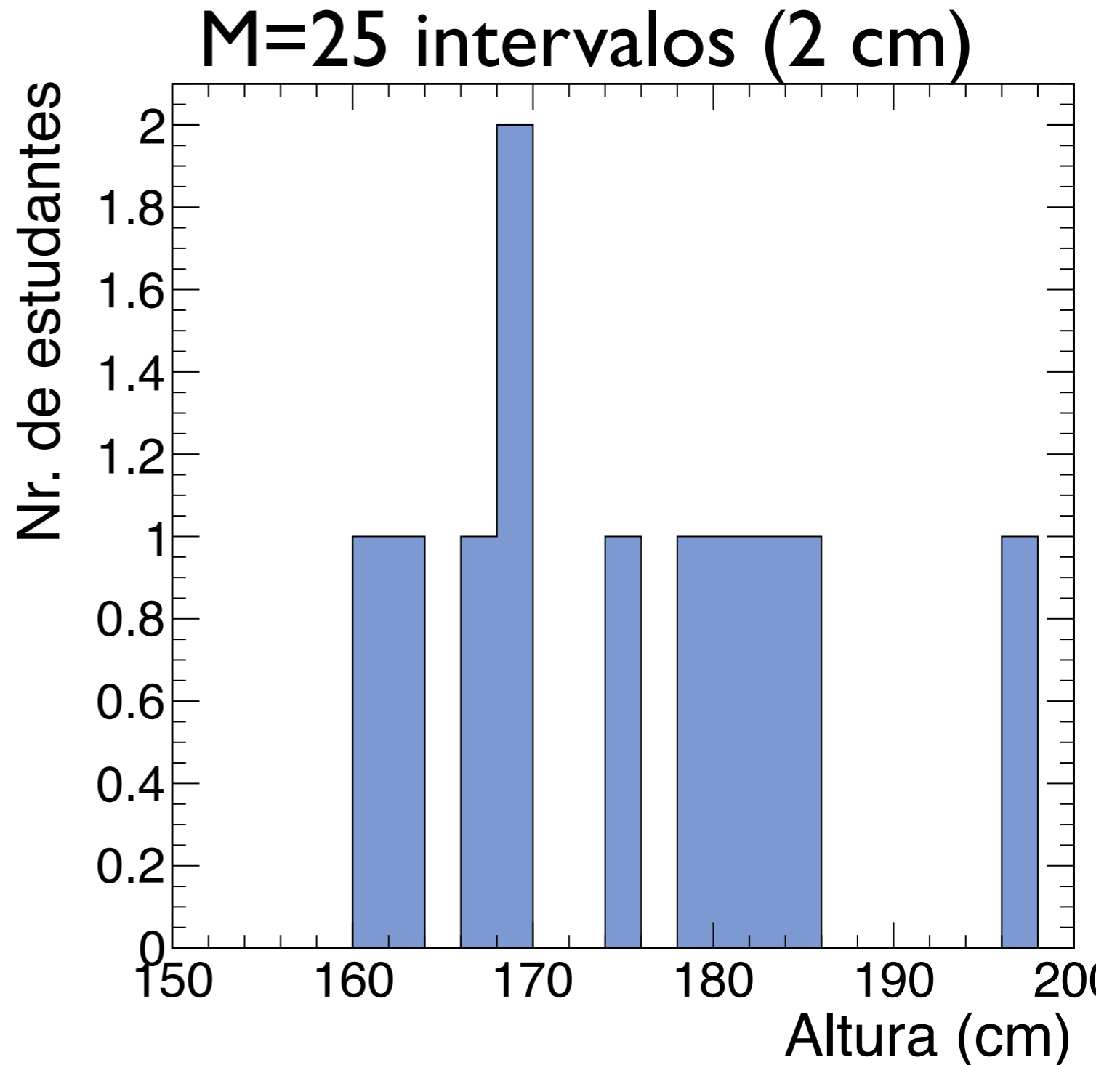
Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Altura (cm)
1	163
2	168
3	196
4	166
5	175
6	160
7	183
8	169
9	180
10	185
11	178



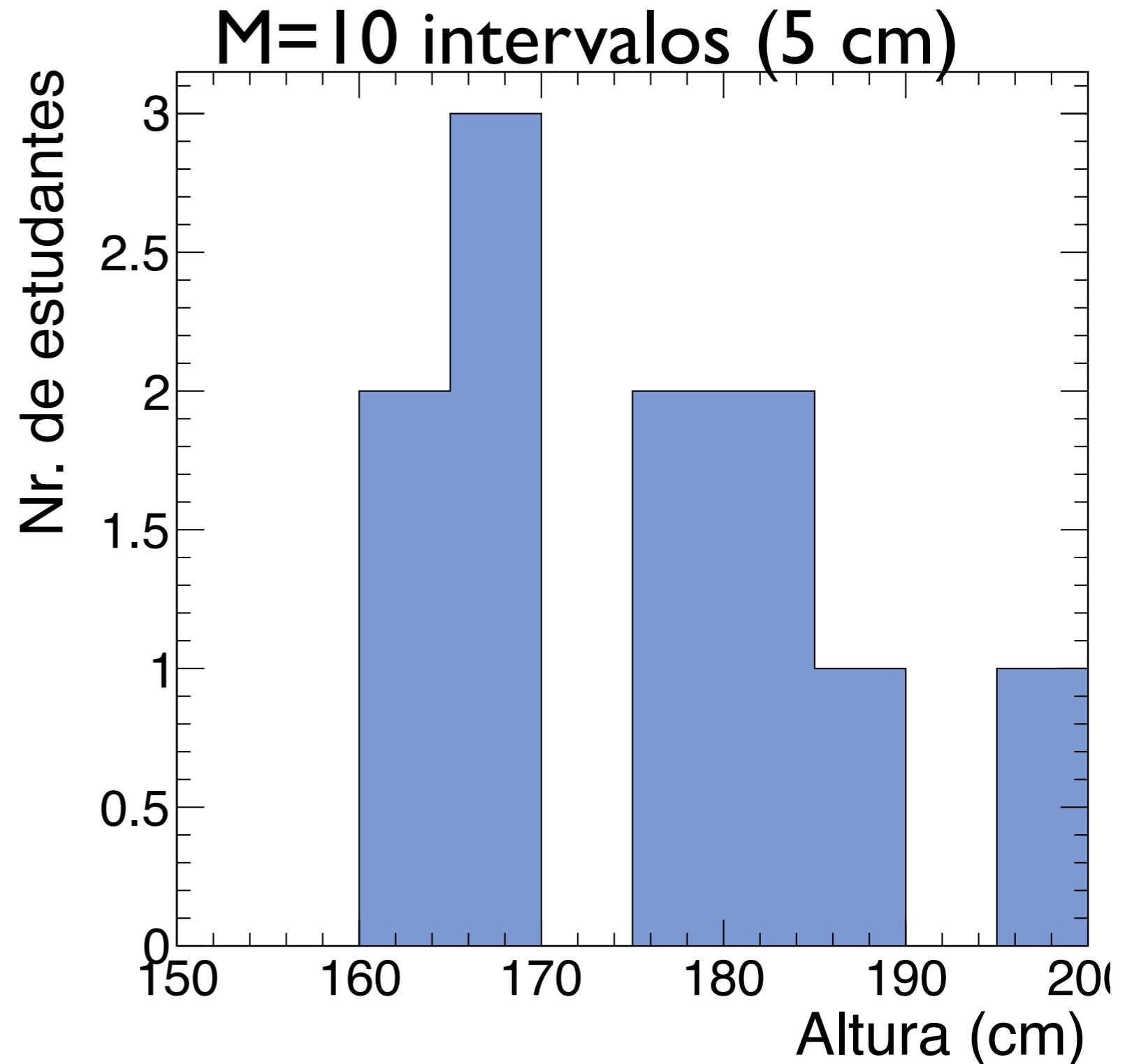
Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Altura (cm)
1	163
2	168
3	196
4	166
5	175
6	160
7	183
8	169
9	180
10	185
11	178



Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Altura (cm)
1	163
2	168
3	196
4	166
5	175
6	160
7	183
8	169
9	180
10	185
11	178



Parâmetros de dispersão

i) *Amplitude*: Diferença entre os valores máximo e mínimo de uma coleção de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

Parâmetros de dispersão

ii) *Desvio médio*: Média dos **módulos dos desvios**, em relação à média

$$\overline{|\delta x|} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta x_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| = \frac{|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N}$$

Parâmetros de dispersão

iii) *Variância*: Média dos **quadrados dos desvios** (δx_i)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$


Note que a expressão para a variância pode ser simplificada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Parâmetros de dispersão

iv) *Desvio padrão*: Raiz quadrada da variância, ou média quadrática dos desvios

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$

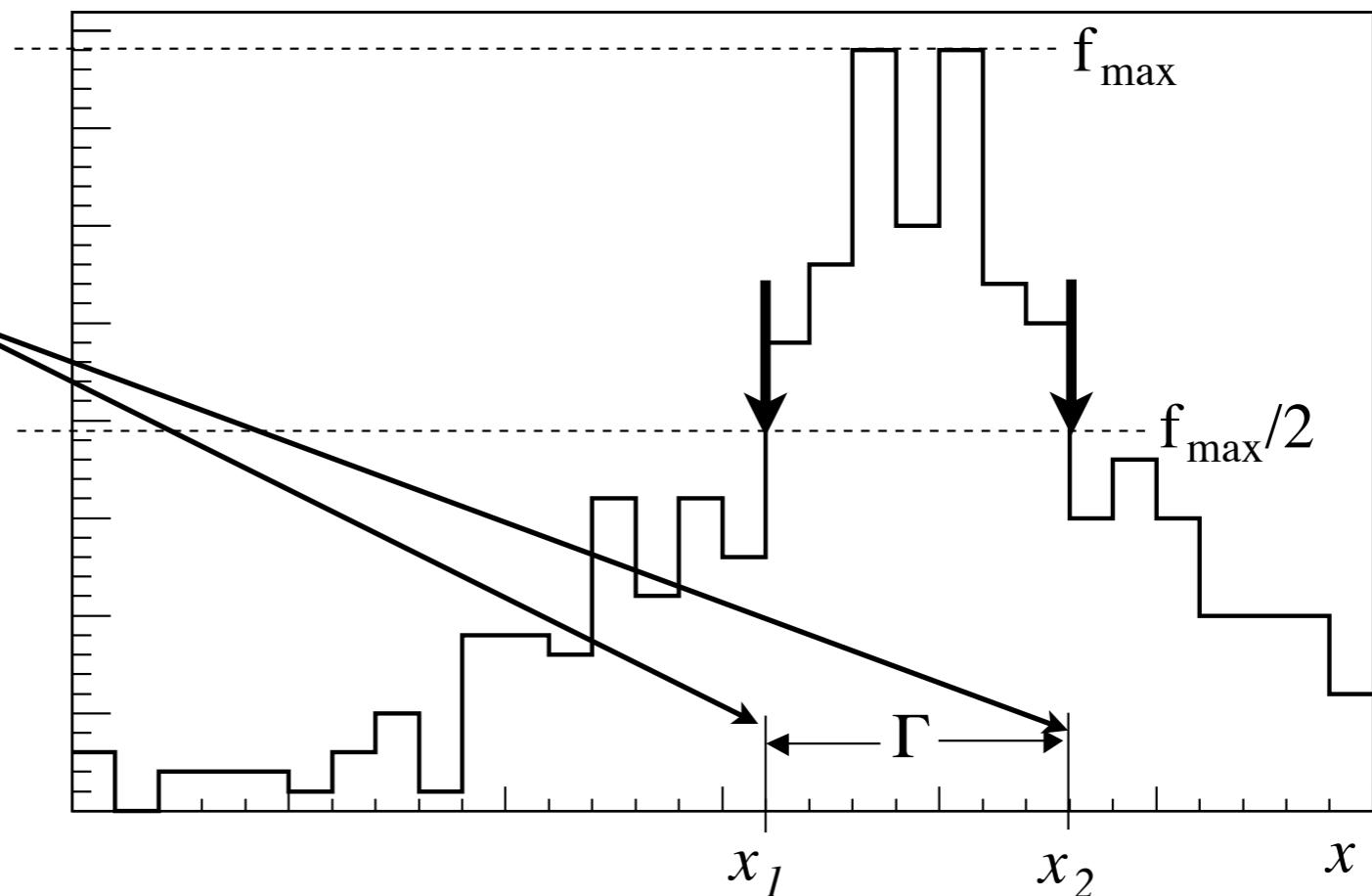
 $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$

Parâmetros de dispersão

v) *Largura a meia altura*: Comprimento do **intervalo limitado pelos valores (x_1, x_2) correspondentes à metade da frequência máxima**

Símbolo: Γ

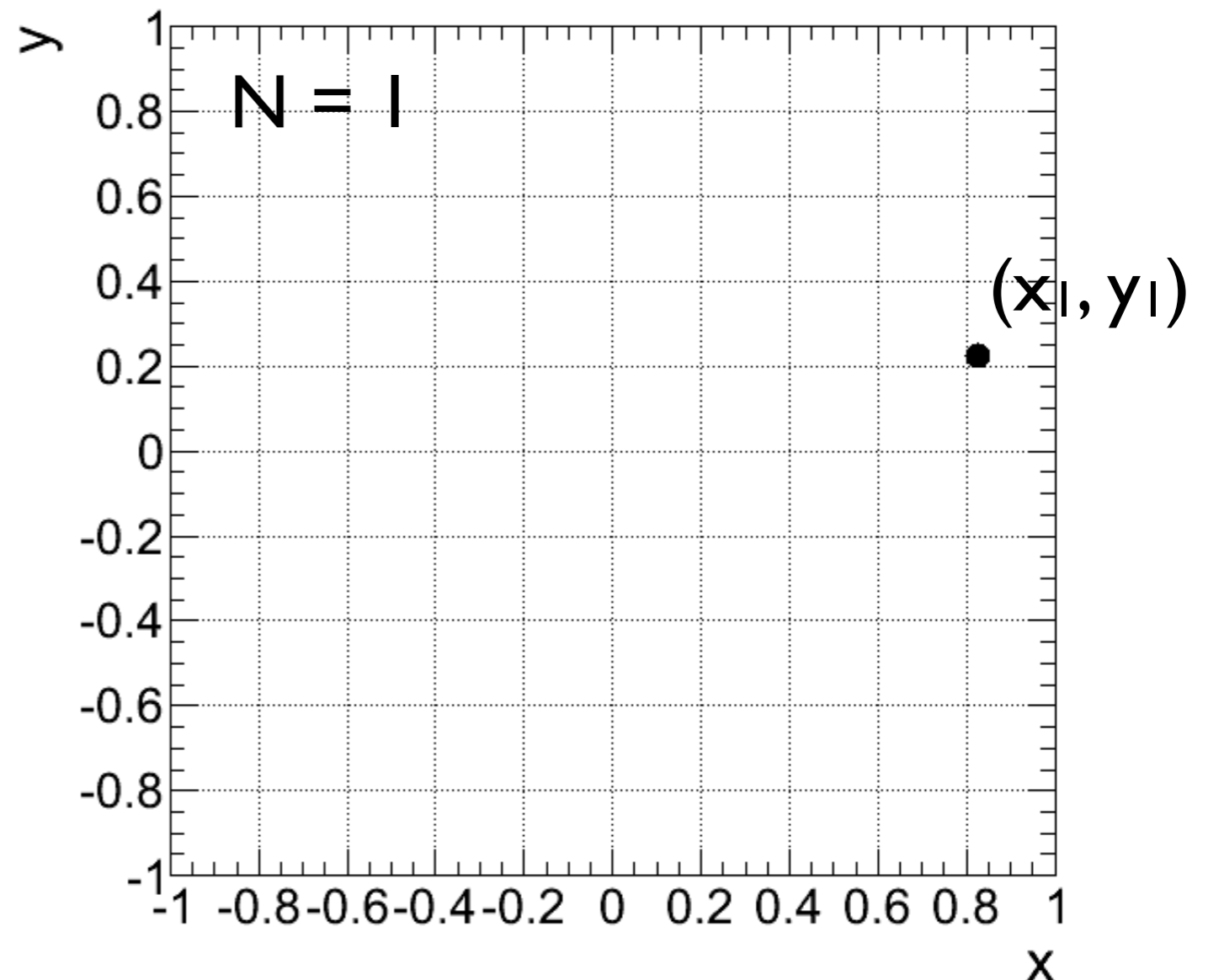
$$\Gamma = |x_2 - x_1|$$



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

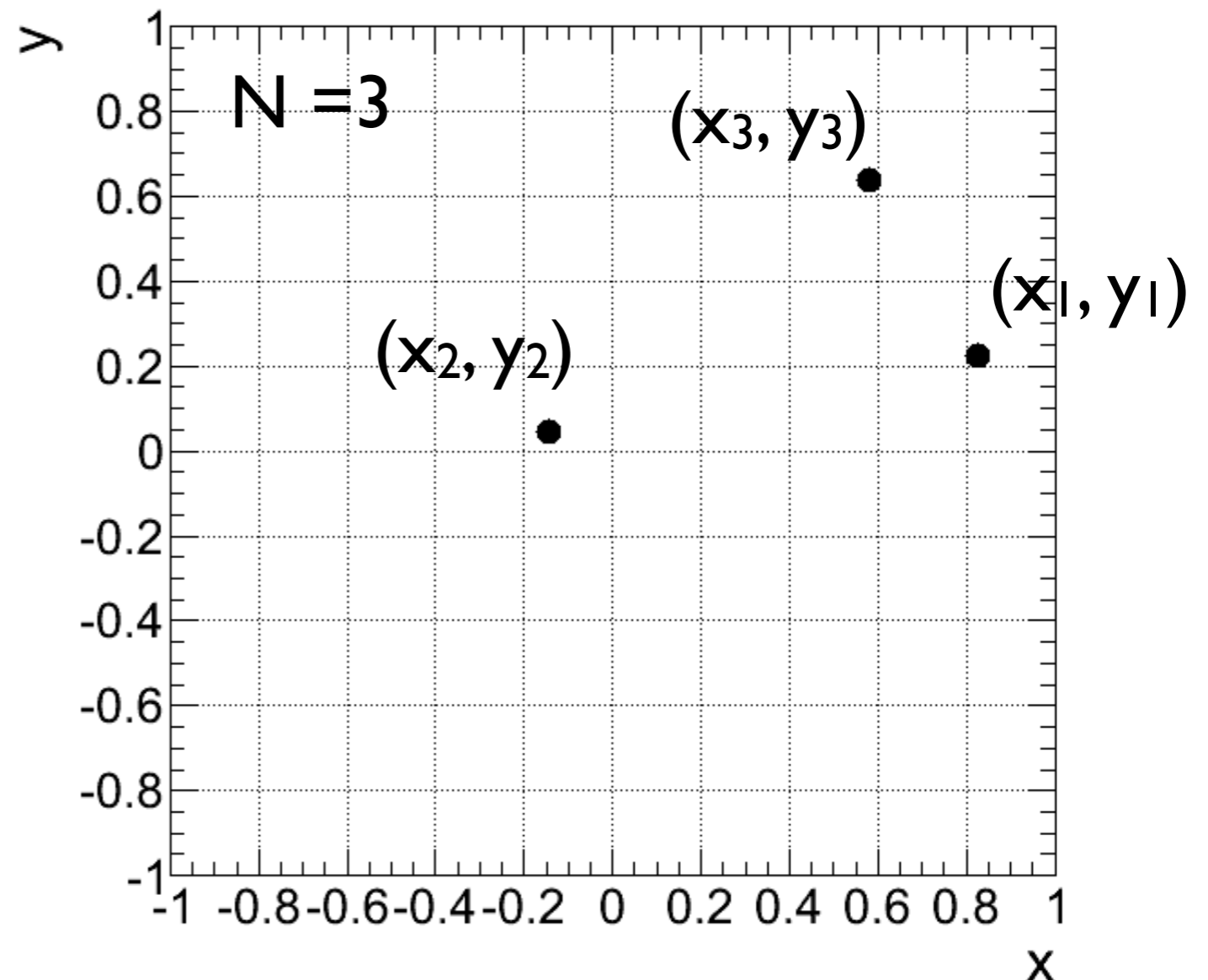
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

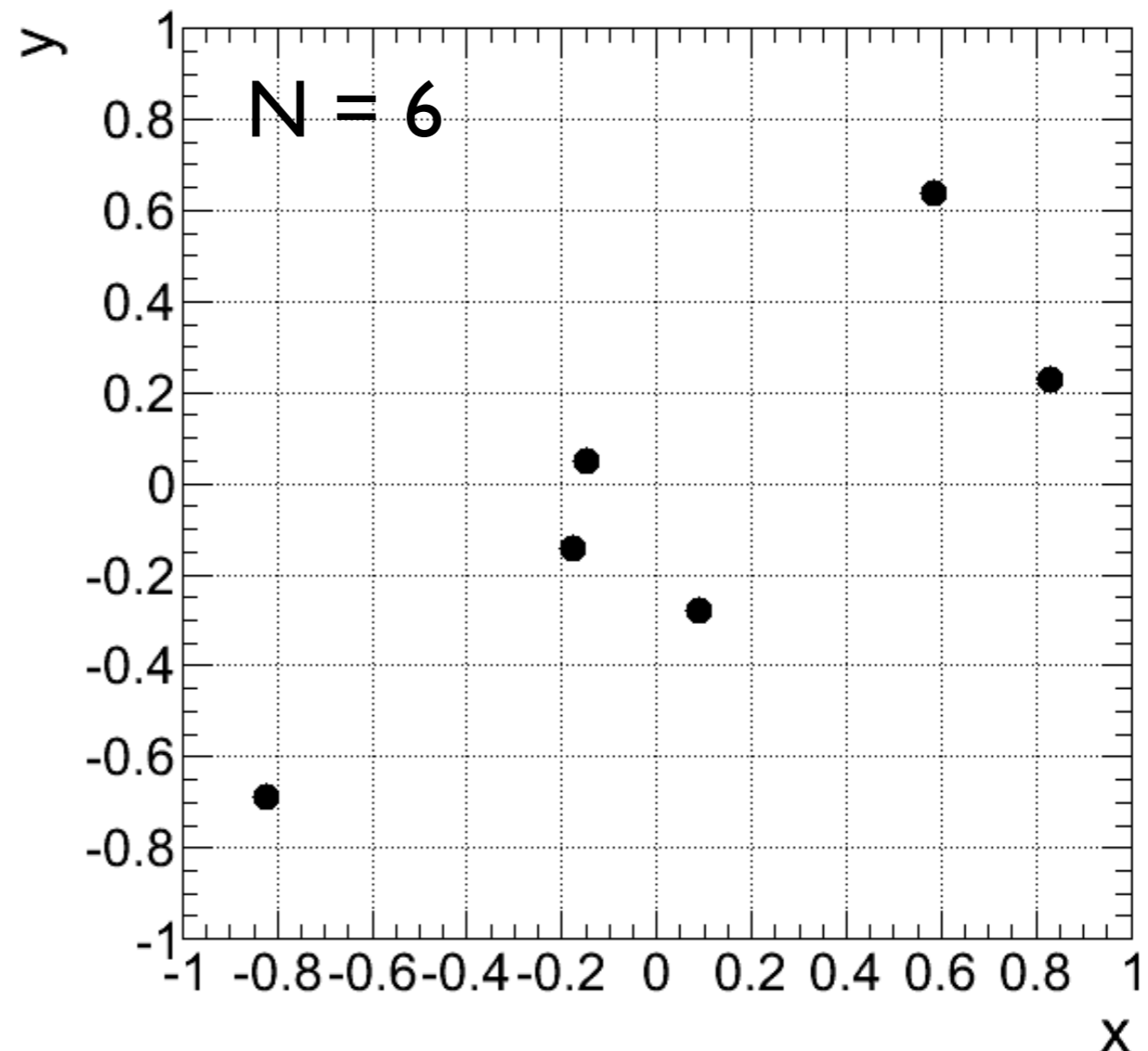
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

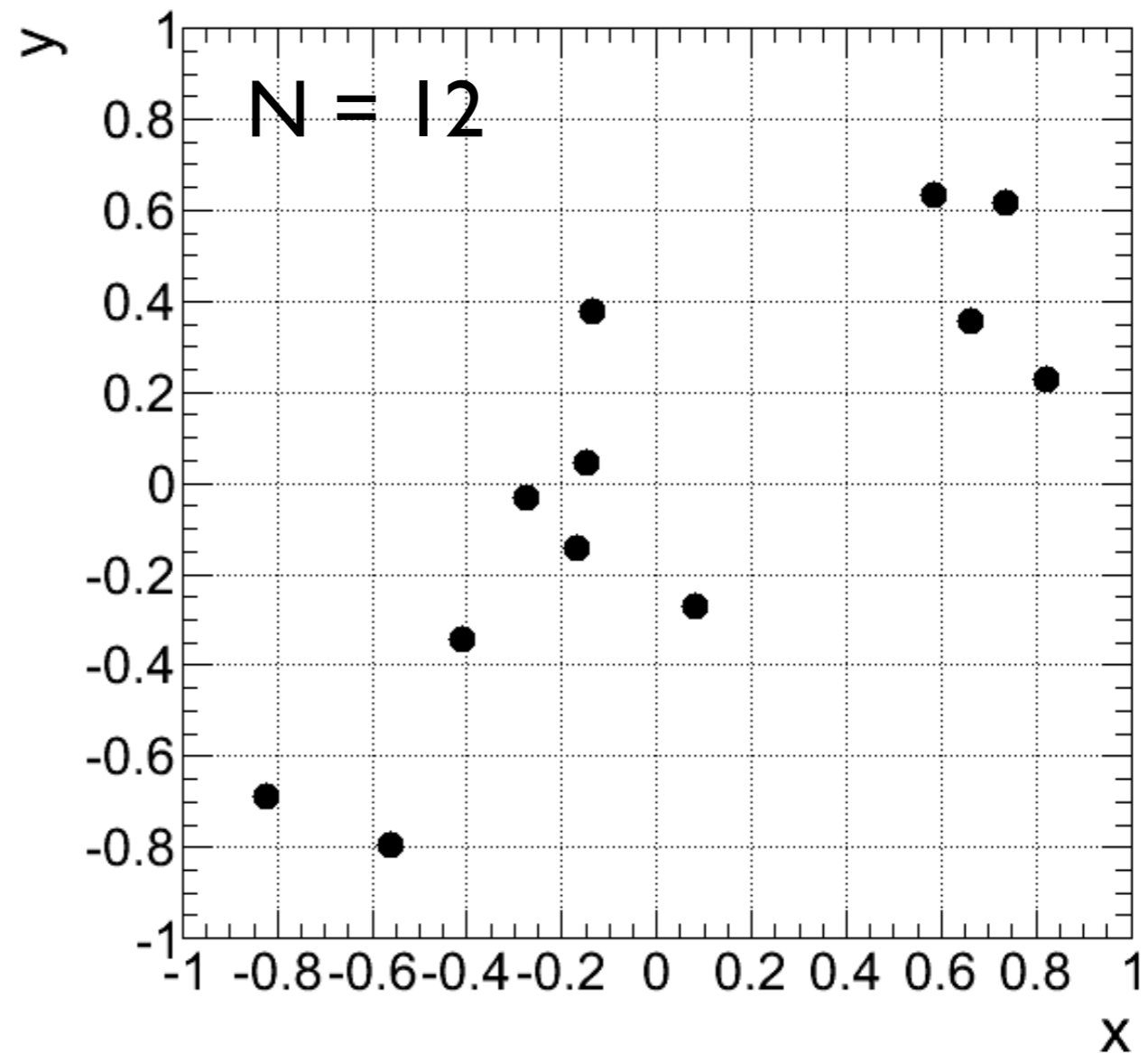
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

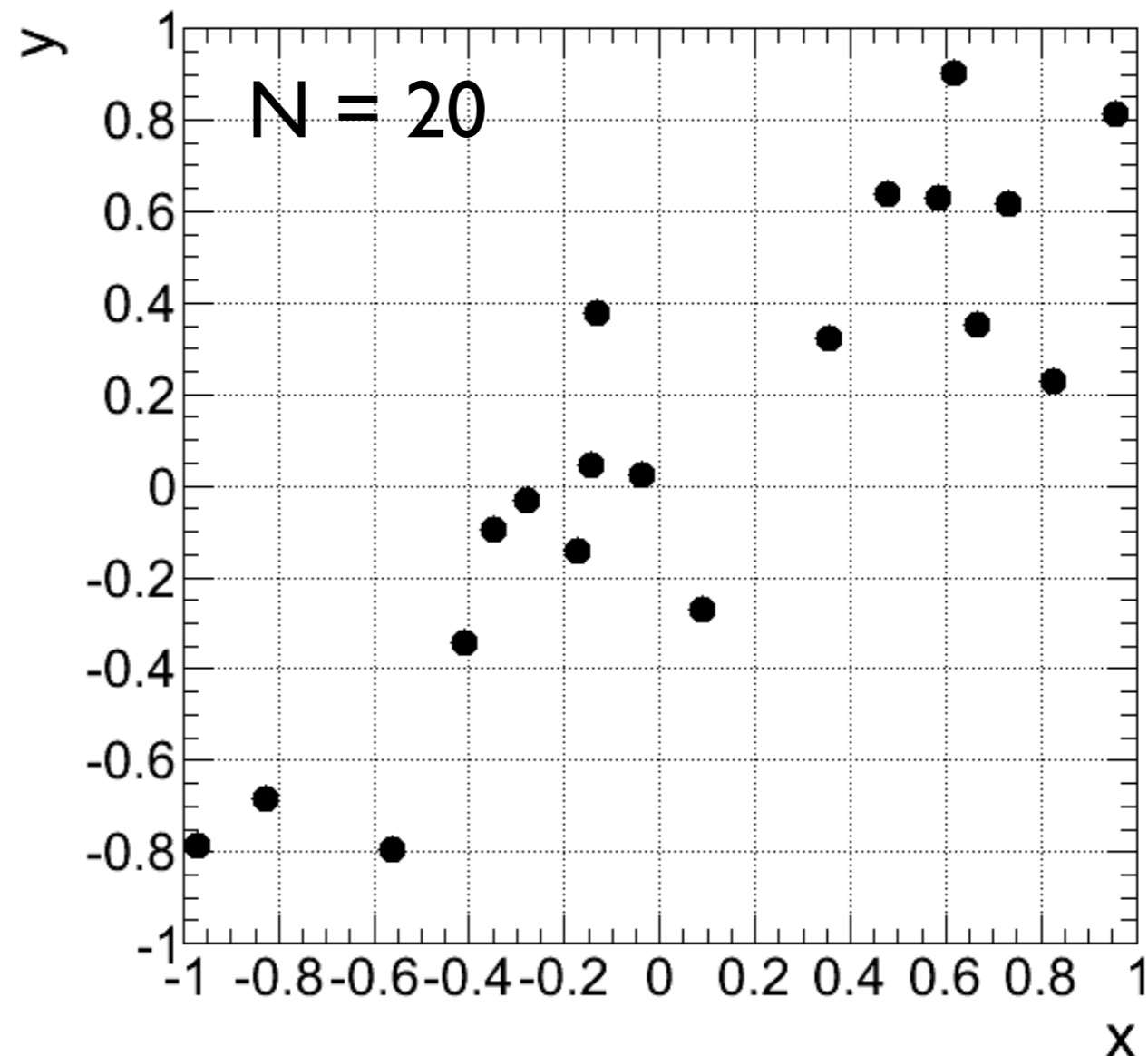
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

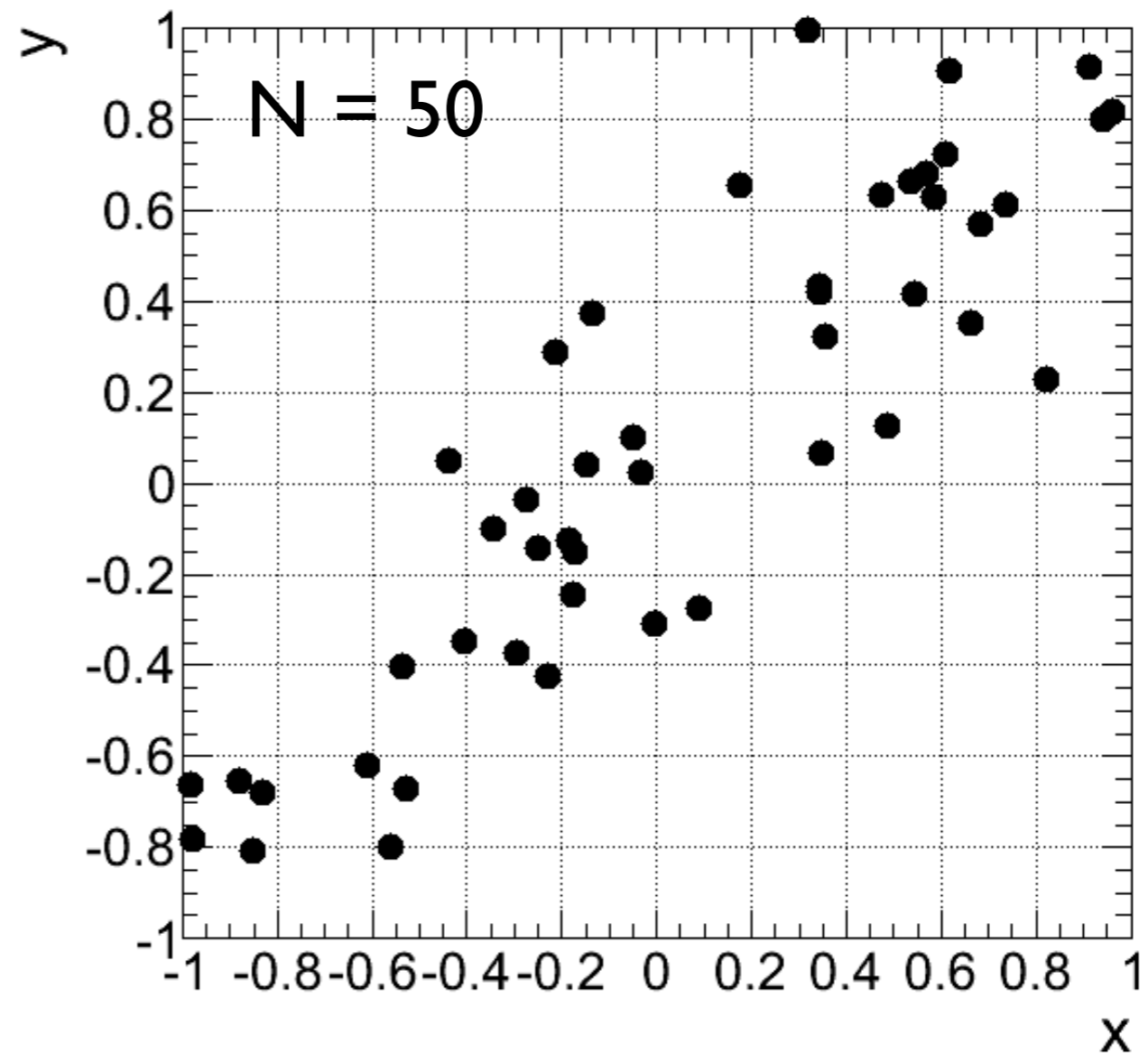
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

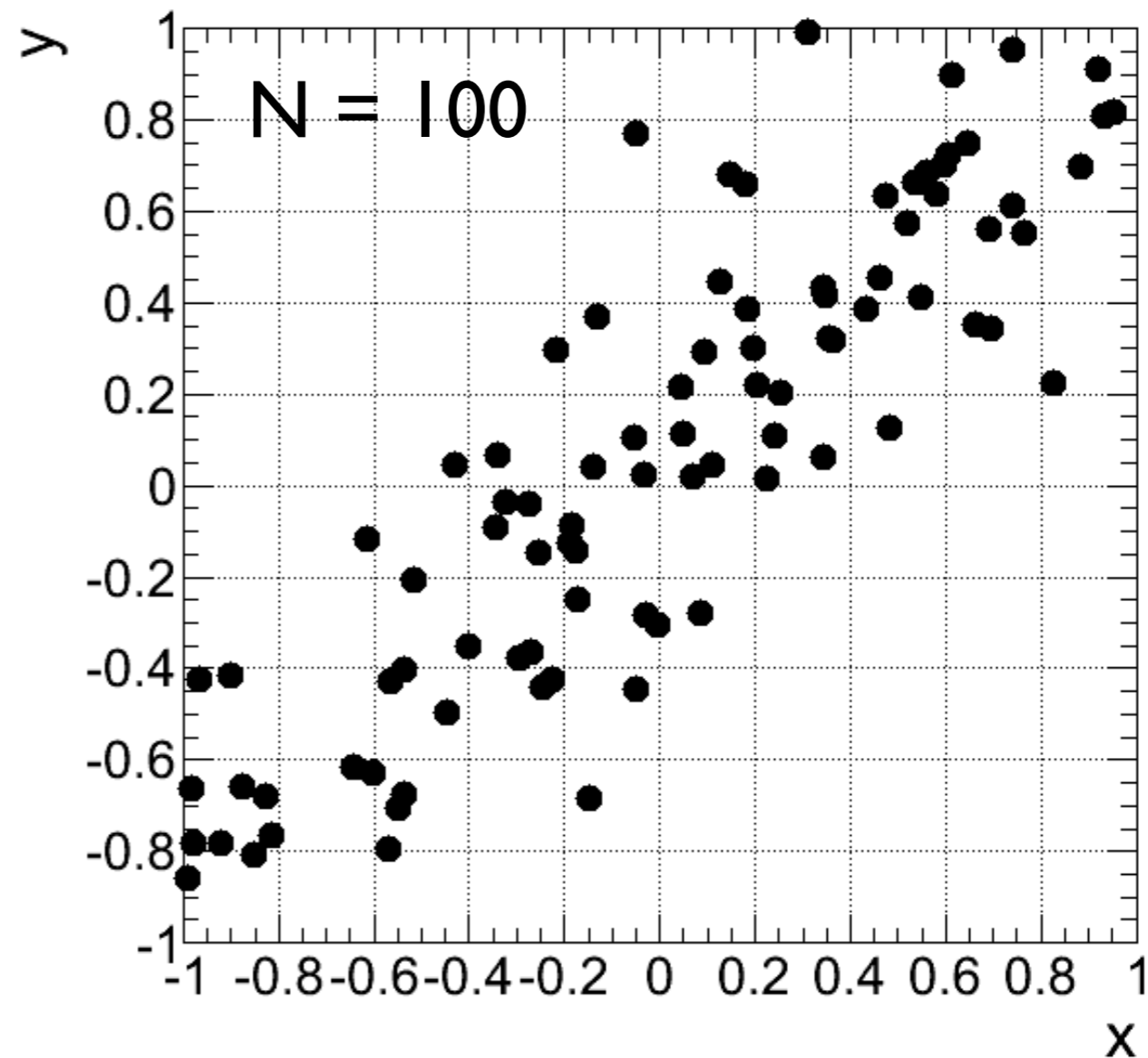
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

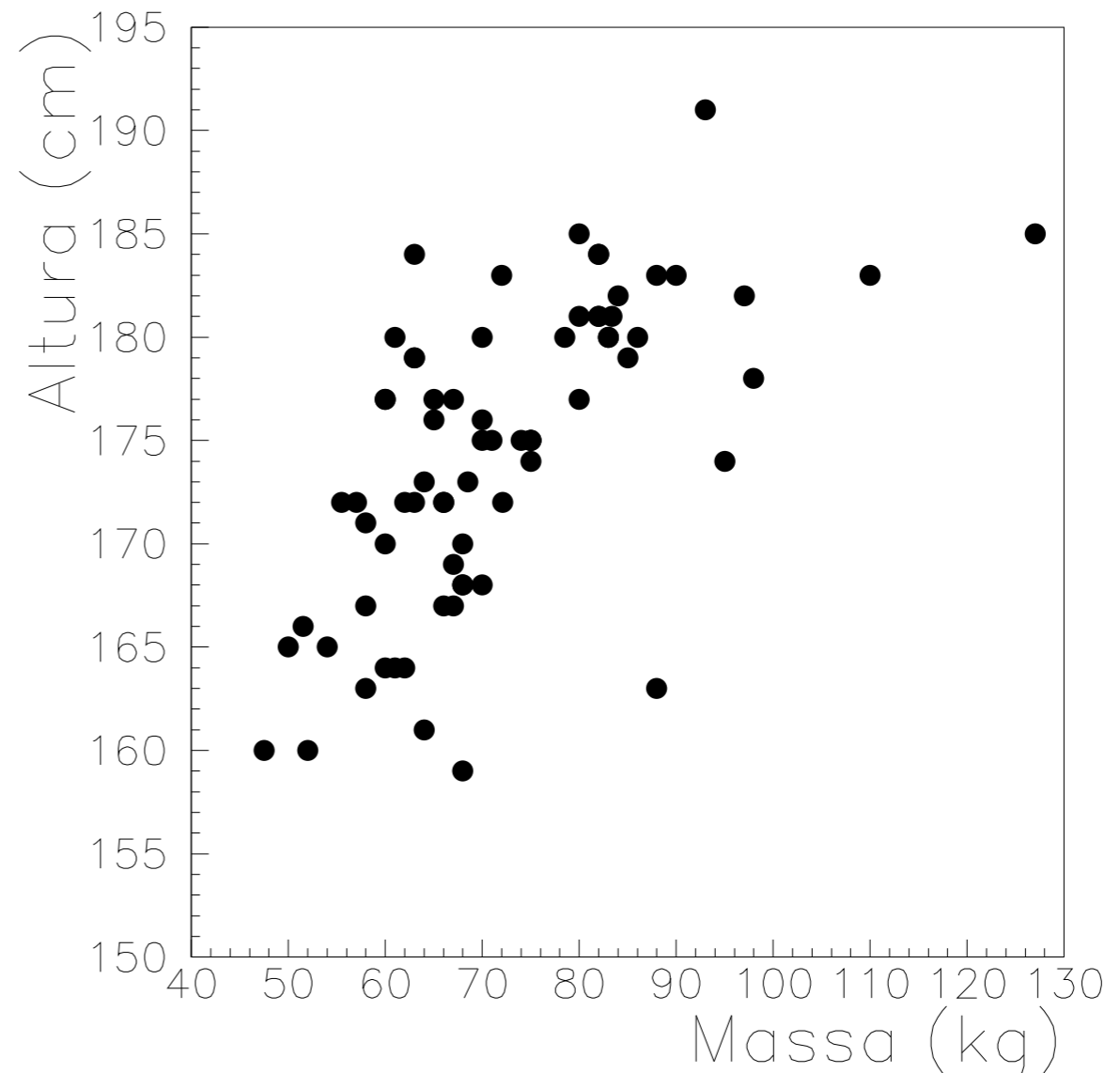
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

Outro exemplo: dados de altura e massa de uma lista de estudantes:



Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})}{N}\end{aligned}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

e que **não importa a ordem** das variáveis:

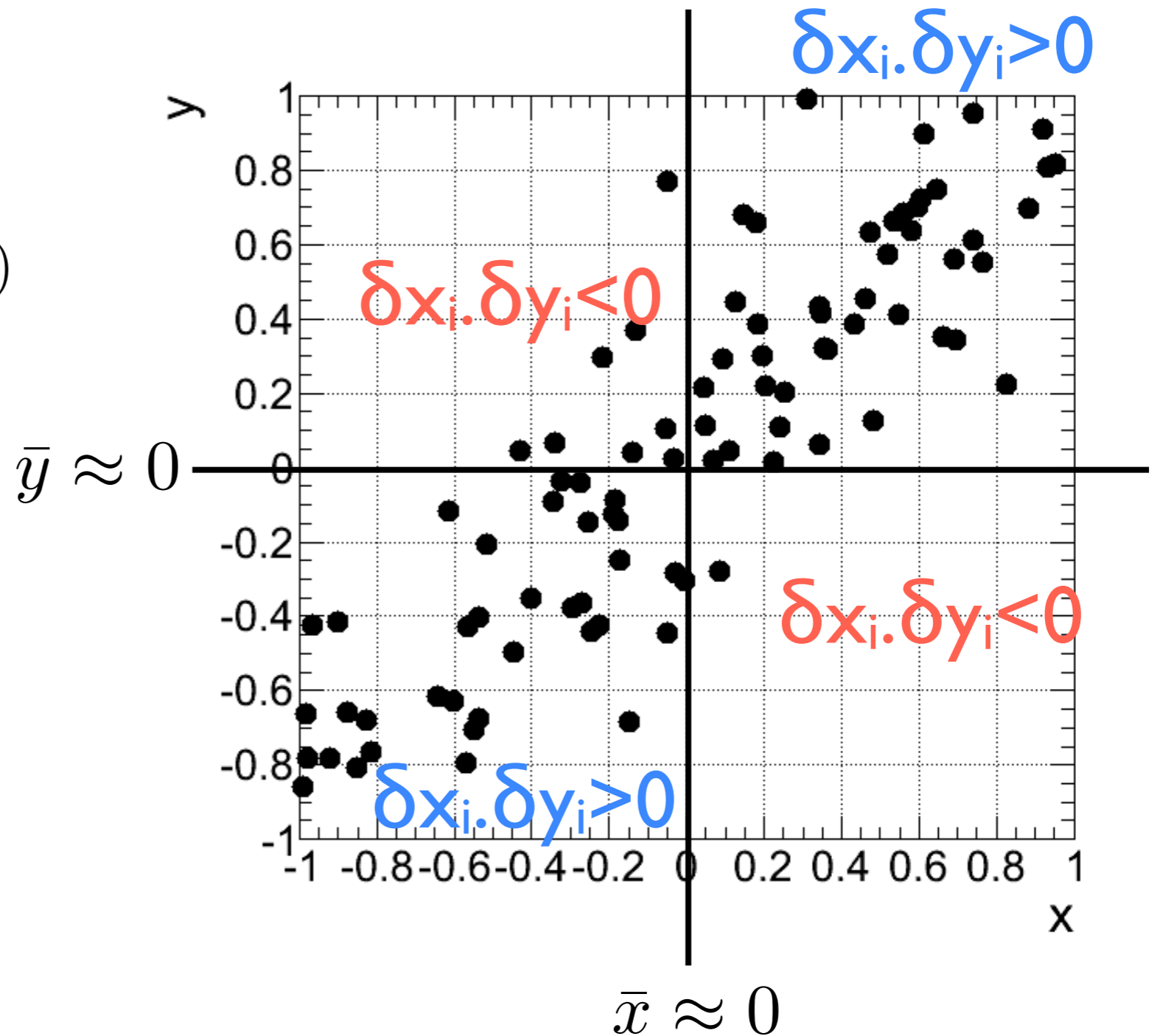
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

➔ $\sigma_{xy} > 0$

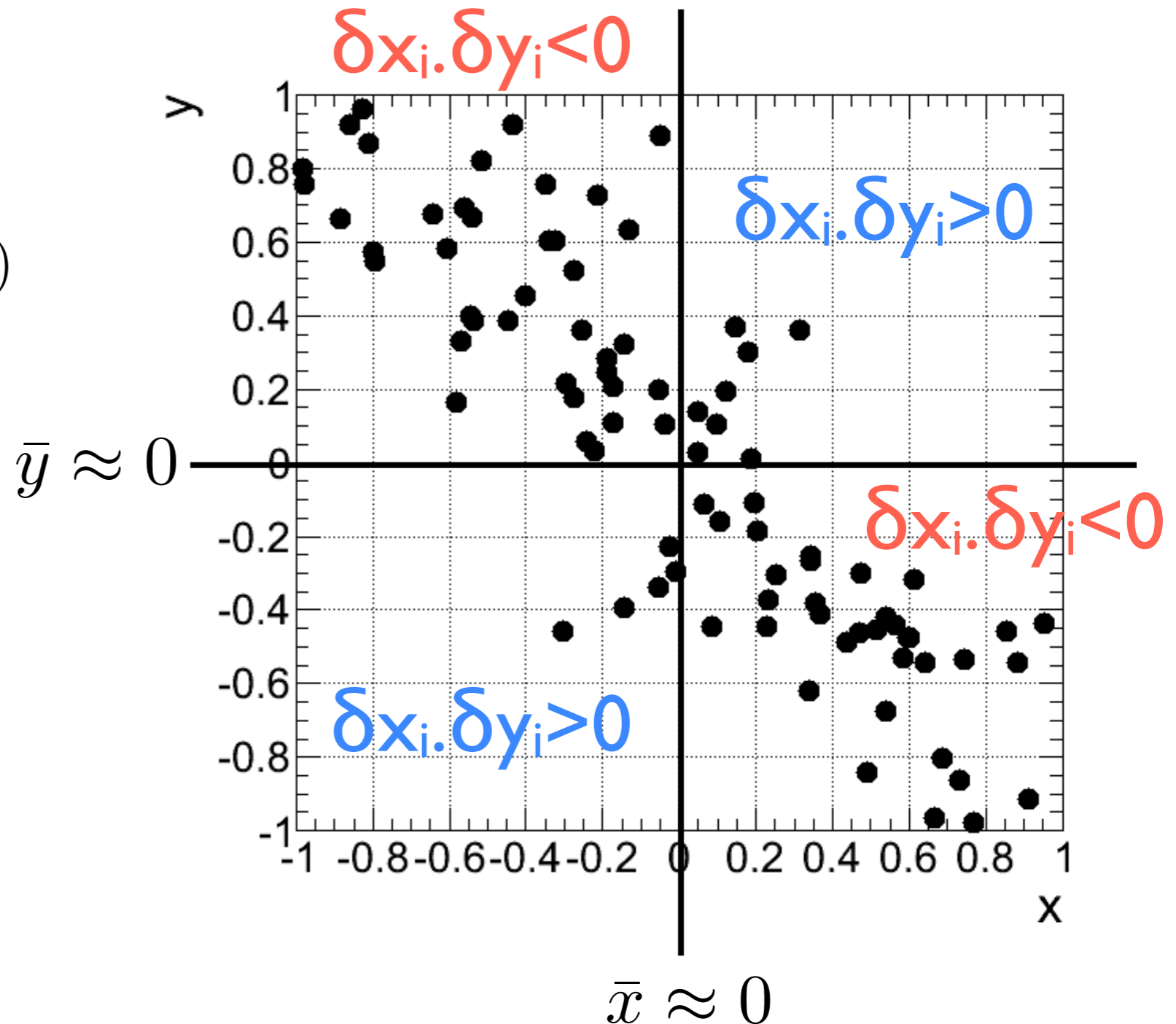


Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

➔ $\sigma_{xy} < 0$



Parâmetros de correlação

ii) *Coeficiente de correlação linear de Pearson*: covariância entre duas variáveis, dividida por seus desvios padrão

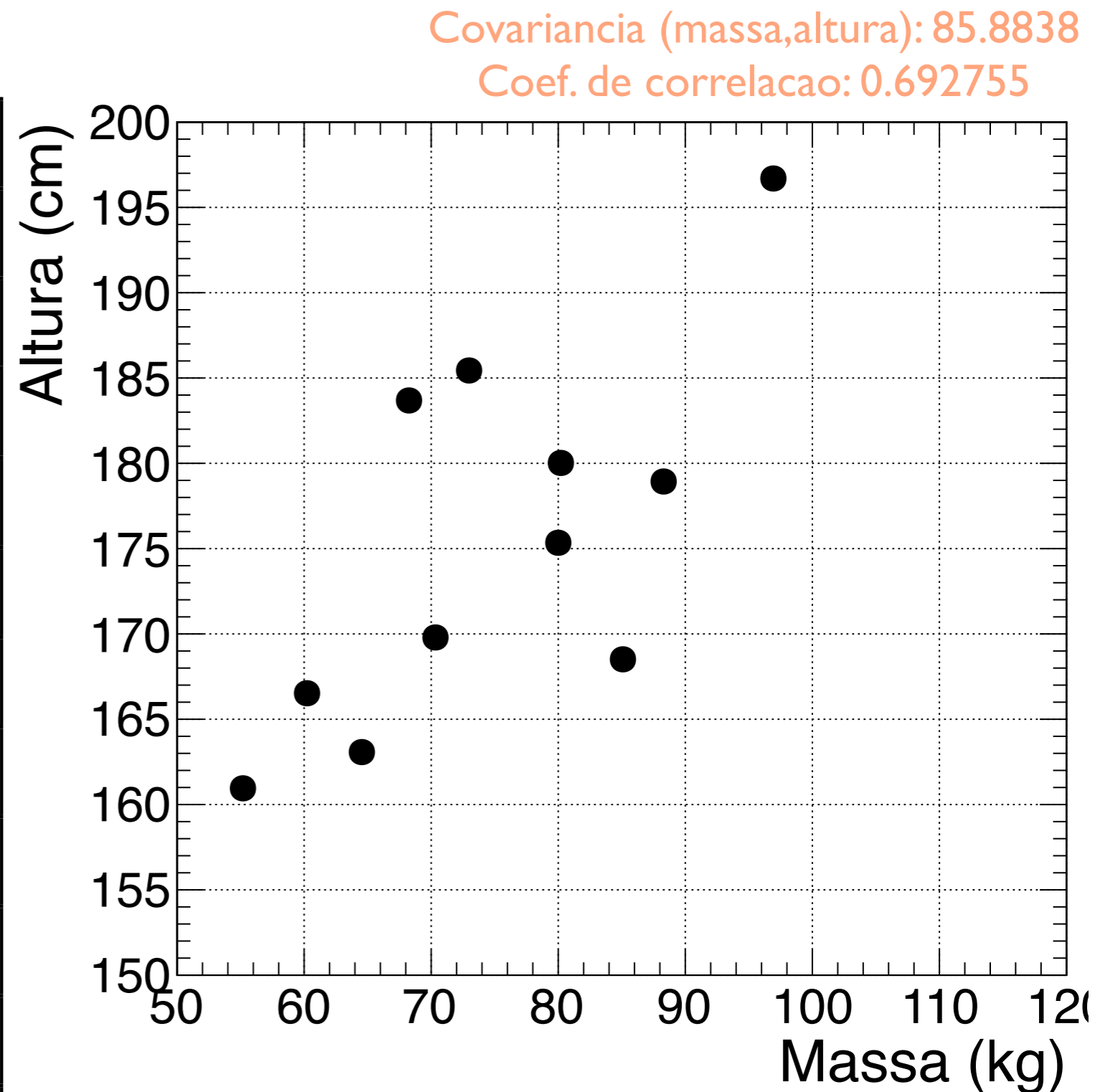
$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq r \leq 1$$

Correlação linear, perfeita e positiva: $r = 1$

Correlação linear, perfeita e negativa: $r = -1$

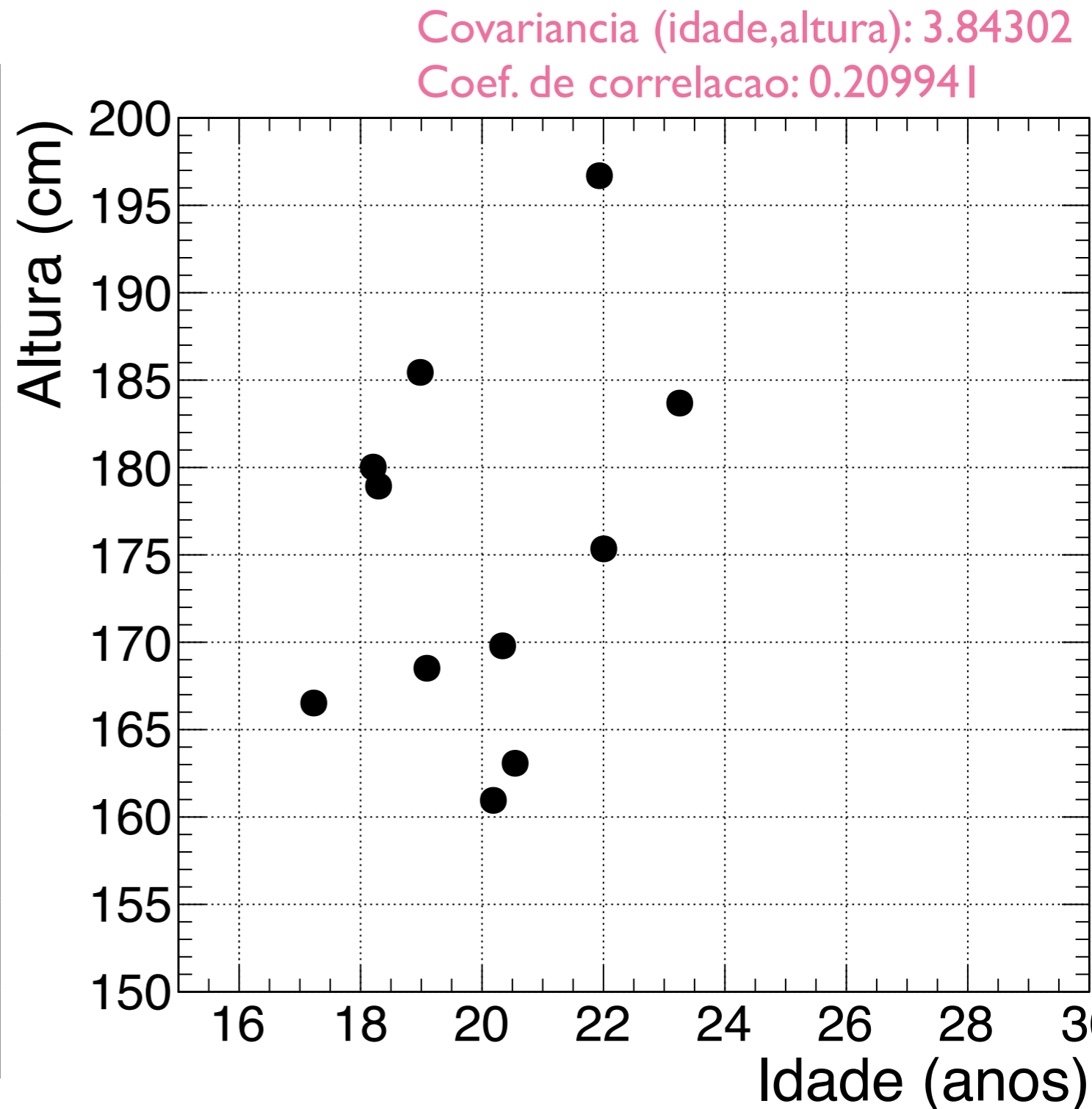
Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Massa (kg)	Altura (cm)
1	64	163
2	85	168
3	96	196
4	60	166
5	80	175
6	55	160
7	68	183
8	70	169
9	80	180
10	72	185
11	88	178



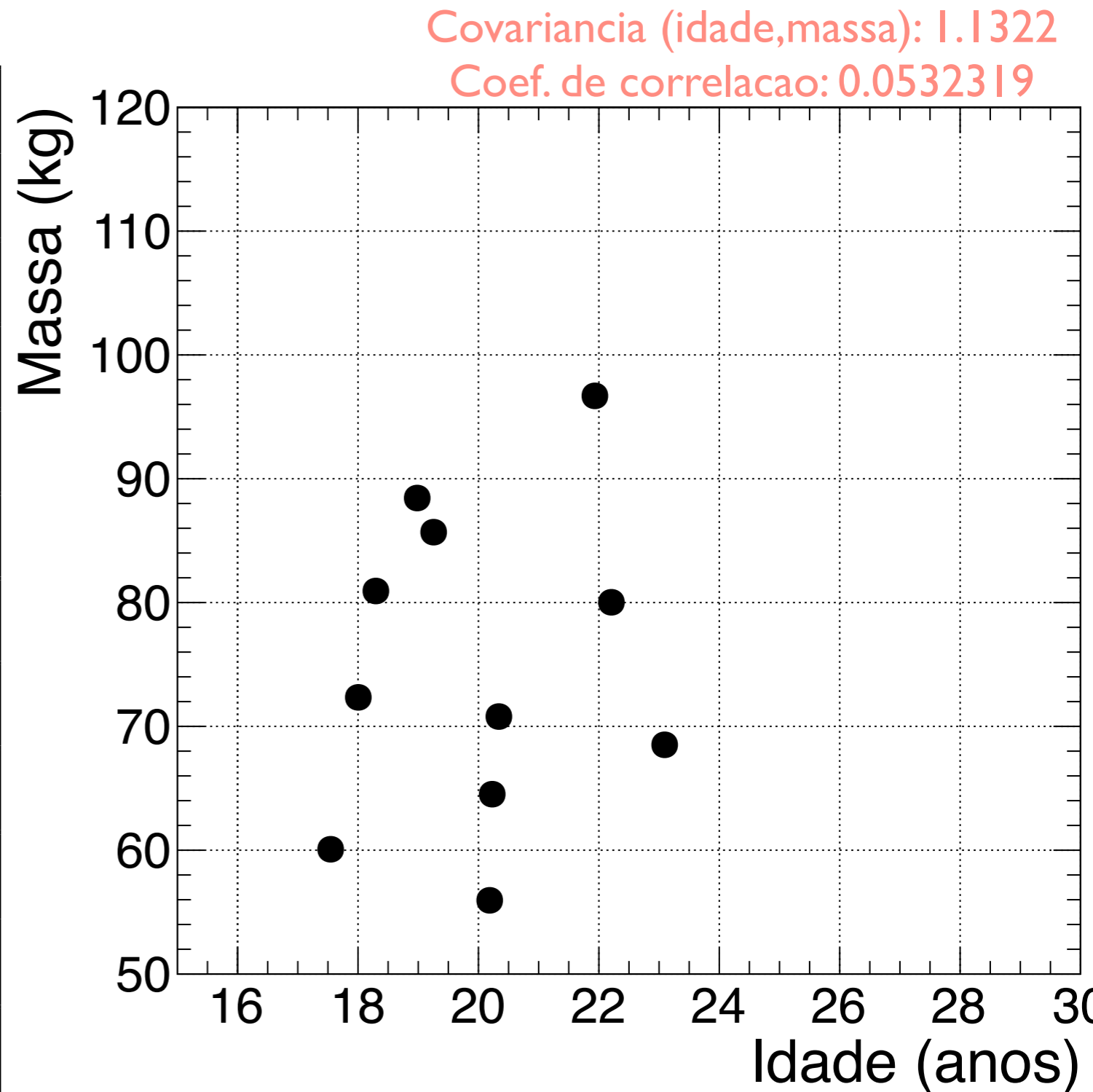
Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Idade (anos)	Altura (cm)
1	20	163
2	19	168
3	21	196
4	17	166
5	22	175
6	20	160
7	23	183
8	20	169
9	18	180
10	18	185
11	18	178



Atividade de aula - Idade, massa e altura

Estudante	Idade (anos)	Massa (kg)
1	20	64
2	19	85
3	21	96
4	17	60
5	22	80
6	20	55
7	23	68
8	20	70
9	18	80
10	18	72
11	18	88



Exercício (2.5.4):

aluno	Nota Mecânica	Nota Eletricidade
1	42	75
2	57	70
3	15	40
4	74	56
5	23	50
6	20	61
7	5	42
8	60	54
9	11	32
10	12	55
11	45	76
12	75	60

Mecânica

Média: 36,58

Desvio padrão: 24,36

Eletricidade

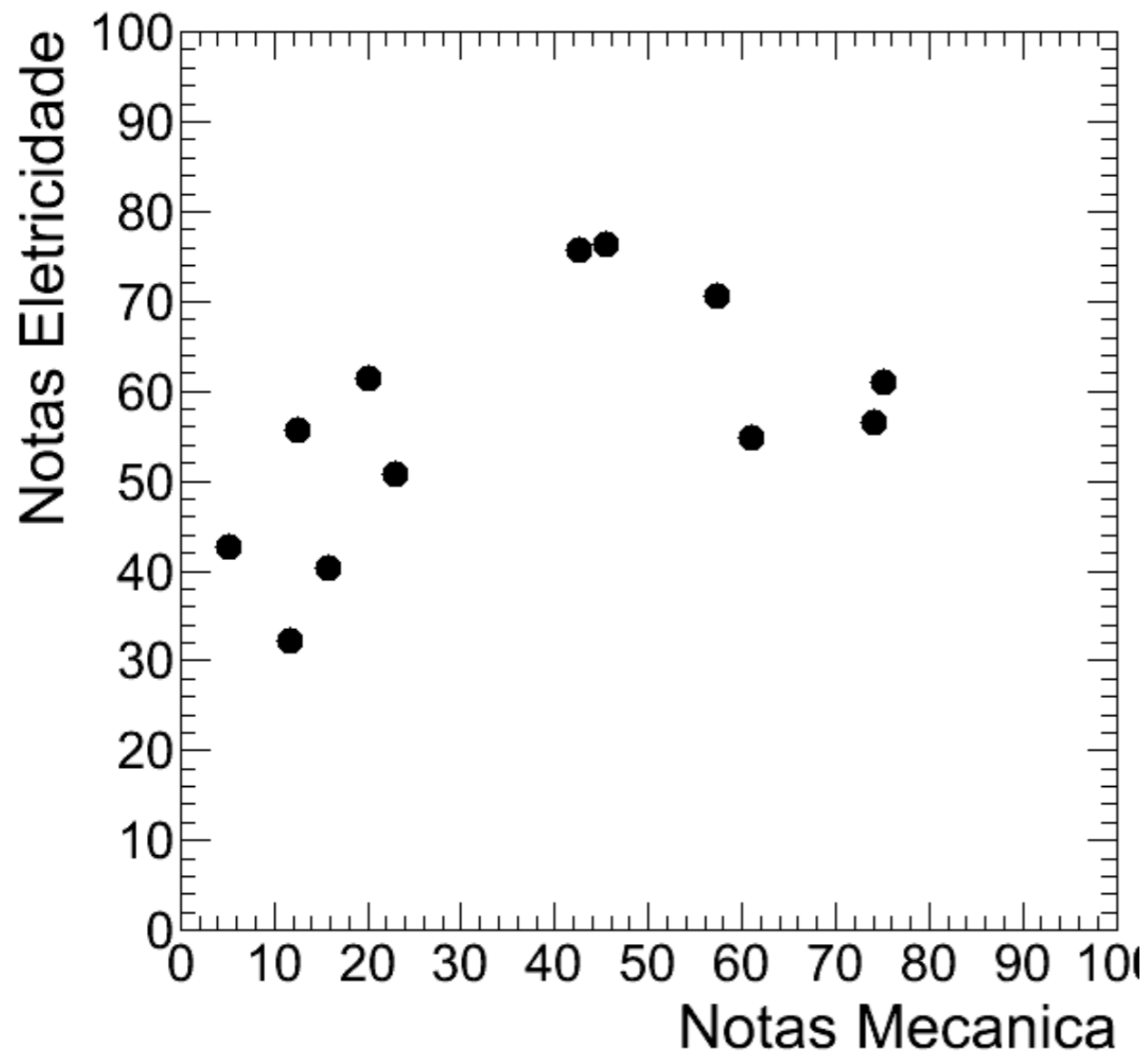
Média: 55,92

Desvio padrão: 13,12

Covariância: 174,05

Coef. de correlação: 0,54

Exercício (2.5.4):



Mecânica

Média: 36,58

Desvio padrão: 24,36

Eletricidade

Média: 55,92

Desvio padrão: 13,12

Covariância: 174,05

Coef. de correlação: 0,54

Exercício (2.5.5):

Velocidade (km/h)	Gasolina (l)
10	21
20	13
30	10
40	8
50	7
60	5,9
70	6,3
80	6,9
90	7,6
100	8,3
110	9
120	9,9
130	10,8
140	11,8

Velocidade (km/h)

Média: 75,00

Desvio padrão: 40,31

Gasolina (l)

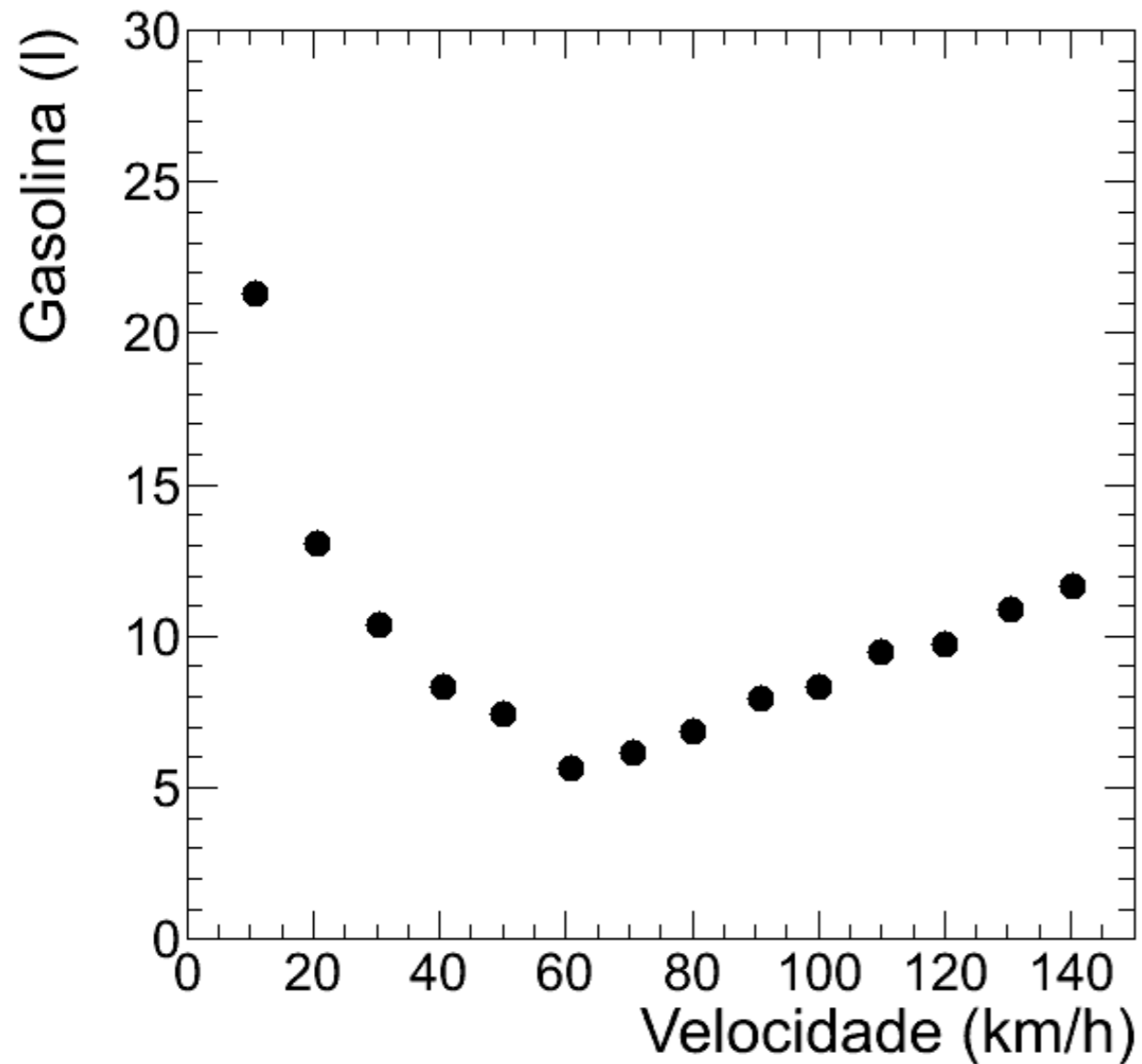
Média: 9,68

Desvio padrão: 3,73

Covariância: -44,82

Coef. de correlação: -0,30

Exercício (2.5.5):



Velocidade (km/h)

Média: 75,00

Desvio padrão: 40,3 l

Gasolina (l)

Média: 9,68

Desvio padrão: 3,73

Covariância: -44,82

Coef. de correlação: -0,30

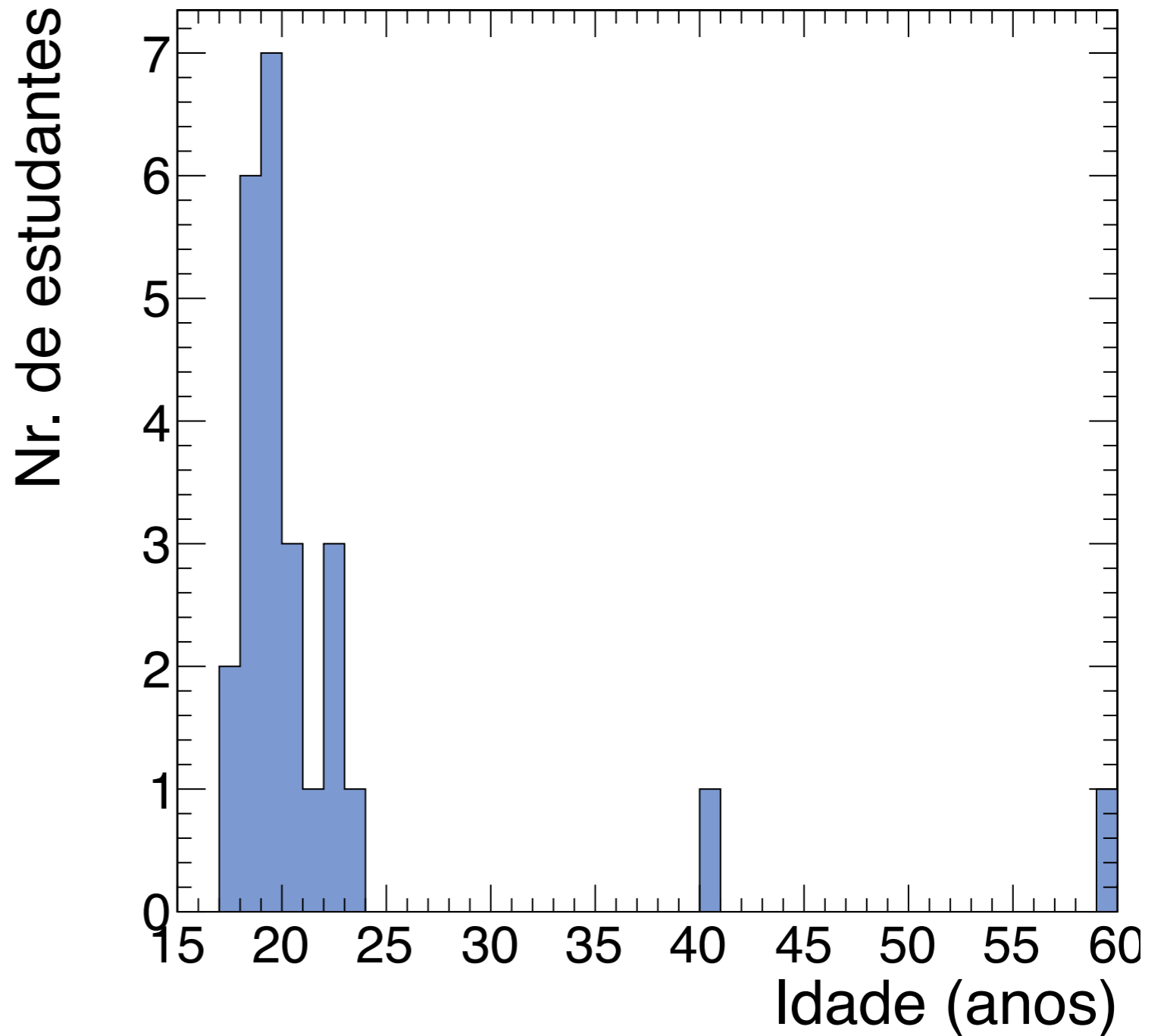
Pratica: Dados da Turma 6 FG 2015/2

Amostra completa (25 estudantes)

Estudante	Idade (anos)	Massa (kg)	Altura (cm)
1	20	64	163
2	19	85	168
3	21	96	196
4	17	60	166
5	22	80	175
6	20	55	160
7	23	68	183
8	20	70	169
9	18	80	180
10	18	72	185
11	18	88	178
12	19	75	181
13	59	77	170
14	17	72	175
15	22	77	172
16	19	51	155
17	19	56	163
18	19	60	157
19	18	80	170
20	22	72	175
21	40	108	179
22	19	80	190
23	19	64	154
24	18	65	179
25	18	80	175

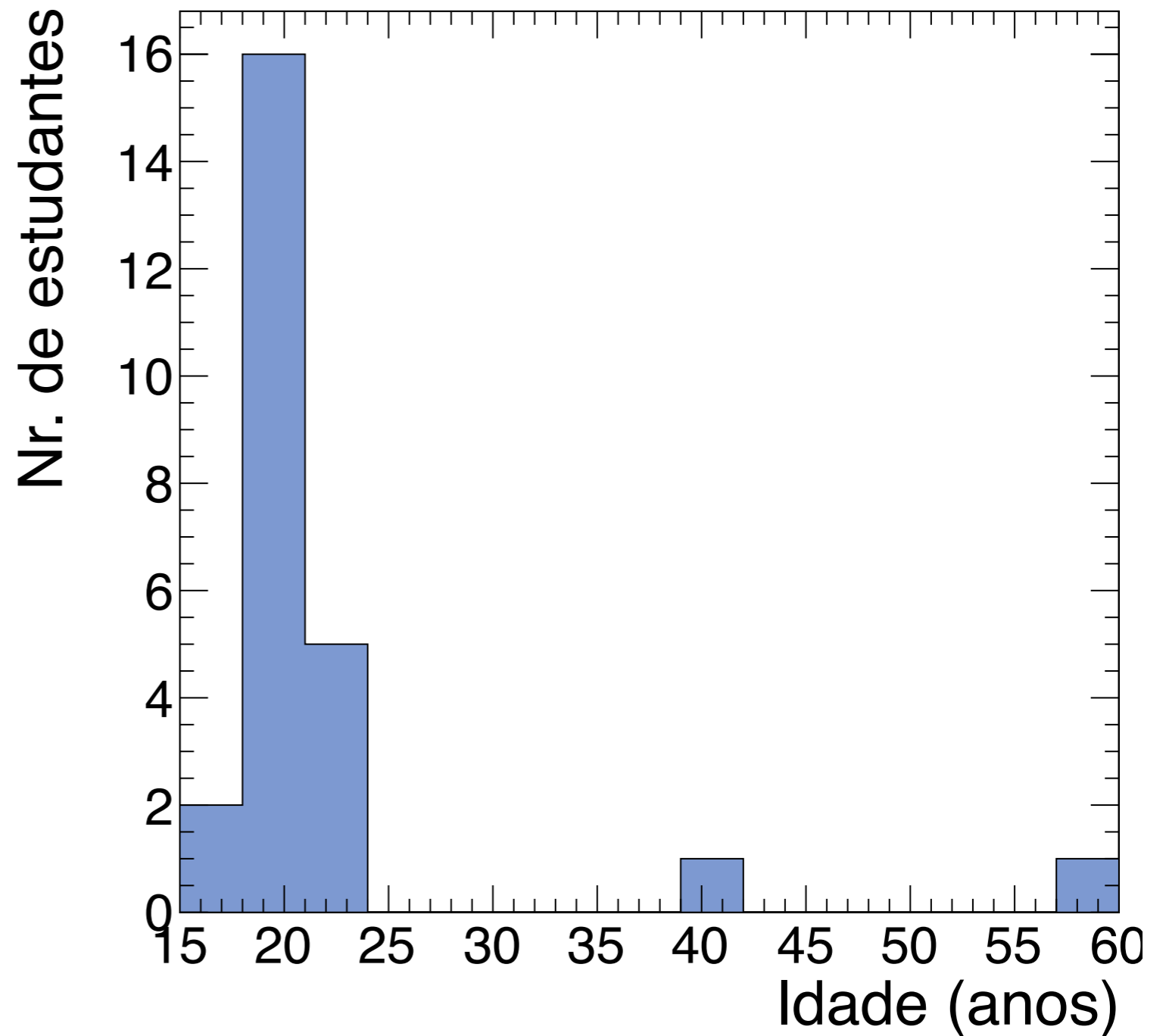
Idades

Idade (anos)	Frequencia
[15,16)	0
[16,17)	0
[17,18)	2
[18,19)	6
[19,20)	7
[20,21)	3
[21,22)	1
[22,23)	3
[23,24)	1
[24,25)...[39,40)	0
[40,41)	1
[41,42)...[58,59)	0
[59,60)	1



Idades

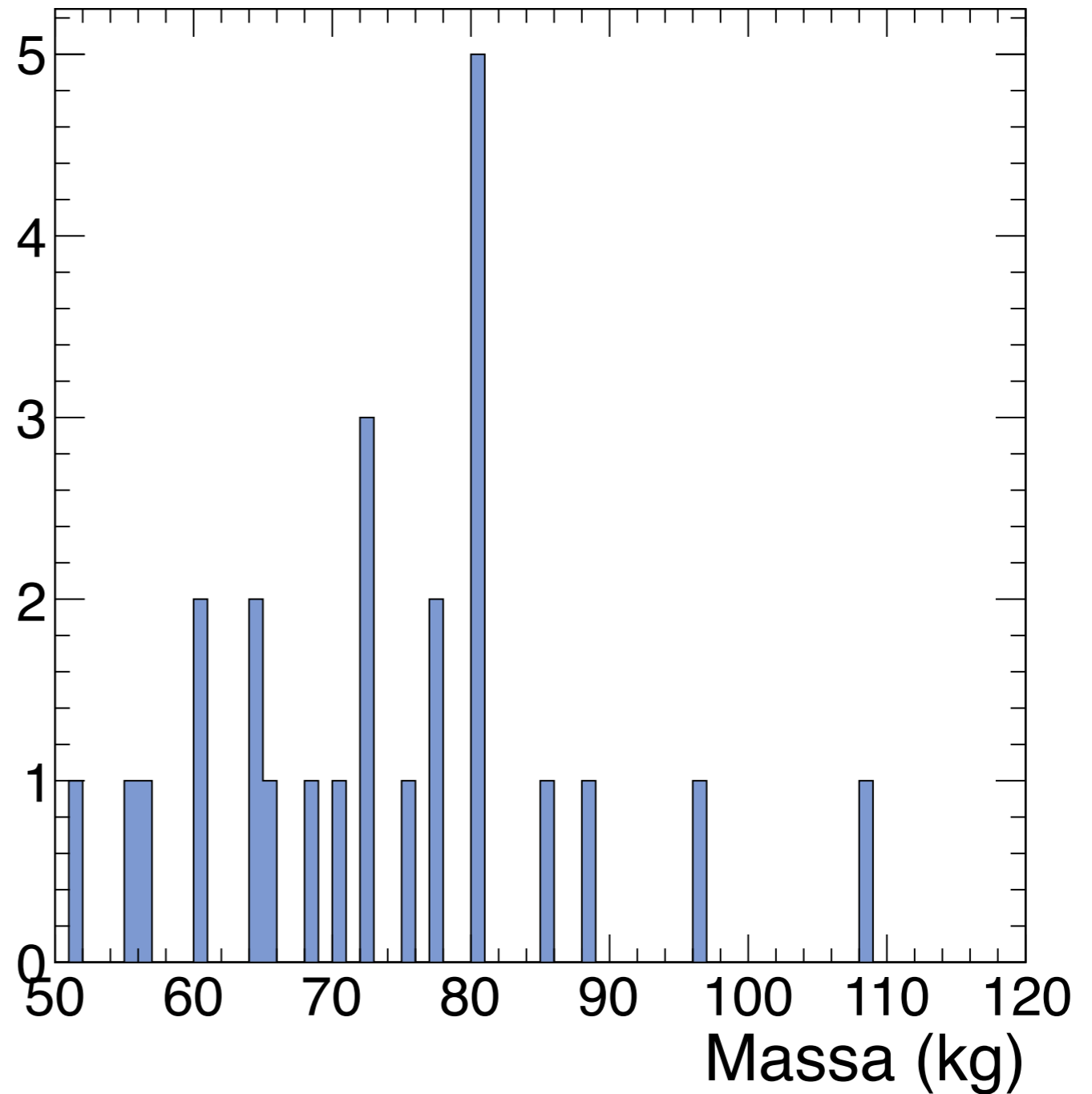
Idade (anos)	Frequencia
[15,18)	2
[18,21)	16
[21,24)	5
[24,27)...[36,39)	0
[39,42)	1
[42,45)...[54,57)	0
[57,60)	1



Massas

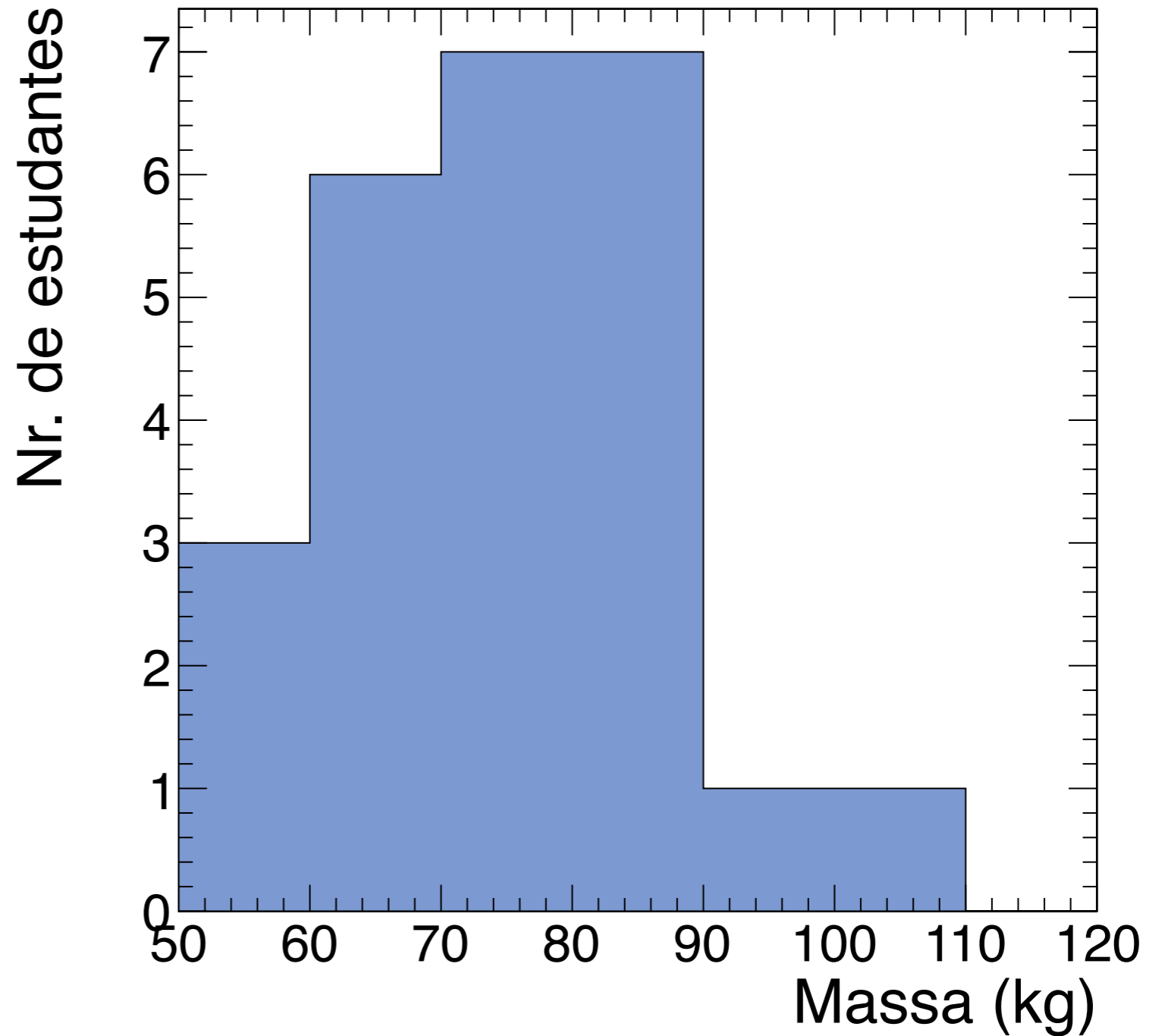
Estudante	Massa (kg)
1	64
2	85
3	96
4	60
5	80
6	55
7	68
8	70
9	80
10	72
11	88
12	75
13	77
14	72
15	77
16	51
17	56
18	60
19	80
20	72
21	108
22	80
23	64
24	65
25	80

Nr. de estudantes



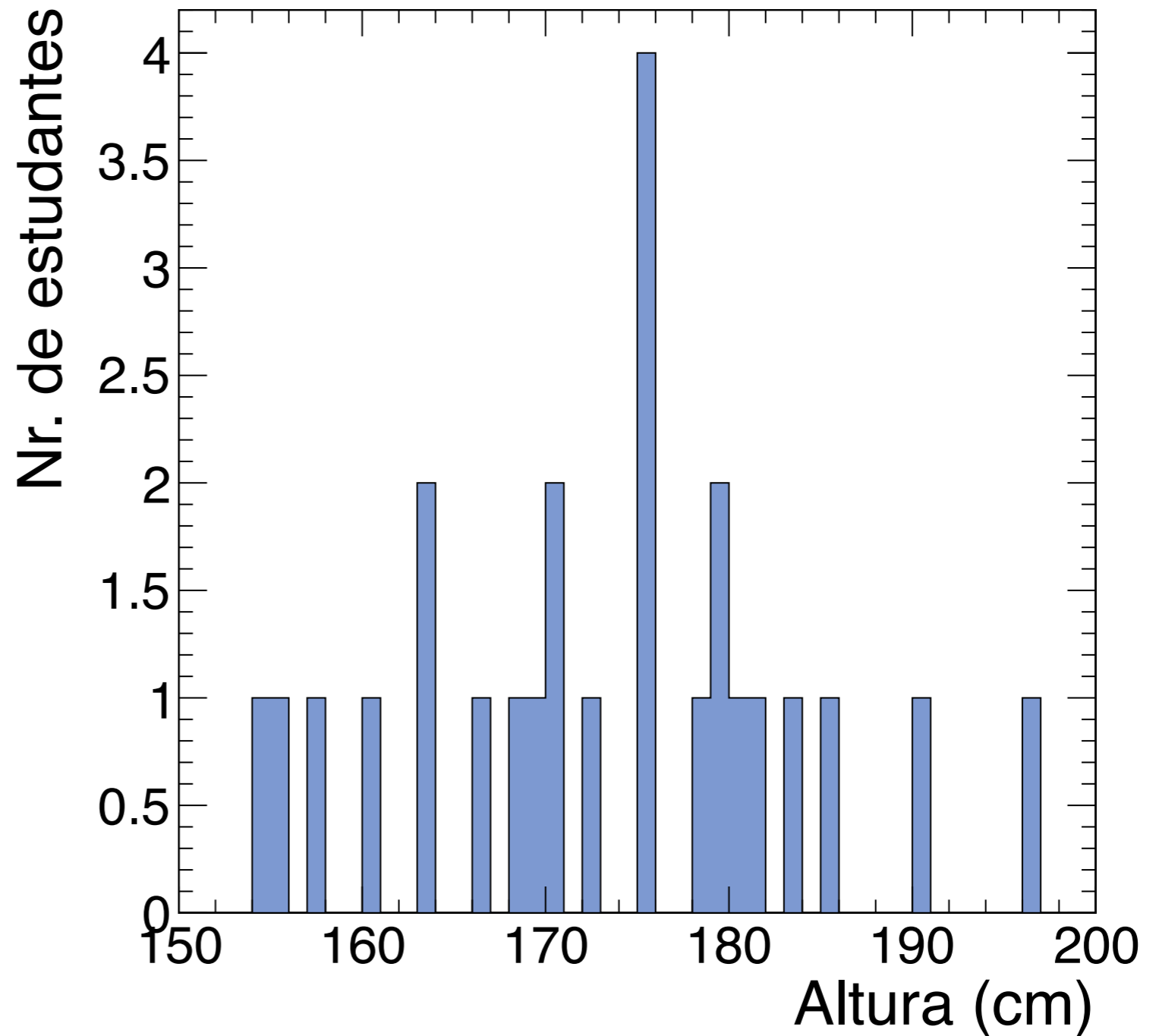
Massas

Massa (Kg)	Frequencia
[50,60)	3
[60,70)	6
[70,80)	7
[80,90)	7
[90,100)	1
[100,110)	1



Alturas

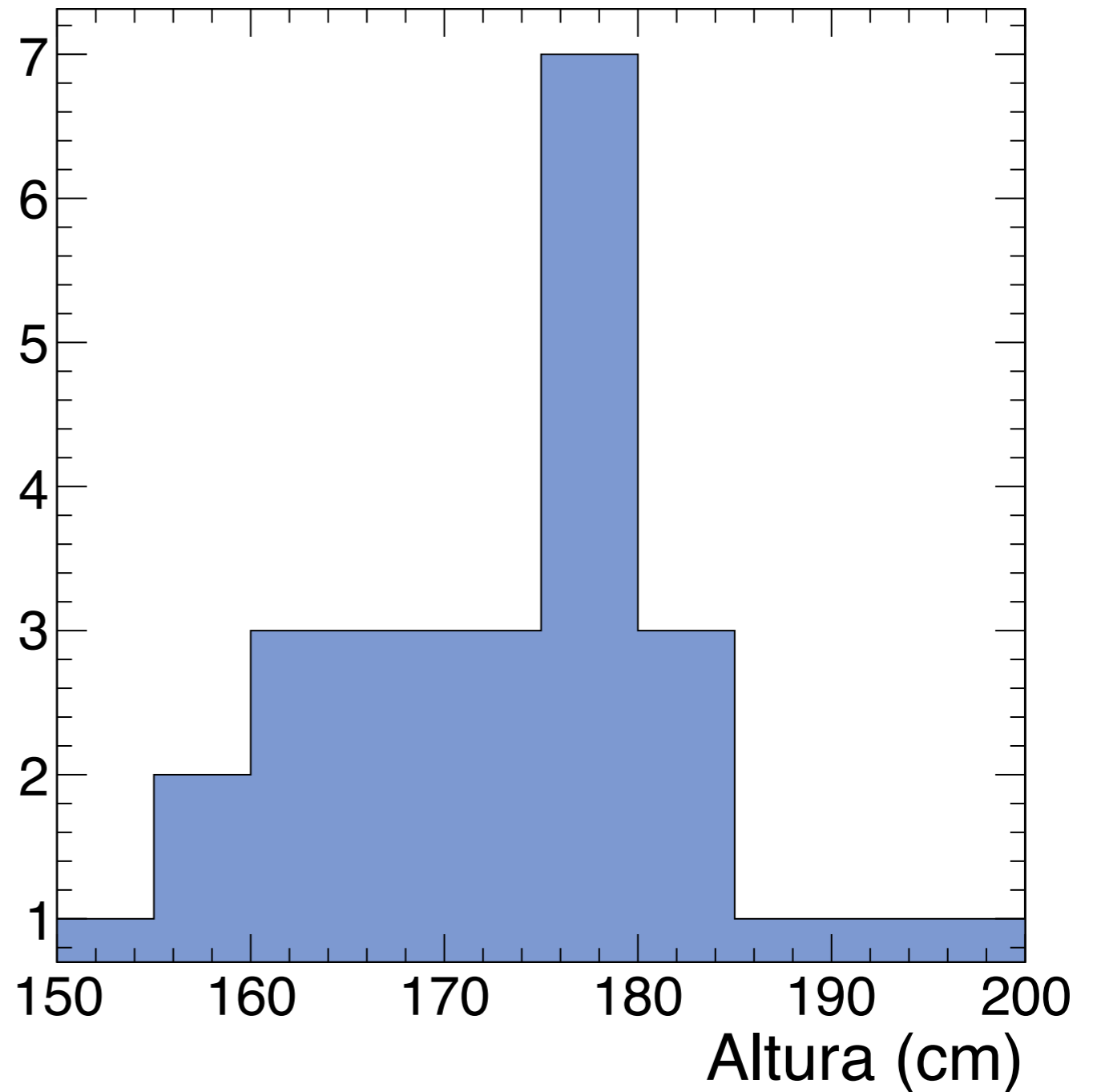
Estudante	Altura (cm)
1	163
2	168
3	196
4	166
5	175
6	160
7	183
8	169
9	180
10	185
11	178
12	181
13	170
14	175
15	172
16	155
17	163
18	157
19	170
20	175
21	179
22	190
23	154
24	179
25	175



Alturas

Altura (cm)	Frequencia
[150,155)	1
[155,160)	2
[160,165)	3
[165,170)	3
[170,175)	3
[175,180)	7
[180,185)	3
[185,190)	1
[190,195)	1
[195,200)	1

Nr. de estudantes



Parametros de posição e dispersão

amostra idade				
$\langle x \rangle = 21,76$ anos	$x_{\text{mod}} = 19$ anos	$x_{\text{rms}} = 23,45$ anos	$x_{\text{med}} = 19$ anos	$\langle x^2 \rangle = 550,08$ anos ²
$x_{\text{min}} = 17$ anos $x_{\text{max}} = 59$ anos	$A = 42$ anos	$\overline{\delta x} = 4,60$ anos	$\sigma_x^2 = 76,58$ anos ²	$\sigma_x = 8,75$ anos

amostra massa				
$\langle x \rangle = 73,4$ Kg	$x_{\text{mod}} = 80$ Kg	$x_{\text{rms}} = 74,51$ Kg	$x_{\text{med}} = 72$ Kg	$\langle x^2 \rangle = 5551,48$ Kg ²
$x_{\text{min}} = 51$ Kg $x_{\text{max}} = 108$ Kg	$A = 57$ Kg	$\overline{\delta x} = 10,02$ Kg	$\sigma_x^2 = 163,92$ Kg ²	$\sigma_x = 12,8$ Kg

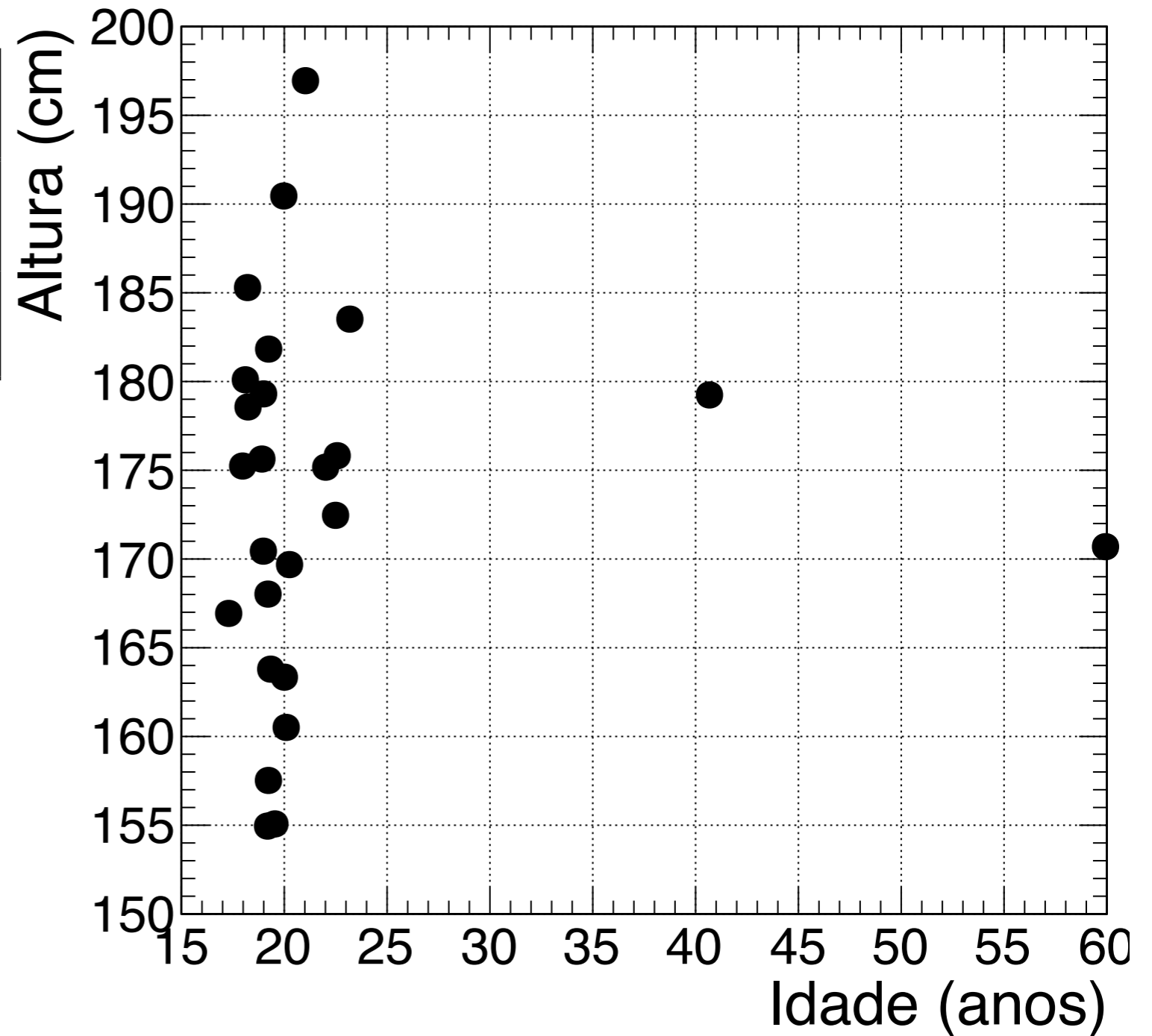
amostra altura				
$\langle x \rangle = 172,72$ cm	$x_{\text{mod}} = 175$ cm	$x_{\text{rms}} = 173,03$ cm	$x_{\text{med}} = 175$ cm	$\langle x^2 \rangle = 29940,4$ cm ²
$x_{\text{min}} = 154$ cm $x_{\text{max}} = 196$ cm	$A = 42$ cm	$\overline{\delta x} = 8,45$ cm	$\sigma_x^2 = 108,2$ cm ²	$\sigma_x = 10,4$ cm

Covariância e correlação

Altura vs Idade

$$\sigma_{xy} = 2,97 \text{ anos} \times \text{cm}$$

$$r = 0,03$$

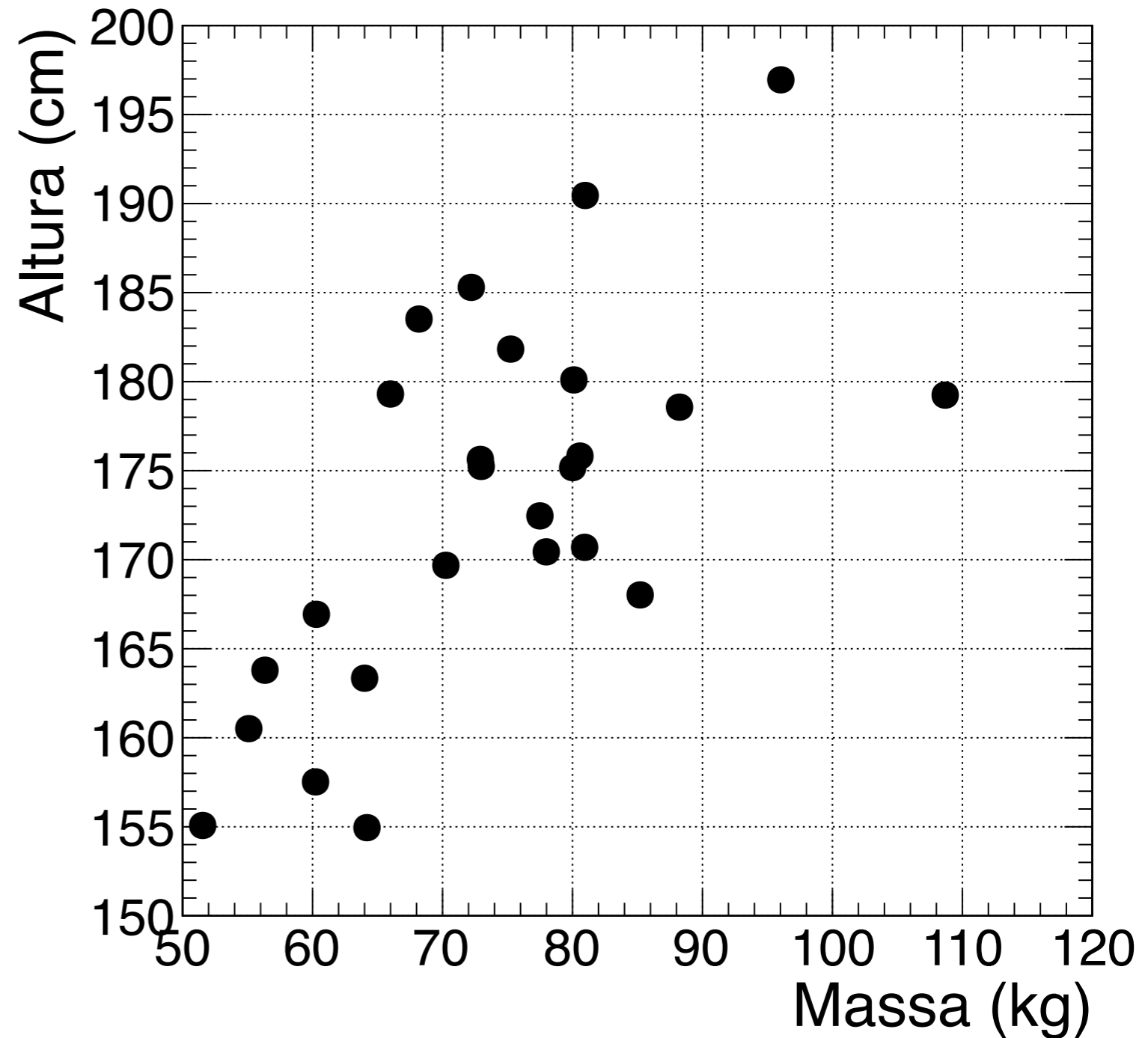


Covariância e correlação

Altura vs Massa

$$\sigma_{xy} = 87,59 \text{ Kg} \times \text{cm}$$

$$r = 0,66$$



Covariância e correlação

Massa vs Idade

$$\sigma_{xy} = 35,78 \text{ anos} \times \text{Kg}$$

$$r = 0,32$$

