Física Geral - Laboratório

Aula 8: Estimativas e erros em medidas indiretas: Ajuste de funções

Medidas indiretas: Ajuste de funções

- Ajuste de funções

$$y = f\left(x; a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$$

Medidas de duas grandezas x e y:

$\left\{\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \ldots, \left(x_N, y_N\right)\right\}$

Estimativa dos parâmetros
(a partir de uma relação
funcional postulada)

Medidas indiretas: Ajuste de funções

- Ajuste de funções

$$y = f\left(x; a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$$

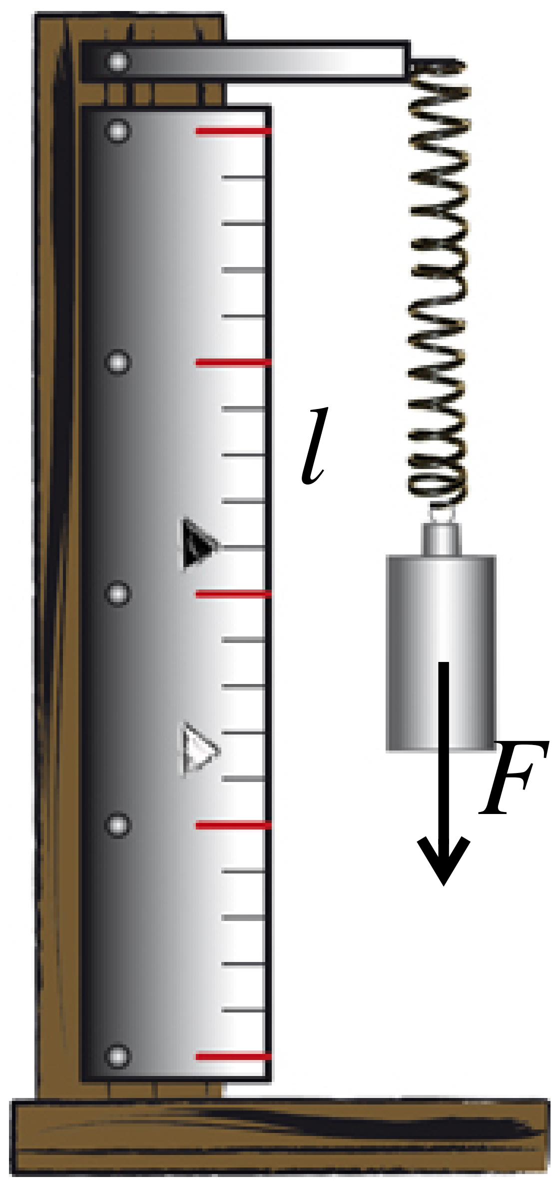
Medidas de duas grandezas x e y:

$$\left\{\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \ldots, \left(x_N, y_N\right)\right\}$$

Estimativa dos parâmetros (a partir de uma relação funcional postulada)

Queremos obter: $a_1 \pm \sigma_{a_1}, \ldots, a_p \pm \sigma_{a_p}$

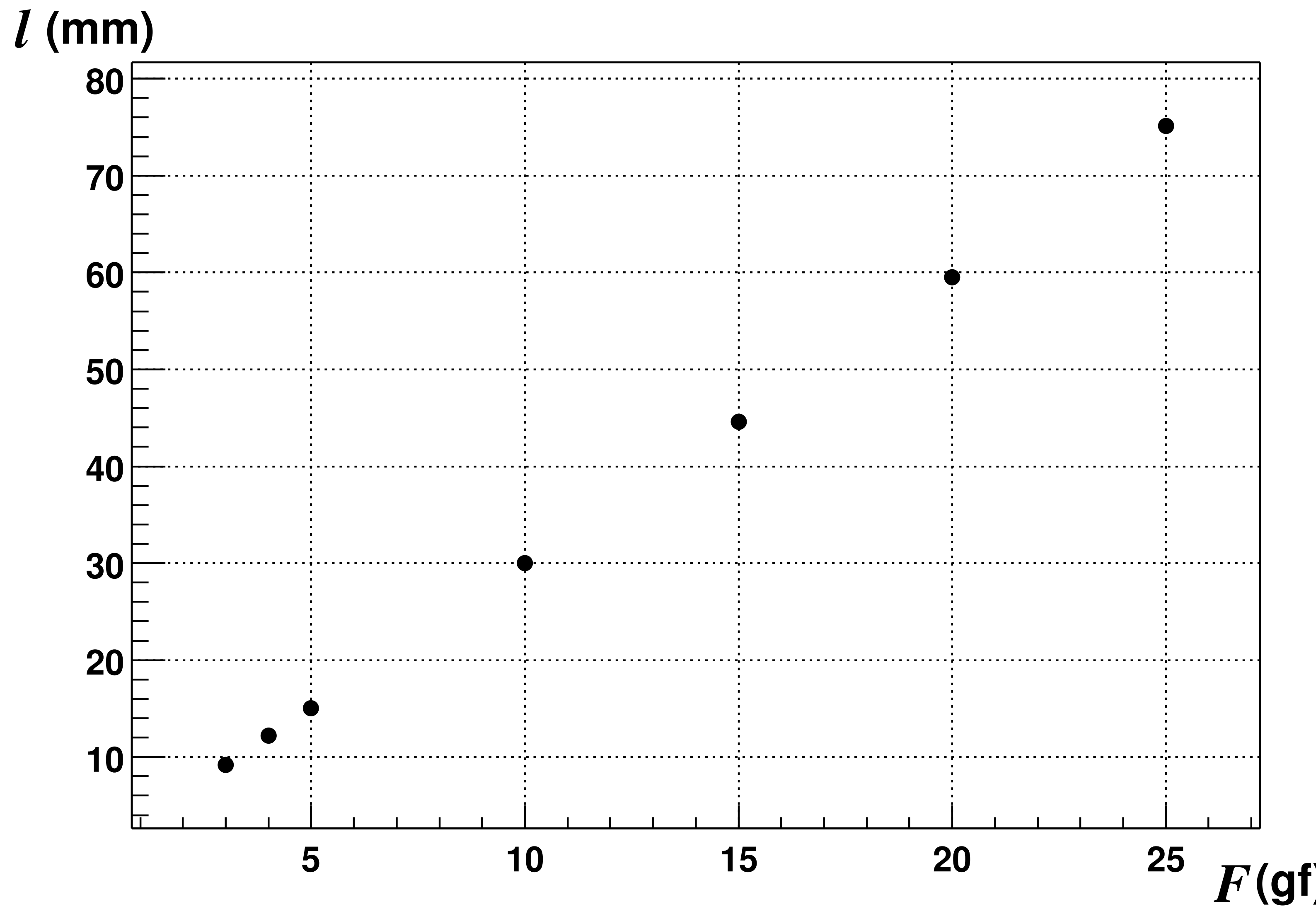
Exemplo: dinamômetro de mola



F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

Exemplo: dinamômetro de mola

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Regressão é uma técnica que permite estabelecer uma relação entre um par…

Exemplo: dinamômetro de mola

- O comportamento ideal de uma mola nos diz que a sua elongação é relacionada com a magnitude da força aplicada na mesma:

$$l = a \cdot F + b$$

Equação de uma reta

$$y = f\left(x; a, b\right) = a \cdot x + b$$

- Queremos obter estimativas para os parâmetros da reta (a,b). Para isso utilizamos um método chamado de "Método dos Mínimos Quadrados"

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

- Queremos minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre a medidas observadas e os valores previstos pela relação funcional entre y e x:

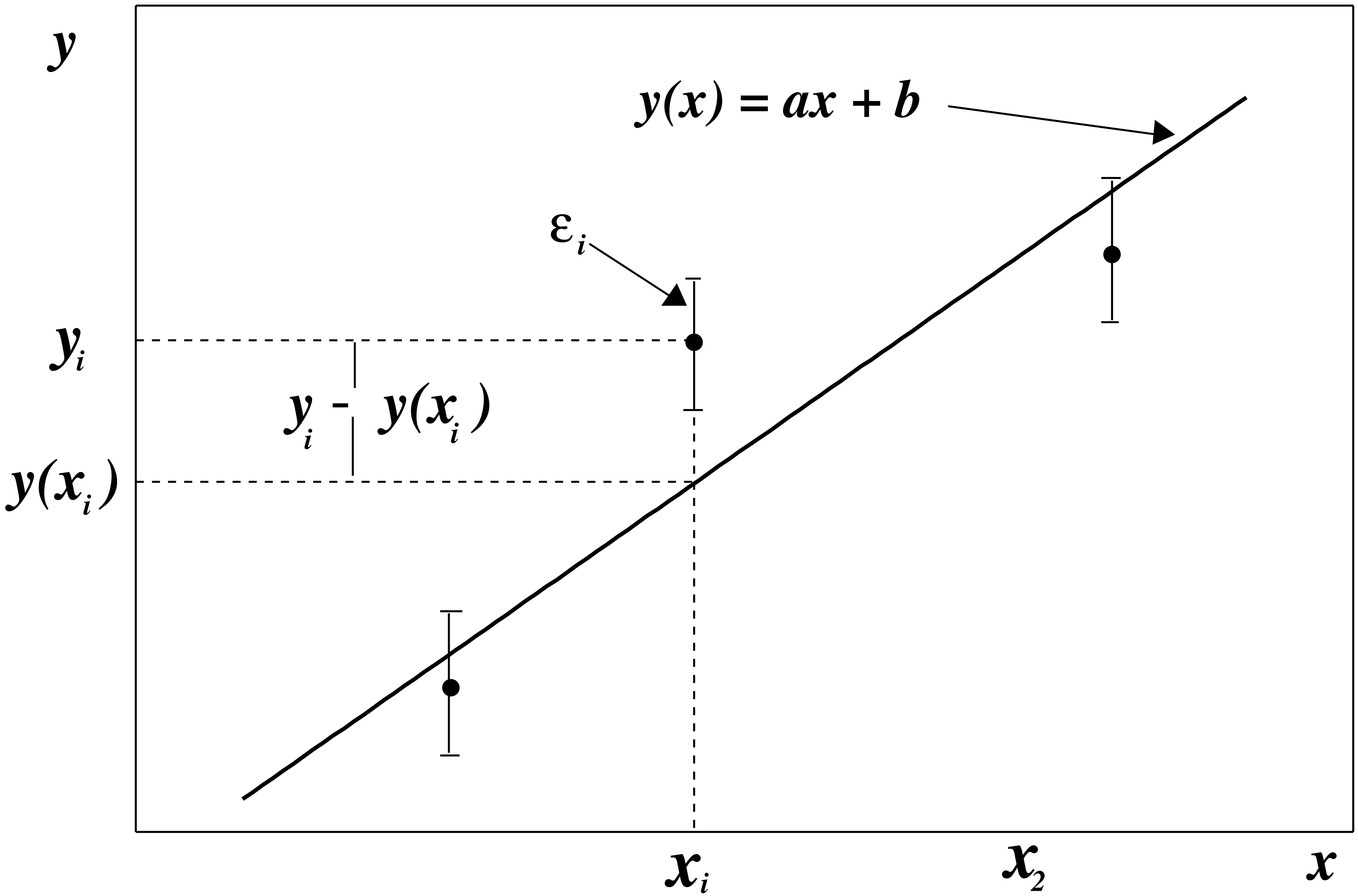
$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$$

Medida observada

$$y = f(x_i; a, b) = ax_i + b$$

Obs.: Quando a relação funcional postulada entre as medidas é linear (ou seja elas são relacionadas pela eq. de uma reta), chamamos o método de "Ajuste linear"

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear



Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

- No caso anterior assumimos que as incertezas nas medidas de y e x são constantes. Em geral devemos considerar o erro em cada medida (σ_i):

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Erro efetivo em cada medida

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

- Podemos mostrar (Exercício - Ver Apêndice F do livro texto) que as estimativas dos parâmetros e suas incertezas são dadas por:

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

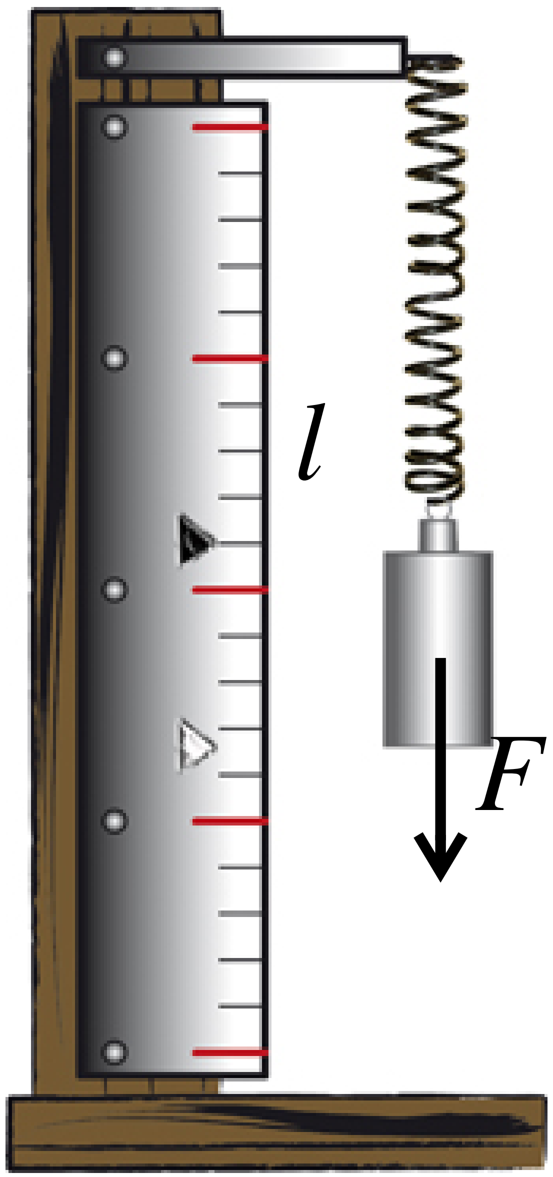
$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x}\frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2}{N-2}} = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{N-2}\left(1 - r^2\right)}$$

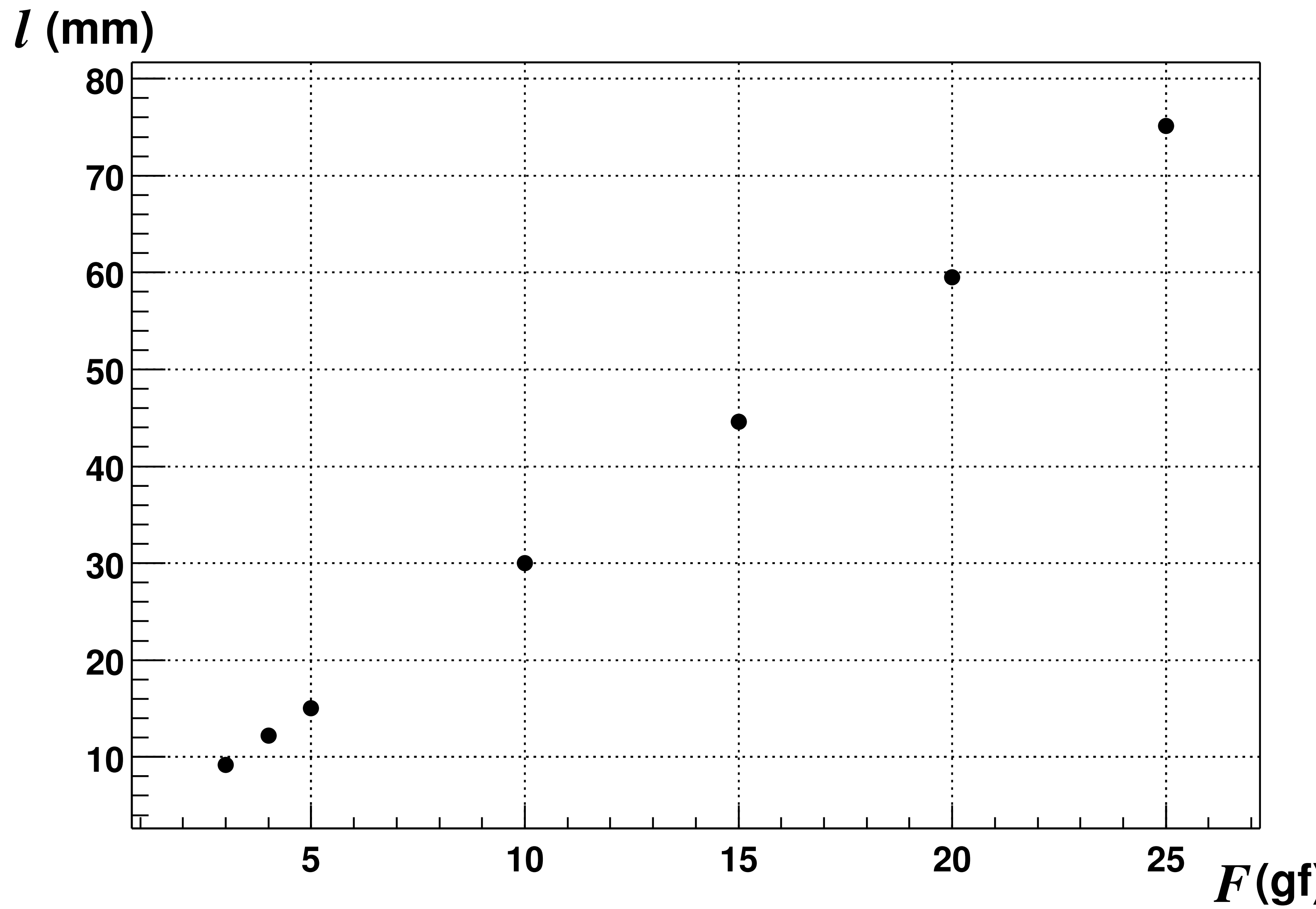
Exemplo: dinamômetro de mola



F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

Exemplo: dinamômetro de mola

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Exemplo: dinamômetro de mola

- O comportamento ideal de uma mola nos diz que a sua elongação é relacionada com a magnitude da força aplicada na mesma:

$$l = a \cdot F + b$$

Equação de uma reta

$$y = f\left(x; a, b\right) = a \cdot x + b$$

Exemplo: organizando os dados

x_i (gf)	y_i (mm)	x_i^2	$x_i.y_i$	$[y_i - (ax_i + b)]$	$[y_i - (ax_i + b)]^2$
3	9.2	9	27.6	0.1101	0.0121
4	12.2	16	48.8	0.1270	0.0161
5	15	25	75	-0.0561	0.0032
10	30	100	300	0.0282	0.0008
15	44.6	225	669	-0.2874	0.0826
20	59.5	400	1190	-0.3031	0.0918
25	75.1	625	1877.5	0.3813	0.1454
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i.y_i$		$\Sigma[y_i - (ax_i + b)]^2$
82 (gf)	245.6 (mm)	1400 (gf²)	4187.9 (mm.gf)		0.3520 (mm²)

$(\Sigma x_i)/N$	$(\Sigma y_i)/N$	$(\Sigma x_i^2)/N$	$(\Sigma x_i.y_i)/N$
11.7143 (gf)	35.0857 (mm)	200.0000 (gf²)	598.2714 (mm.gf)

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{N-2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N-2}\,(1 - r^2)}$$

σ_{xy}	σ_x^2
187.2673	62.7755

ε_y
0.2653 (mm)

a	b	σ_a	σ_b
2.9831 (mm/gf)	0.1405 (mm)	0.0127 (mm/gf)	0.1790 (mm)

Exemplo: resultados

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

$$a = (2.983 \pm 0.013)\ \text{mm/gf}$$

$$b = (0.14 \pm 0.18)\ \text{mm}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_l = 0.27\ \text{mm}$$

Equação da reta:

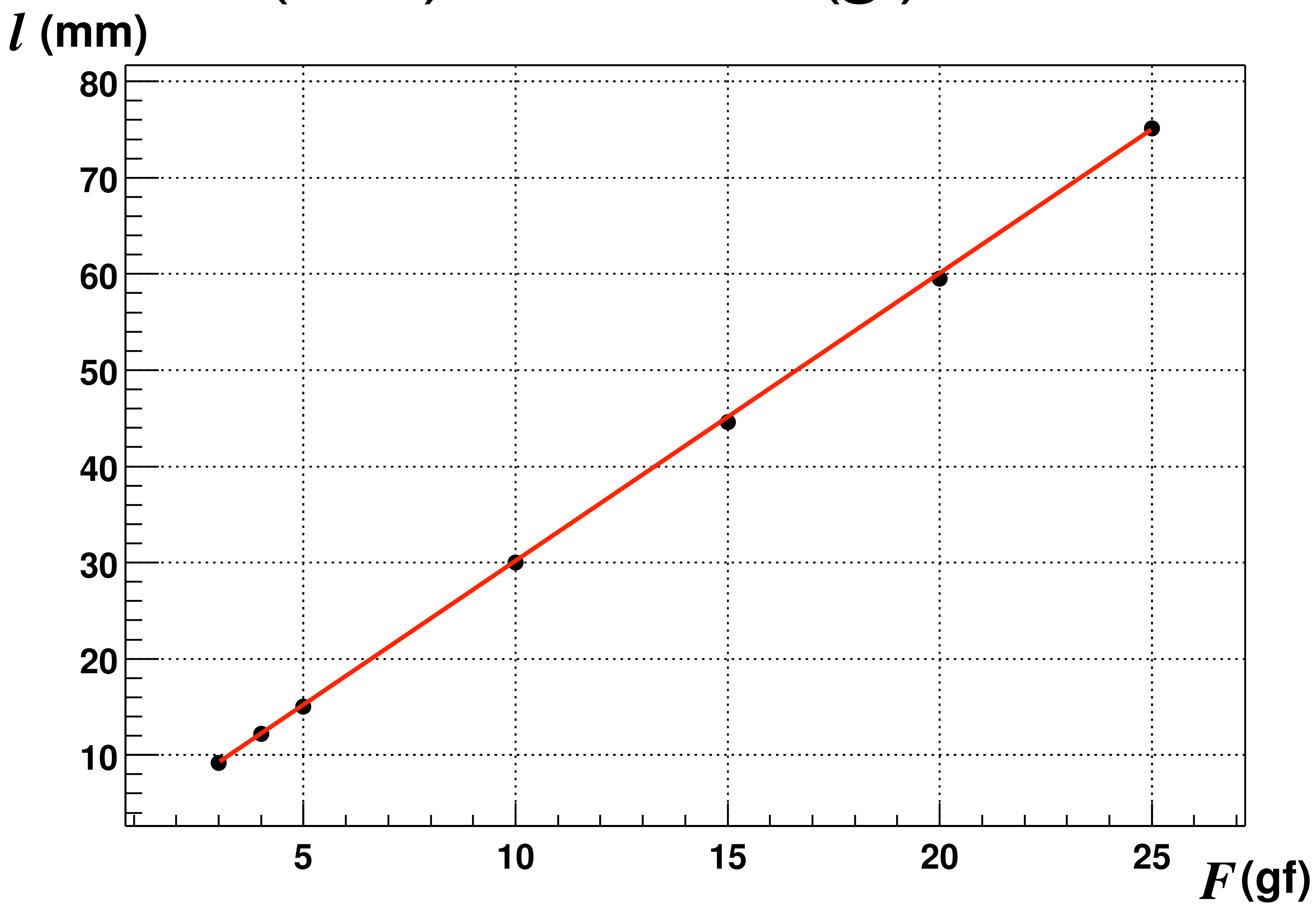
$$l\ (\text{mm}) = 2.983 \cdot F\ (\text{gf}) + 0.14$$

Exemplo: dinamômetro de mola

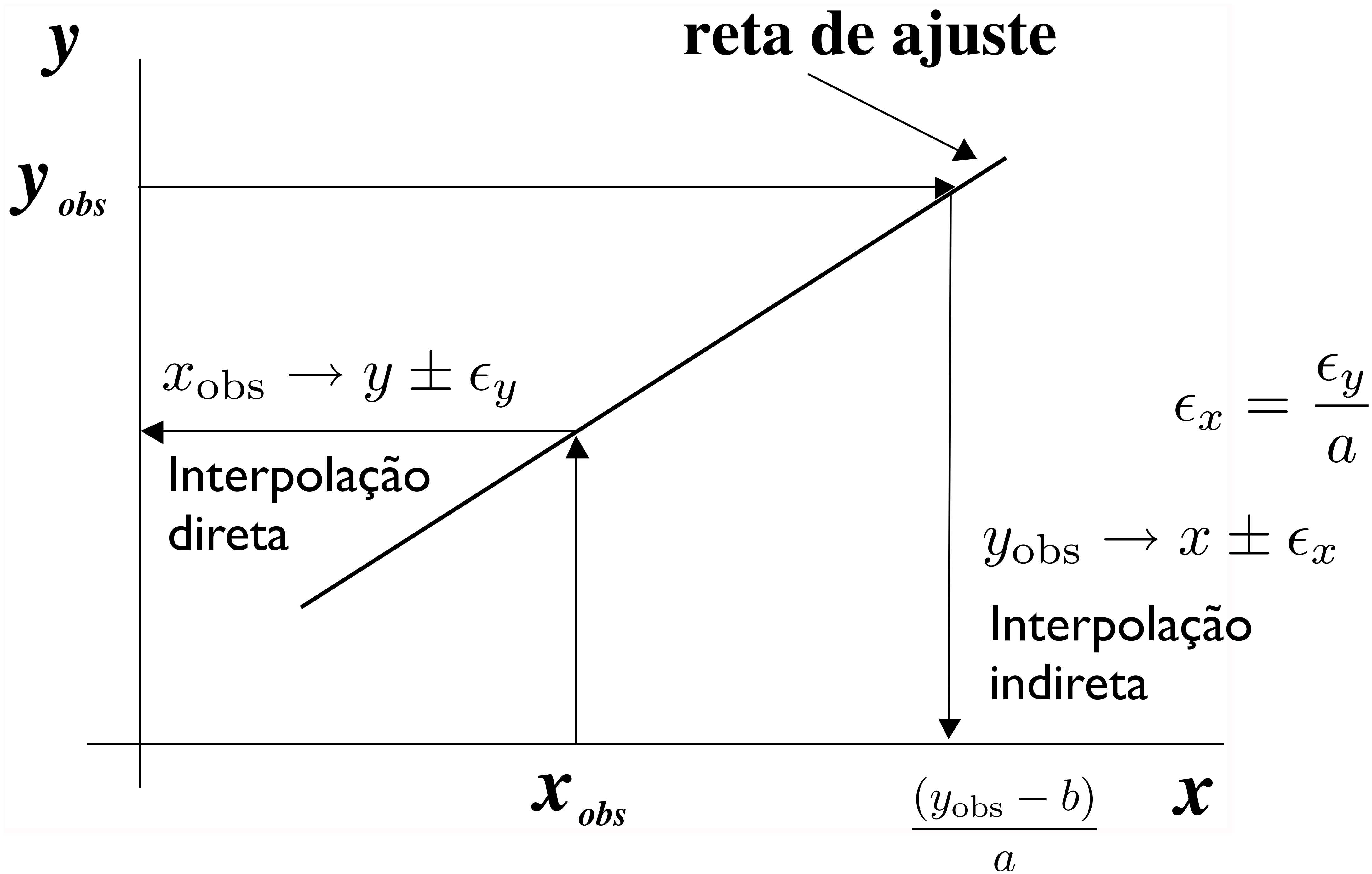
Equação da reta de calibração:

$$l\ (\text{mm}) = 2{,}983\ F(\text{gf}) + 0{,}14$$

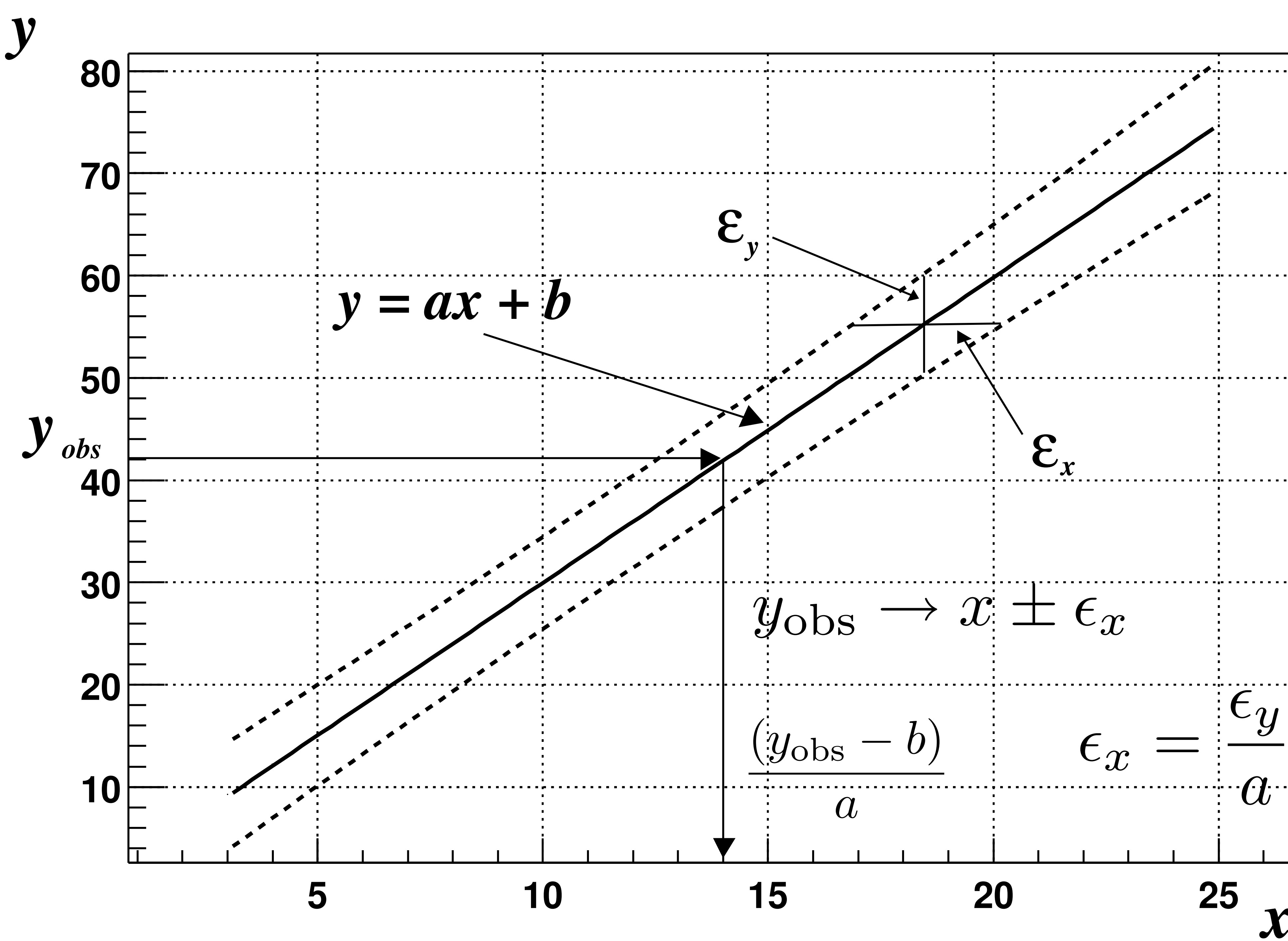
F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Reta de calibração e interpolação



Faixa de confiança



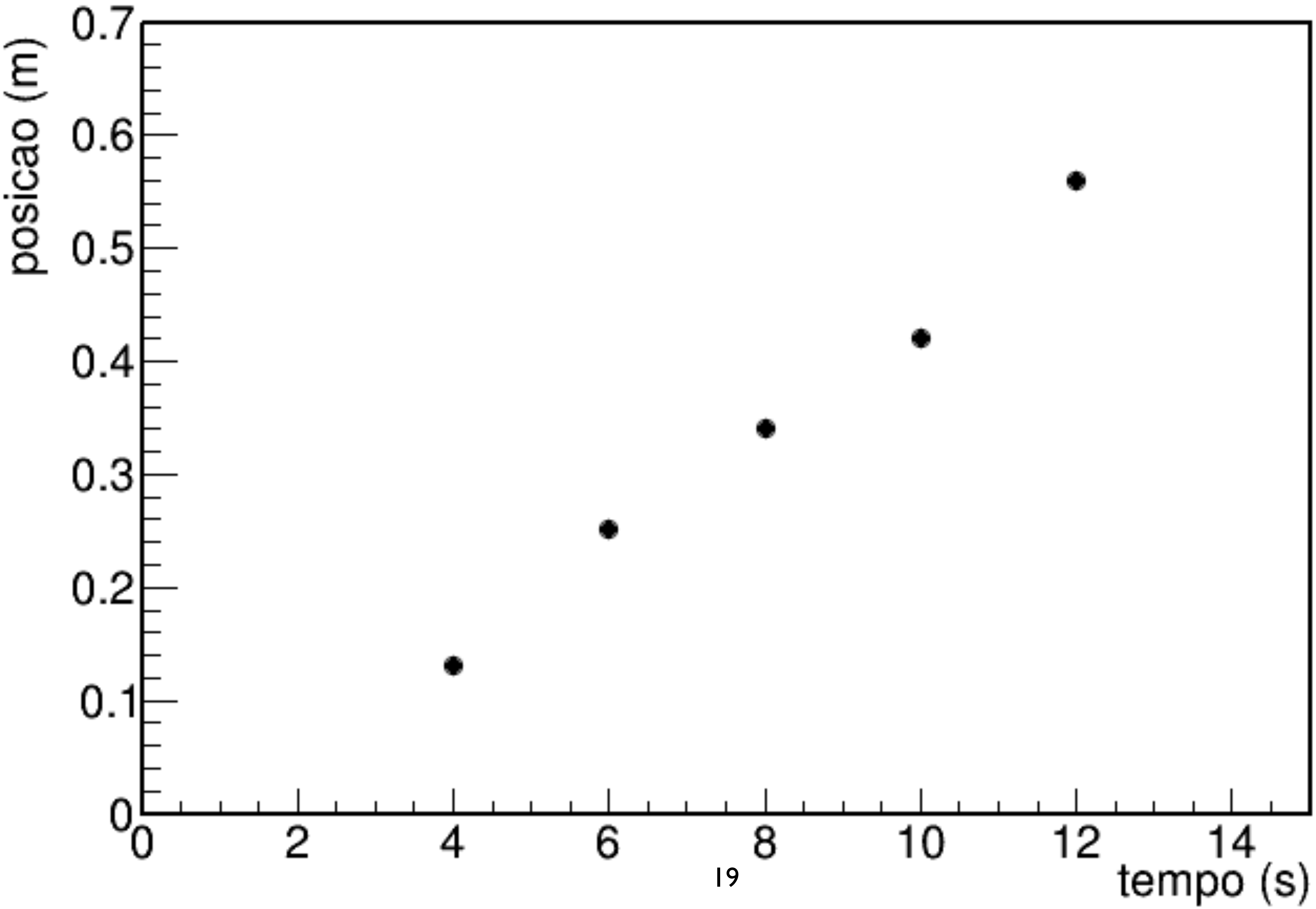
Exercício

Com base nos dados abaixo, determine a velocidade do objeto em deslocamento uniforme sobre um trilho de ar.

t(s)	4	6	8	10	12
s(m)	0.13	0.25	0.34	0.42	0.56

a) Faça o diagrama de dispersão dos dados acima;
b) Determine a covariância;
c) Determine o coeficiente linear de Pearson;
d) Há correlação entre a posição s e o tempo t? Justifique;
e) Determine a relação funcional do diagrama da letra a);
f) Determine, através do MMQ, a equação da reta do diagrama da letra a) e trace-a sobre o diagrama;
g) Determine a velocidade do objeto.

Diagrama de dispersão: posição vs. tempo



- Covariância: $\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$

```
covariância (posicao Vs. tempo): 0.412
```

- Coeficiente de Pearson: $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

```
coeficiente de Pearson (posicao vs. tempo): 0.995739 ~ 1.00
```

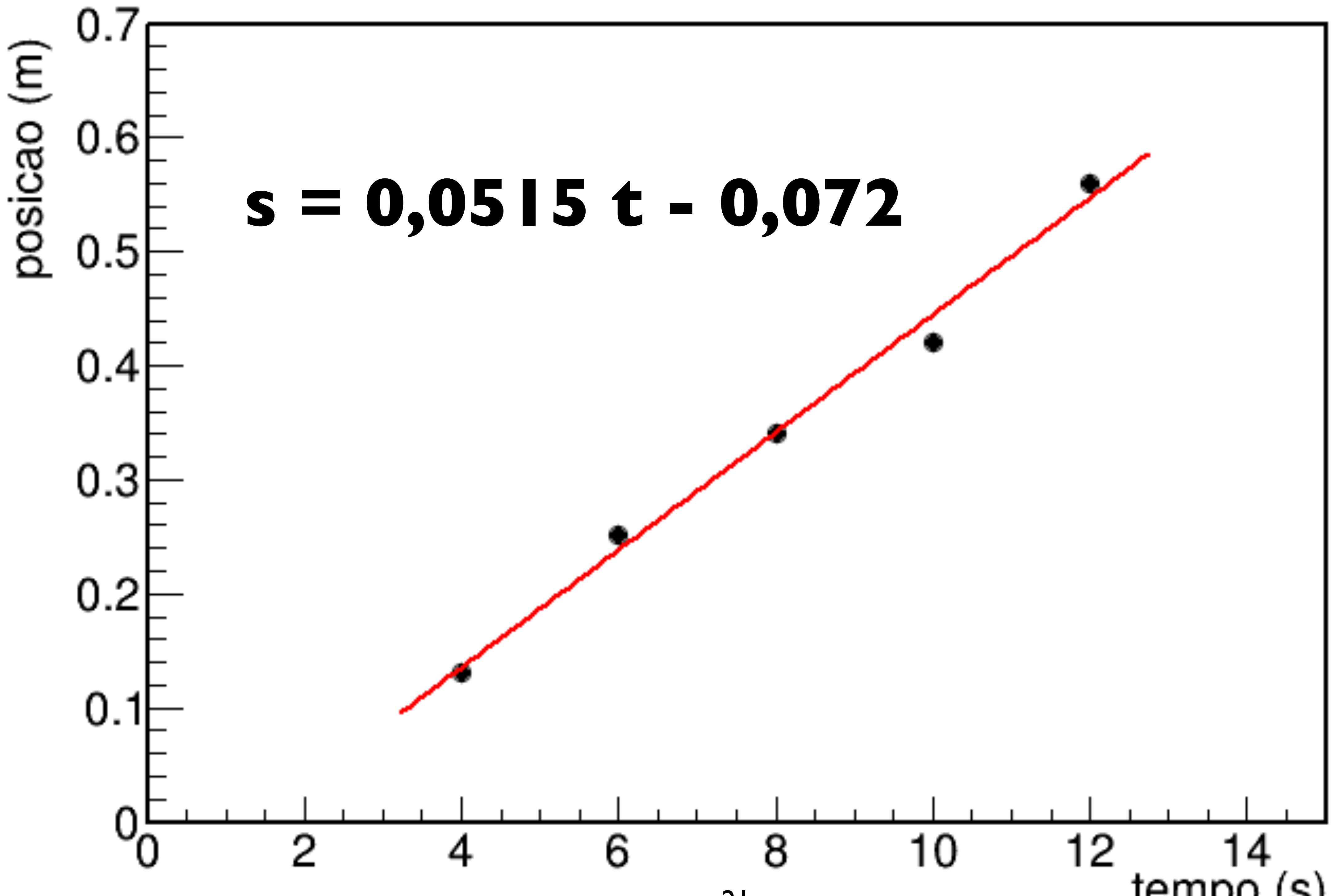
correlação linear, perfeita e positiva

- Relação funcional: **s = vt + s_0**

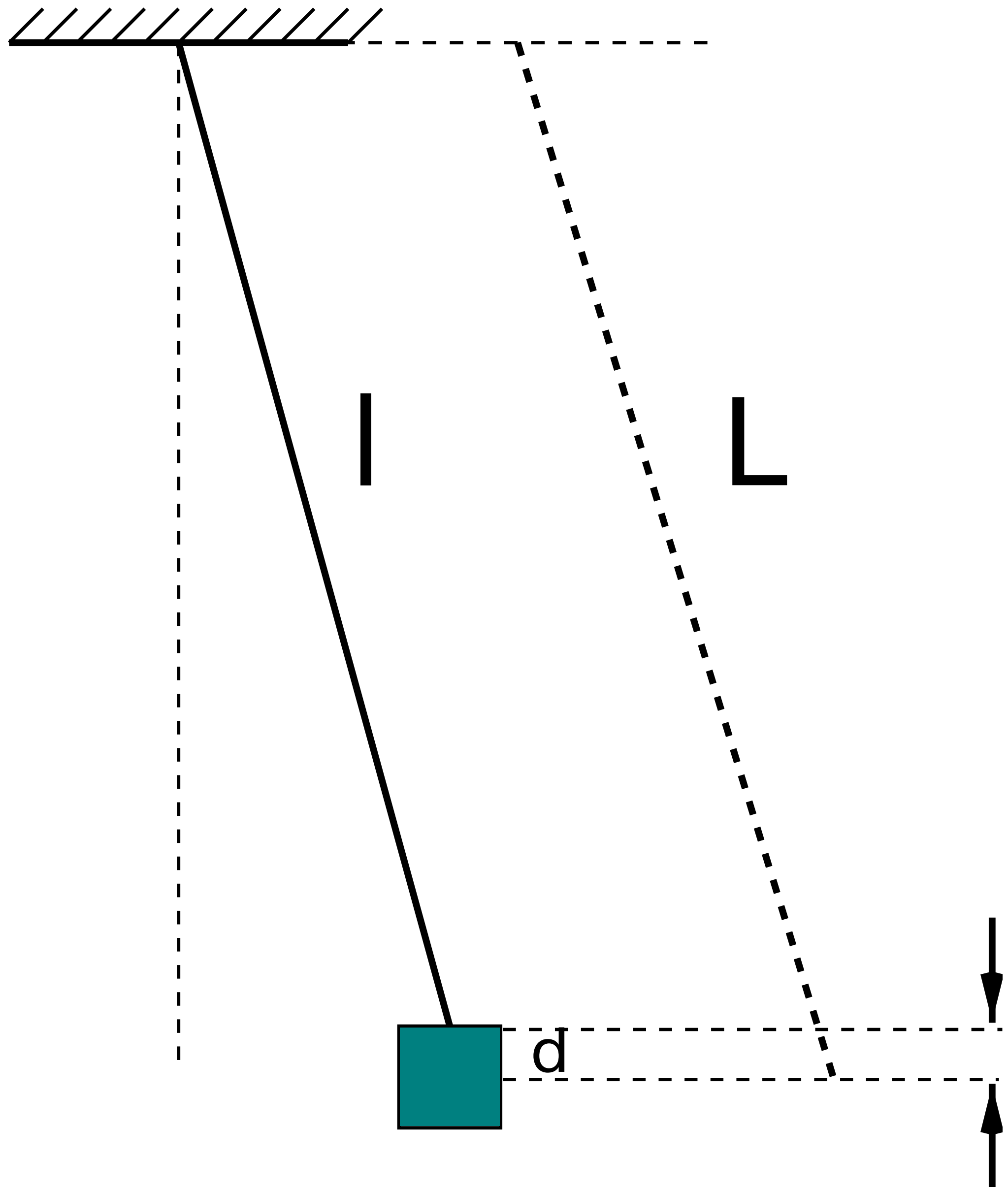
```
a +- sigma_a = 0.0515 +- 0.00275379
b +- sigma_b = -0.072 +- 0.0233666
```

- Equação da reta: **s = 0,0515t - 0,072**
- **v = (0,051 +- 0,003) m/s**

Diagrama de dispersão: posição vs. tempo



Exemplo: pêndulo (atividade próxima aula)

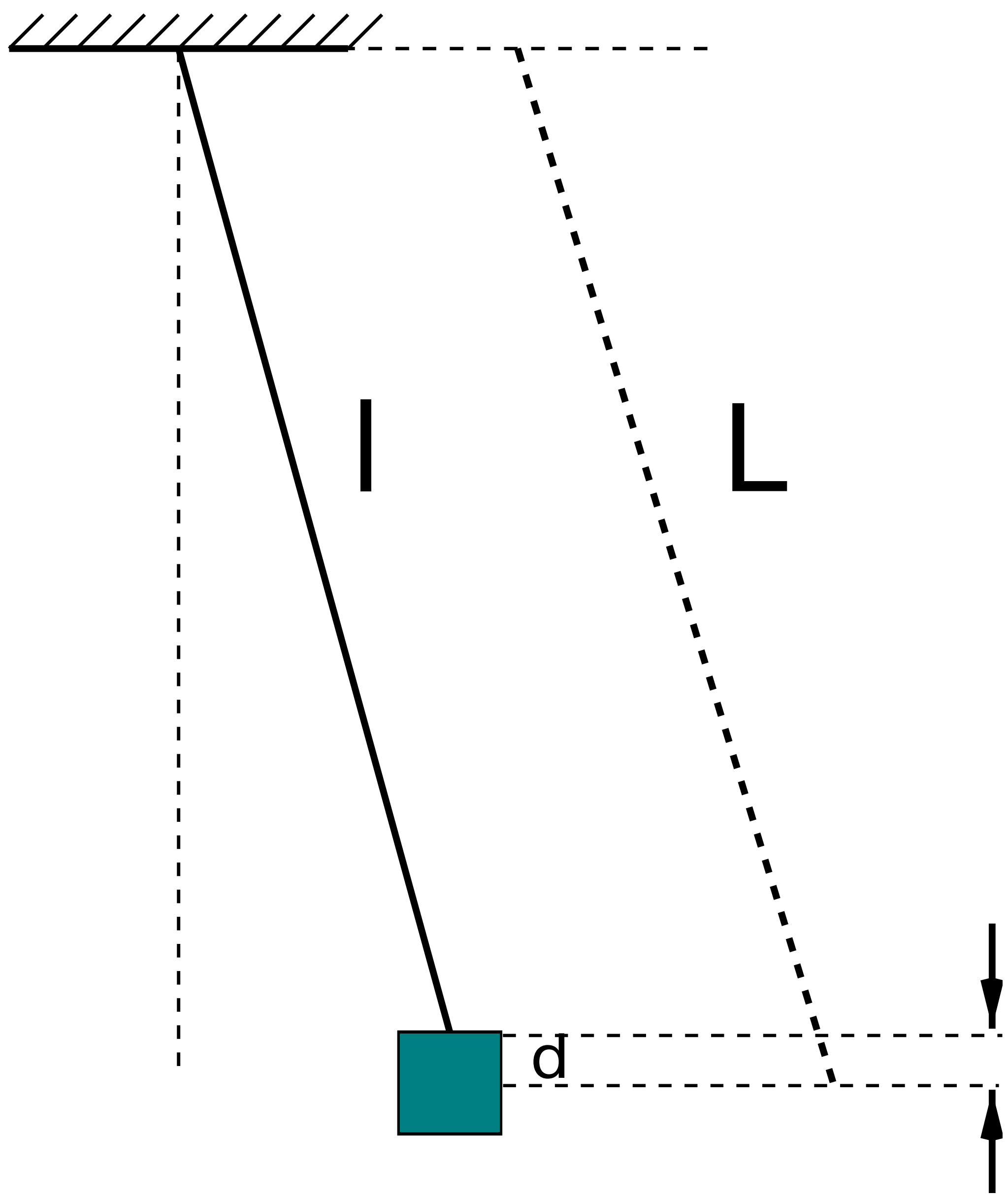


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = g\frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$L = l + d$$

$$l = g\frac{T^2}{4\pi^2} - d$$

Exemplo: pêndulo (atividade próxima aula)



$$l = g\frac{T^2}{4\pi^2} - d$$

$$\rightarrow y = ax + b$$

$$y = l$$

$$x = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$a = g$$

$$b = -d$$

Exemplo: pêndulo (atividade próxima aula)

y x

	l (cm)	t (s)	$T = (t/20)$ (s)	$T^2/4\pi^2$ (s^2)
Medida 1				
Medida 2				
Medida 3				
Medida 4				
Medida 5				

i) Estimar o valor da aceleração da gravidade:

$$g \pm \sigma_g$$

ii) Analisar a compatibilidade com o valor de referência:

$$g = 9,78789849(14) m/s^2$$

iii) Estimar o comprimento do pêndulo localizado no vão das escadas!