Física Geral - Laboratório

Aula 3: Estimativas e erros em medidas diretas (I)

Experimentos: medidas diretas

Experimento de <u>medidas diretas</u> de uma grandeza:

- Aquisição de um conjunto de dados através de medições repetidas e independentes de uma mesma grandeza
- Medições independentes realizadas nas mesmas condições experimentais, ambientais, etc.
- Objetivo: Estimativa do <u>valor esperado</u> da grandeza sendo medida

Experimentos: medidas diretas

Experimento de <u>medidas diretas</u> de uma grandeza:

- Aquisição de um conjunto de dados através de medições repetidas e independentes de uma mesma grandeza
- Medições independentes realizadas nas mesmas condições experimentais, ambientais, etc.
- Objetivo: Estimativa do <u>valor esperado</u> da grandeza sendo medida

No processo de medição de uma grandeza, há inevitavelmente <u>incertezas</u>

- Imperfeições instrumentais, limitações observacionais, condições ambientais, etc.
- Hipóteses, modelos teóricos
- Natureza possivelmente aleatória do fenômeno

Valor esperado de uma grandeza

Valor esperado: valor hipotético, μ, de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas <u>indefinidamente</u>

Valor esperado de uma grandeza

Valor esperado: valor hipotético, μ, de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas indefinidamente

É claro que não podemos repetir uma medição infinitamente..

Dessa forma, fazemos uma estimativa para o valor esperado, a partir de um conjunto finito de medidas da grandeza

Chamamos esse conjunto finito de uma amostra de todos os possíveis valores para as medidas, ou população

Resultado de uma medição

estimativa do valor esperado ± *erro* (*unidade*)

$$\boxed{x \pm \epsilon_x(\text{unidade})}$$

Estimativa do valor esperado

A partir de medições de uma grandeza, com instrumentos bem calibrados e procedimentos apropriados, e para um grande número de medidas diretas, a média da distribuição de frequência dos dados tende ao valor esperado da grandeza

A distribuição de frequência dos dados é chamada de distribuição amostral

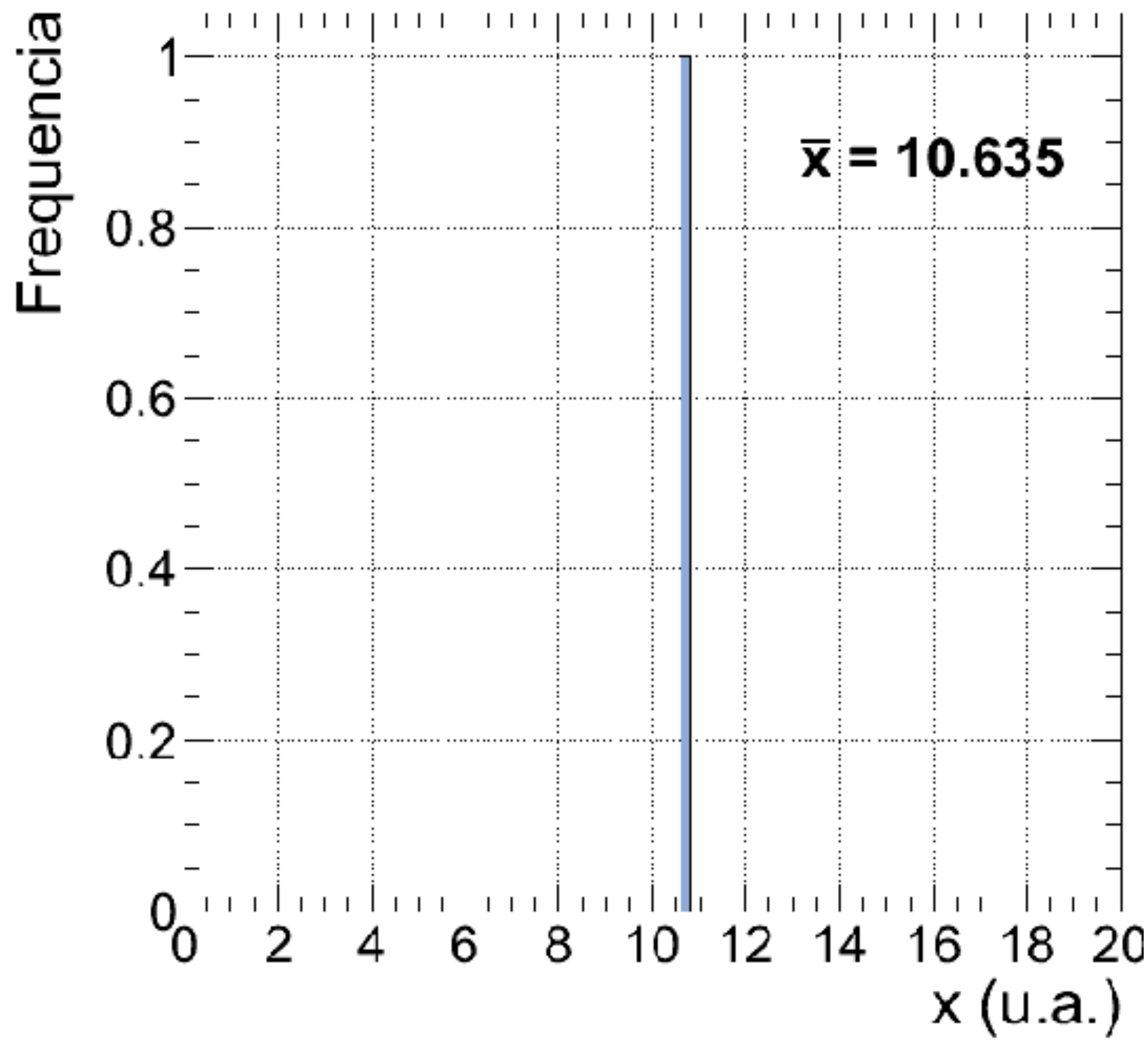
Ou seja, a melhor estimativa para o valor esperado de uma grandeza, x, a partir de uma amostra $\{x_i\}$ de dados, é a média

$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$

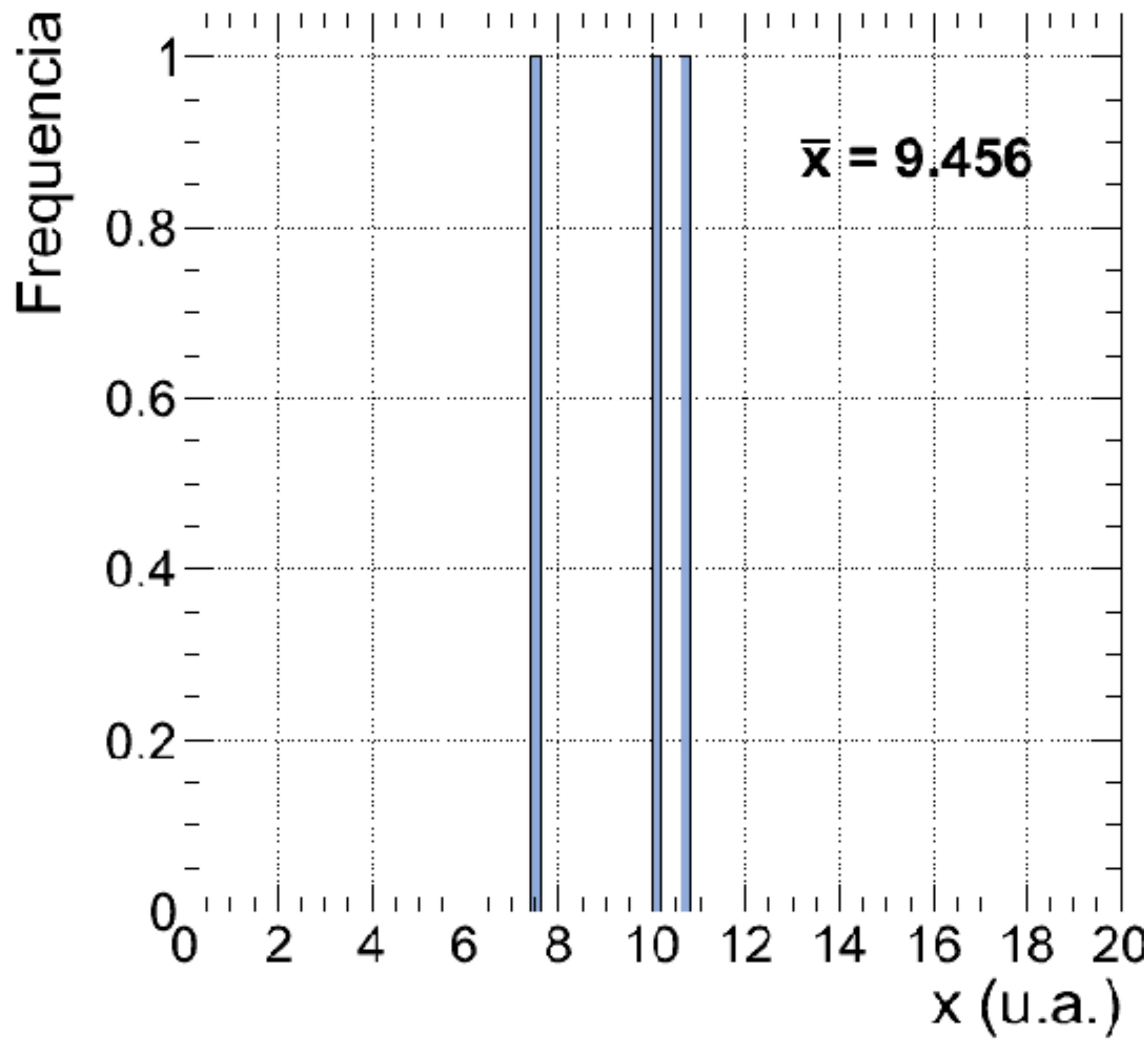
(Podemos pensar no *limite* para um número grande de medidas, ou seja, $N \rightarrow \infty$)

Estimativa do valor esperado

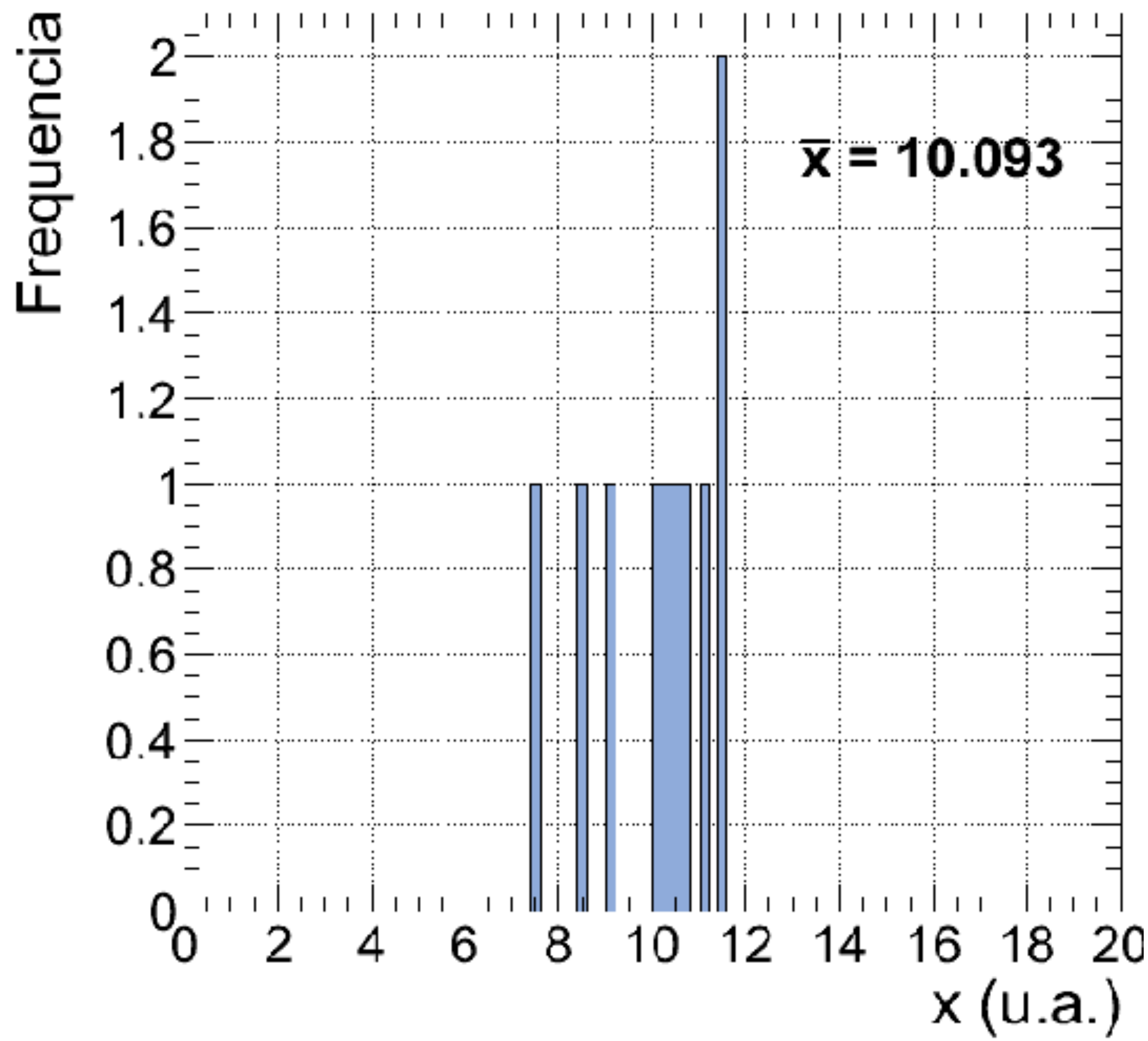
Estimativa do valor esperado



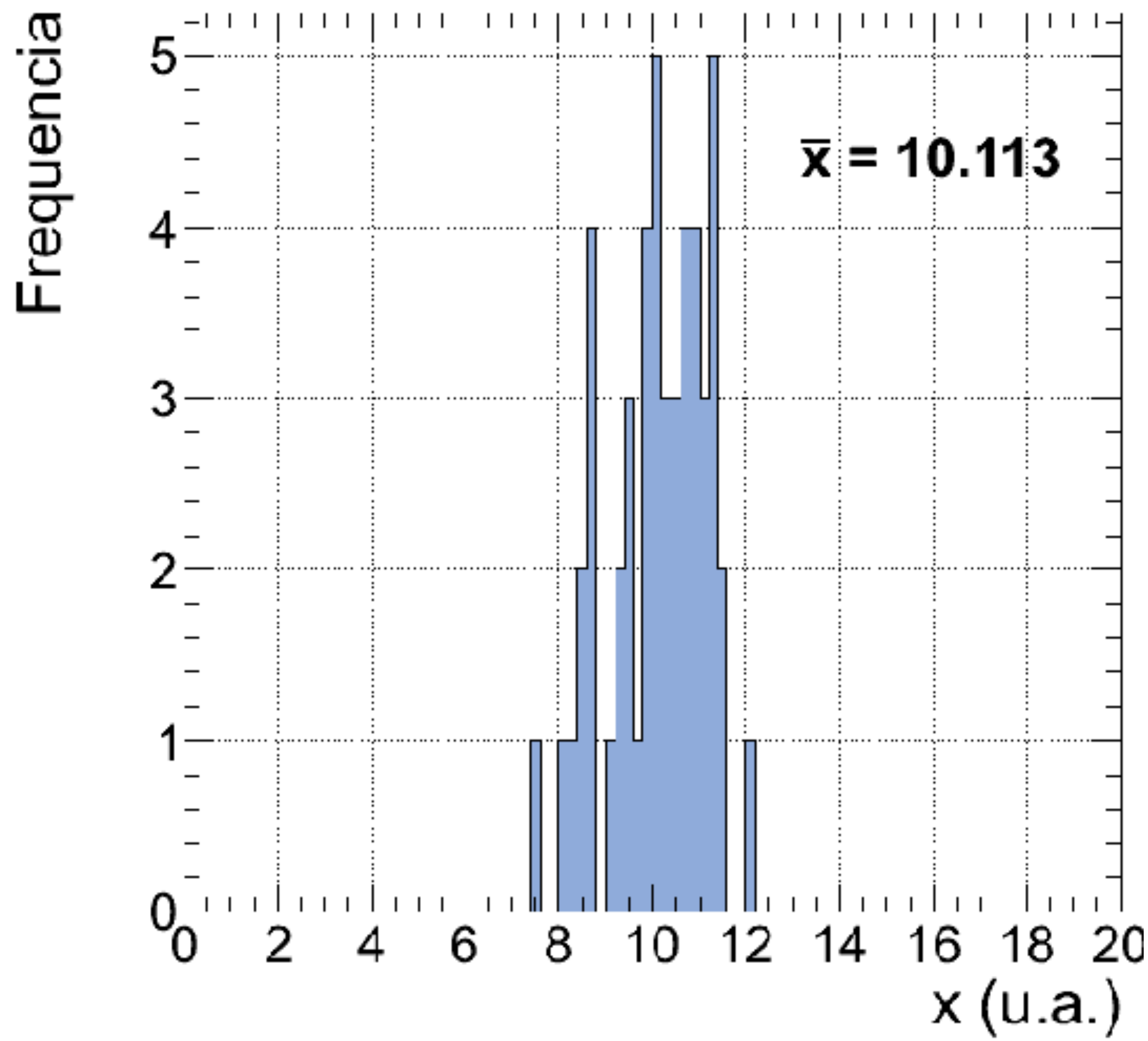
Estimativa do valor esperado



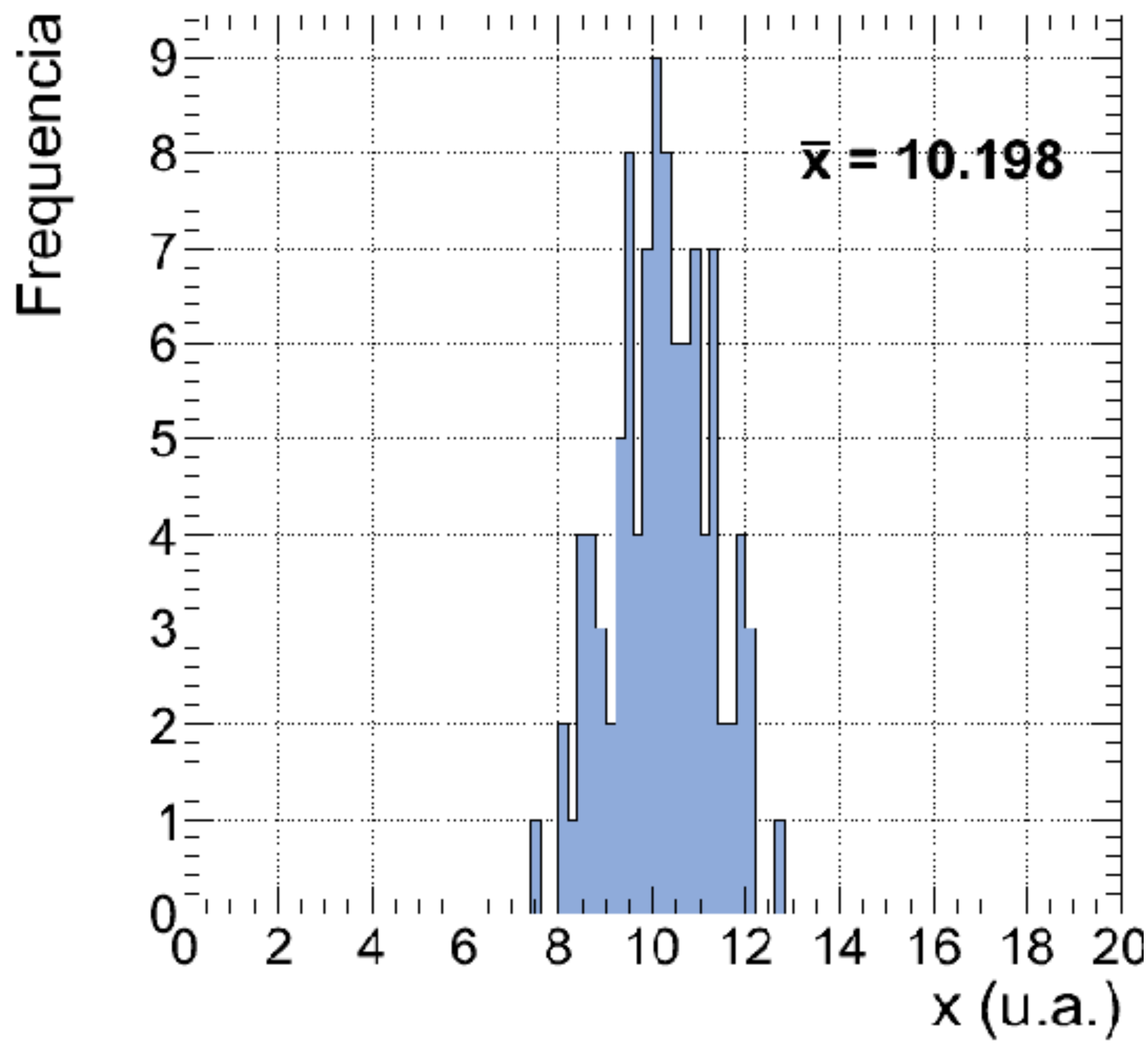
Estimativa do valor esperado



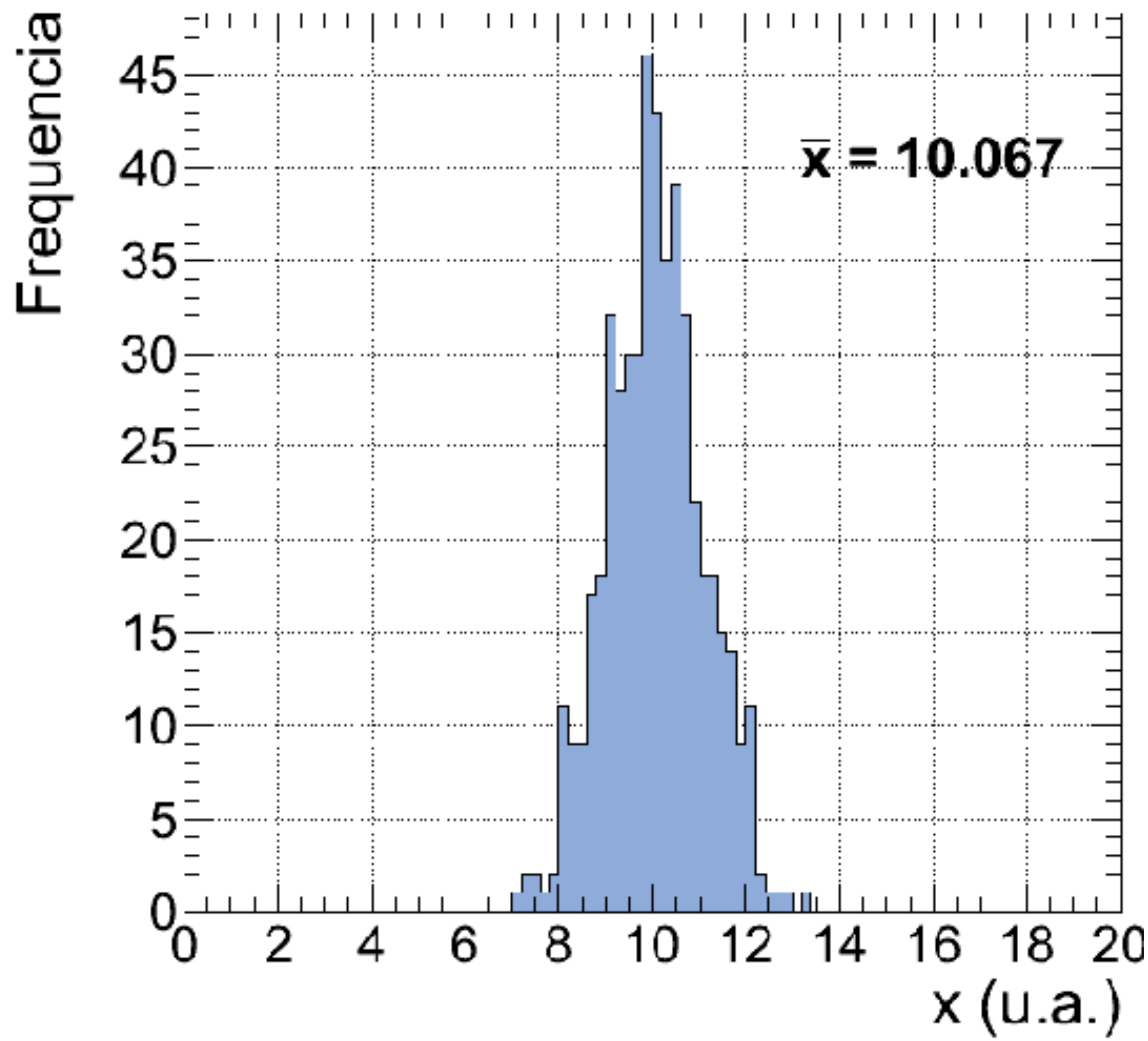
Estimativa do valor esperado



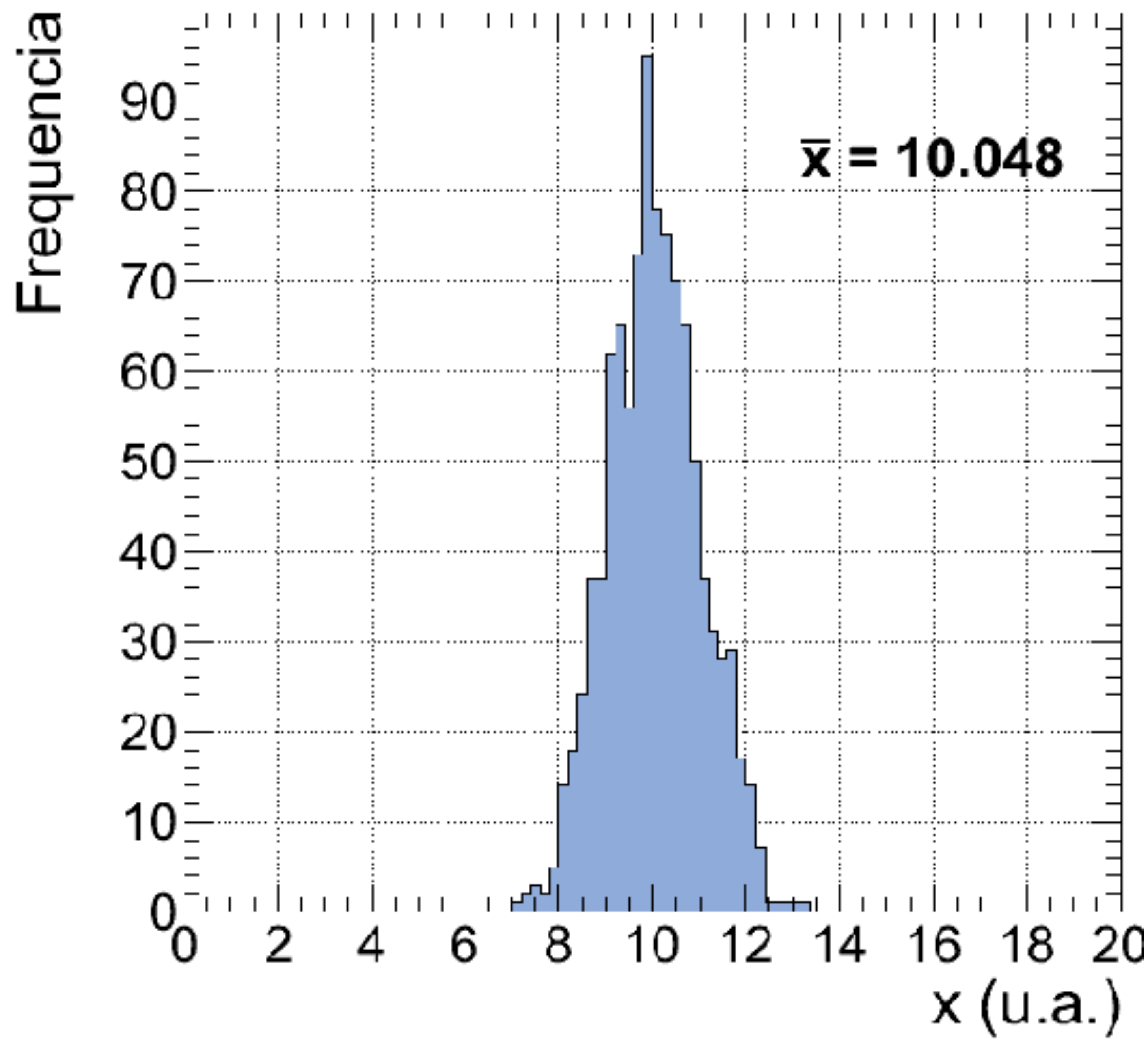
Estimativa do valor esperado



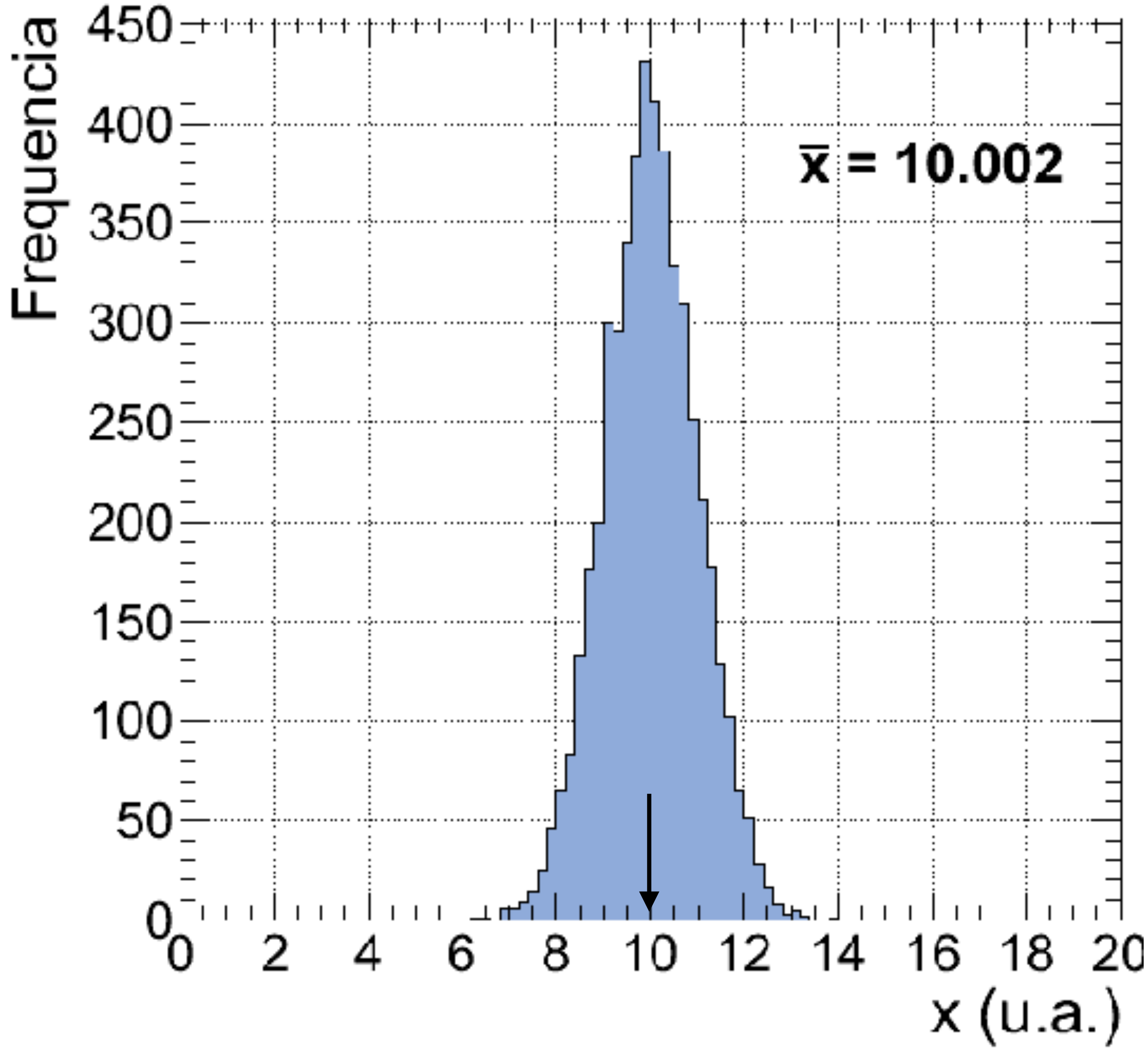
Estimativa do valor esperado



Estimativa do valor esperado



Estimativa do valor esperado



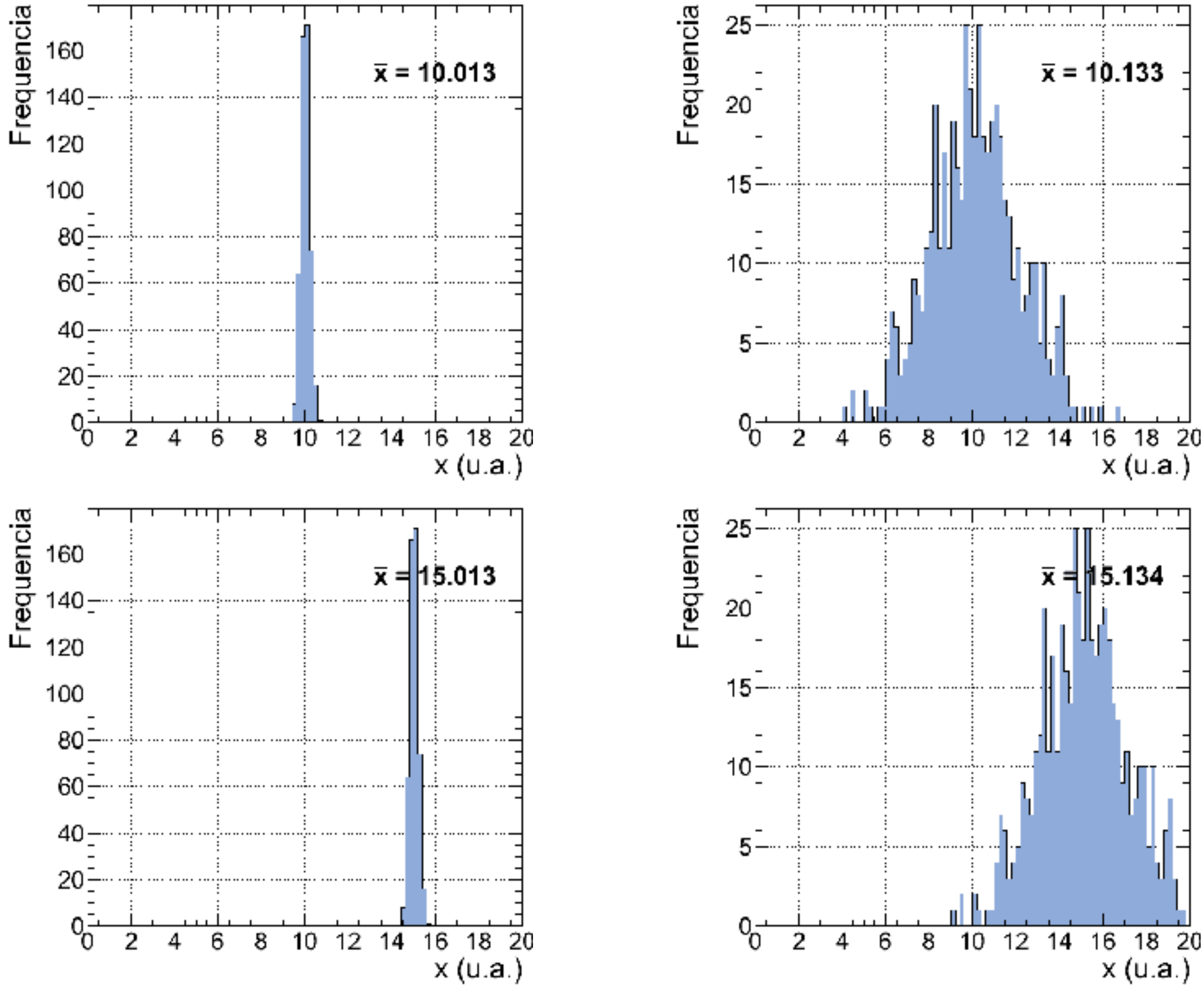
Incertezas aleatórias e sistemáticas

Incertezas aleatórias: devido a flutuações inevitáveis no processo de medição, que provocam a dispersão das medidas em torno da média

Incertezas sistemáticas: desvios em geral regulares, devido a imperfeições instrumentais, observacionais, ou do modelo teórico

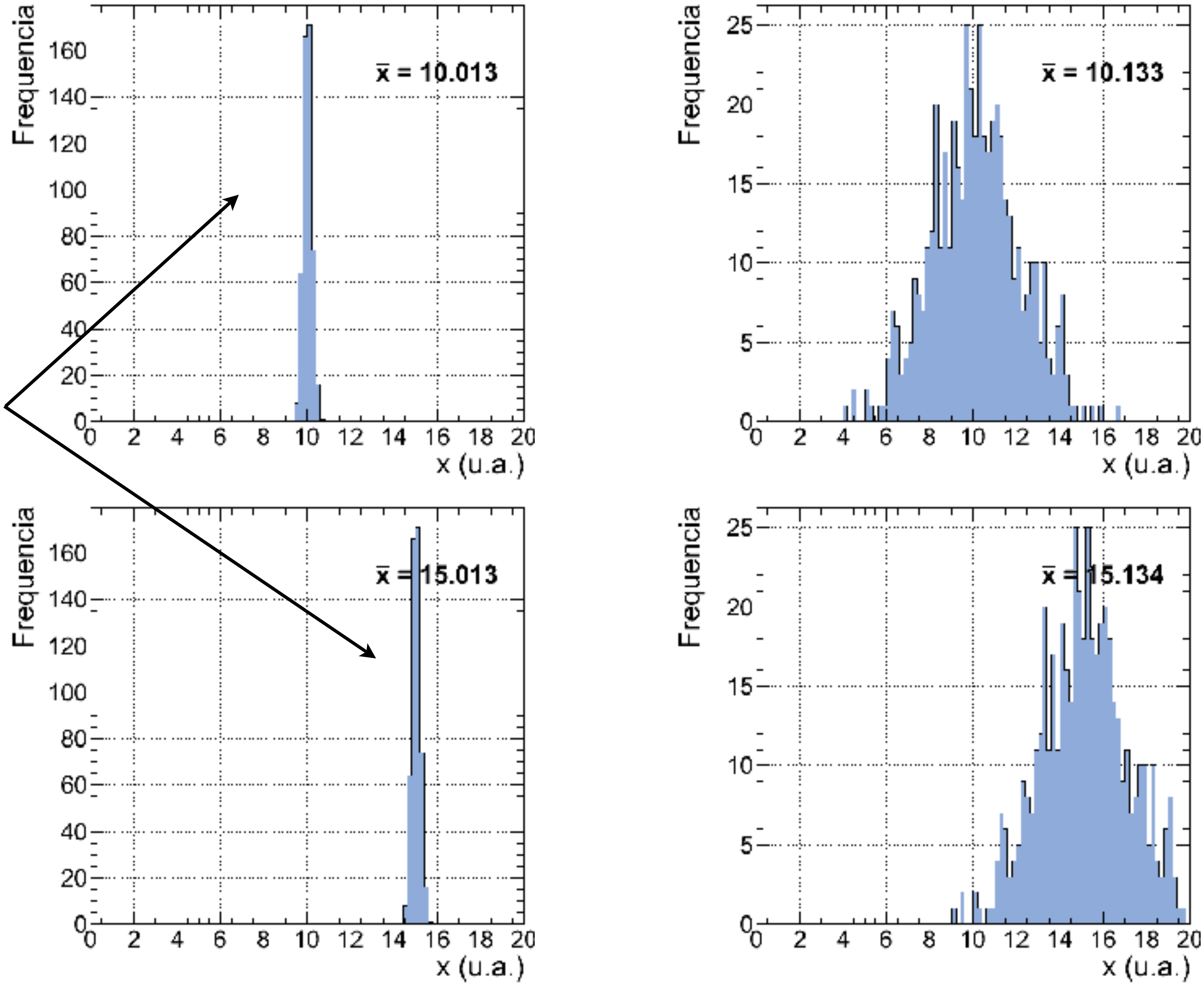
As *incertezas aleatórias* estão associadas à <u>precisão</u> do experimento, enquanto as *incertezas sistemáticas*, com a sua <u>exatidão</u>

Medições: precisão e exatidão

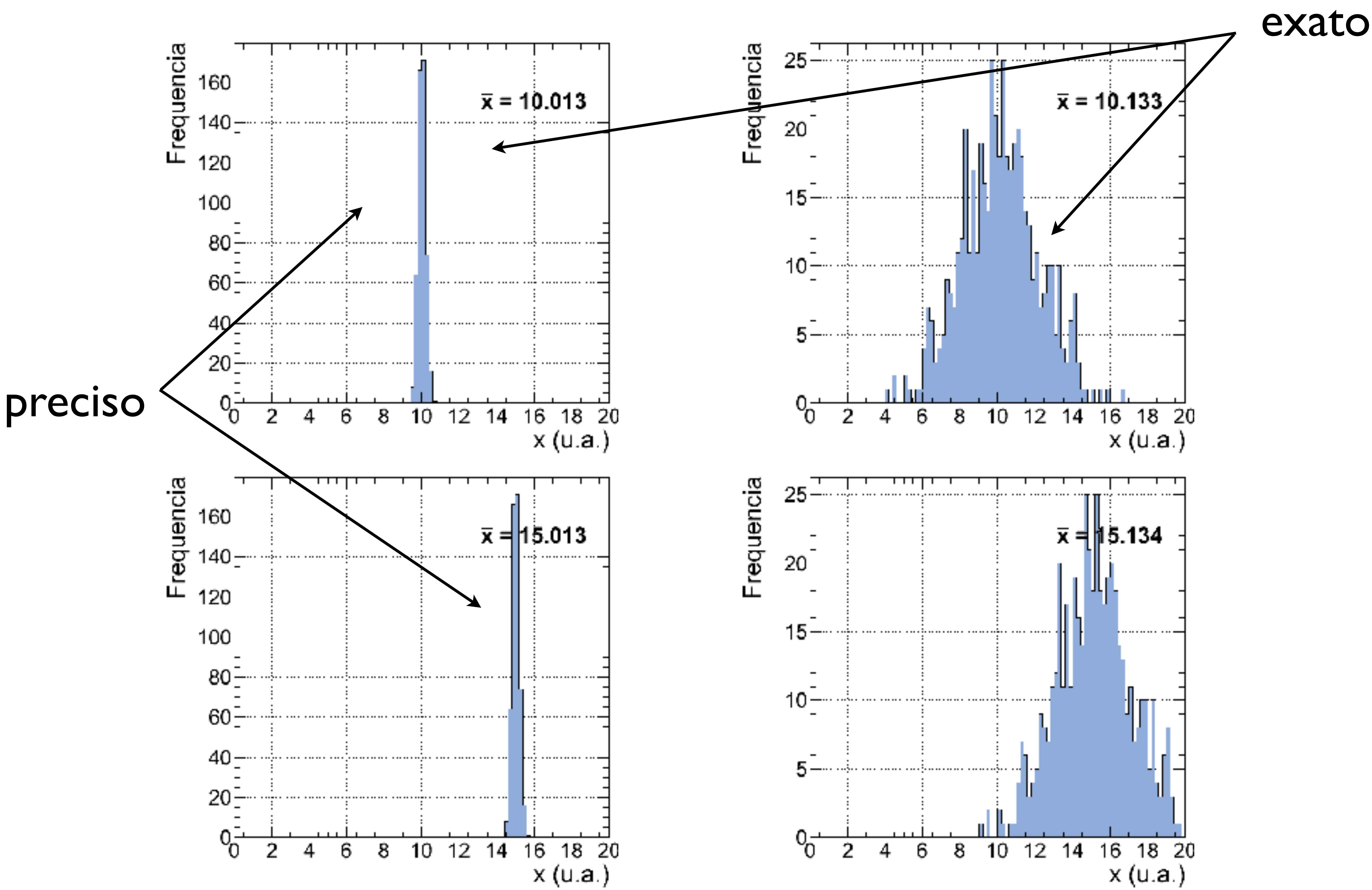


Medições: precisão e exatidão

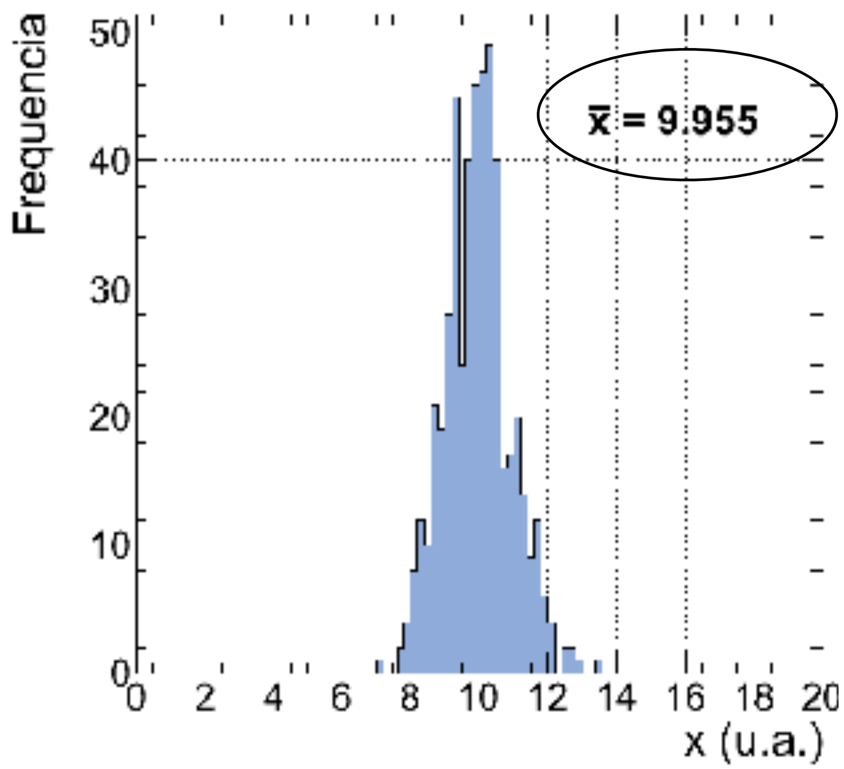
preciso



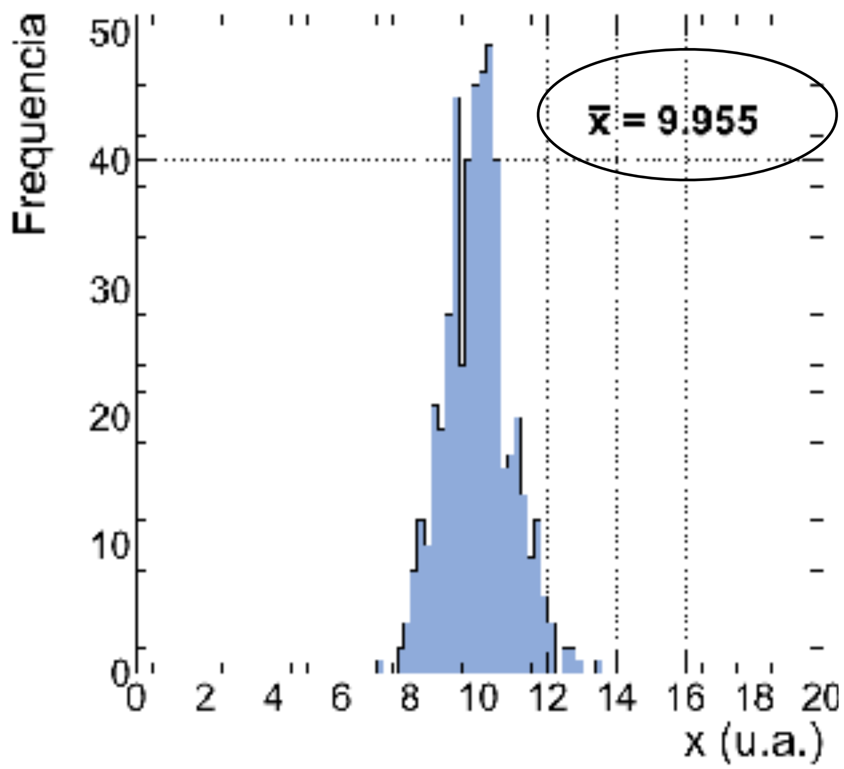
Medições: precisão e exatidão

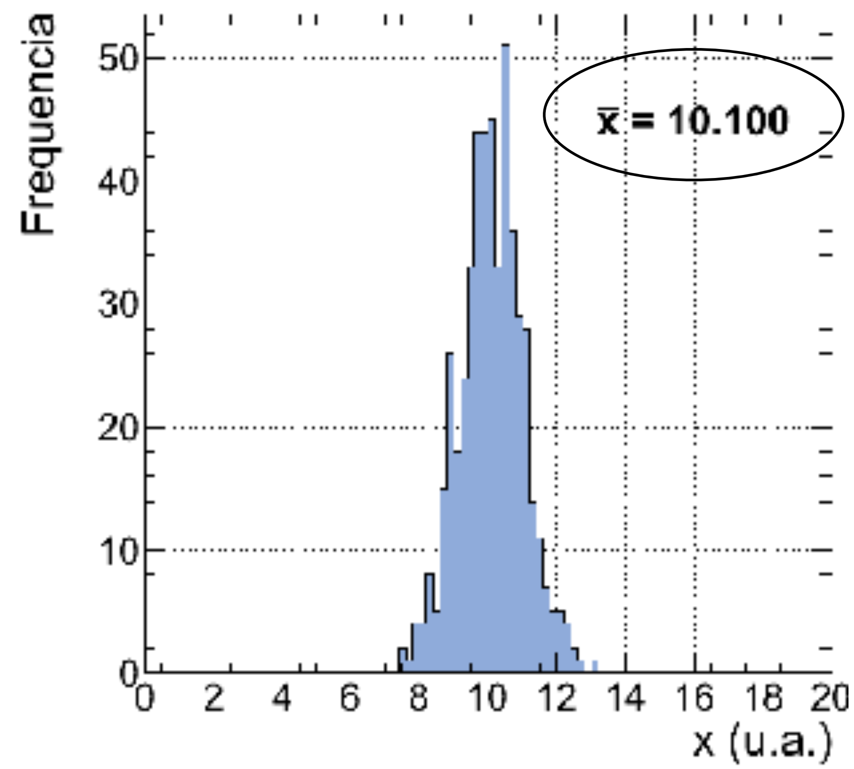


Erro da média

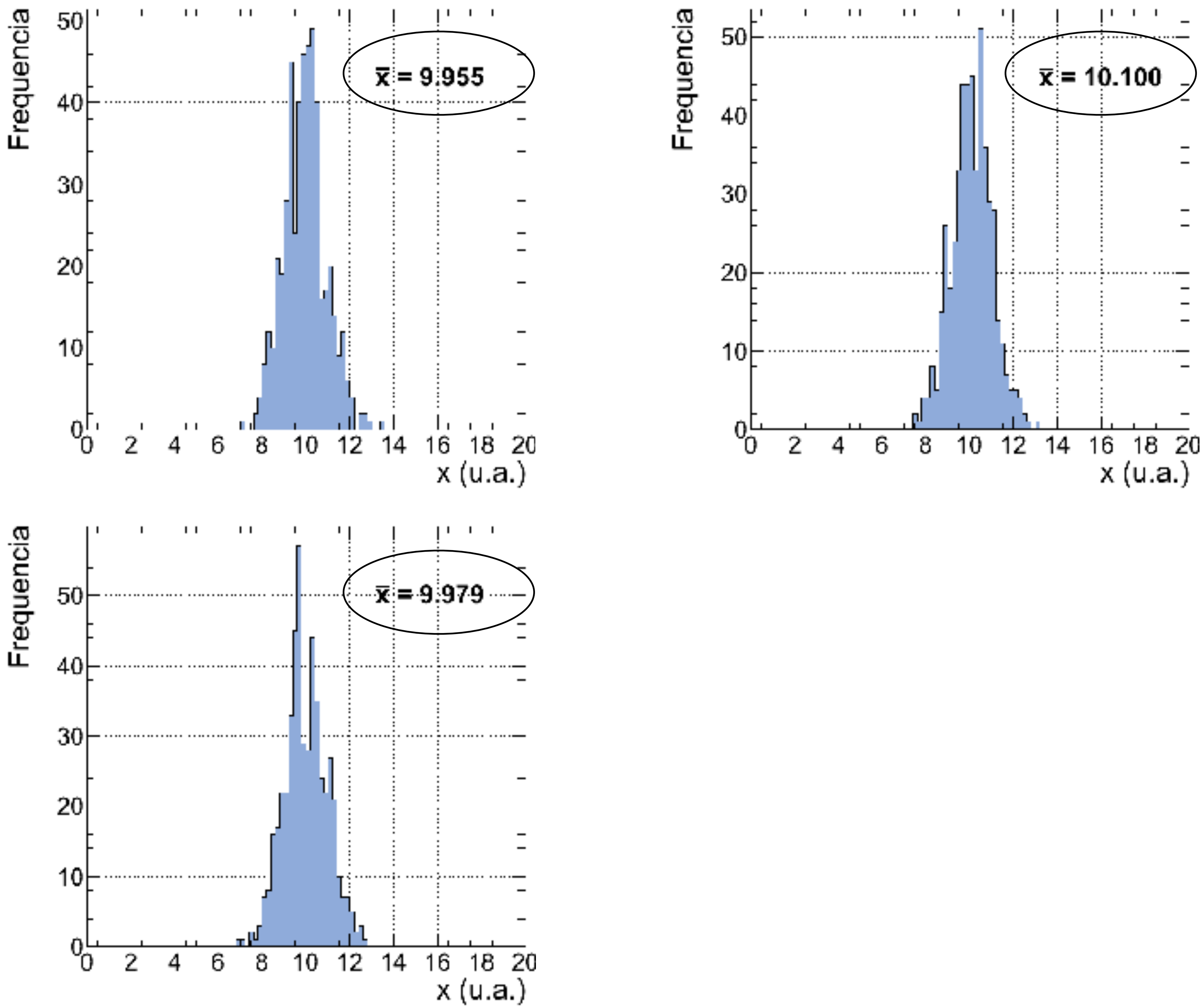


Erro da média

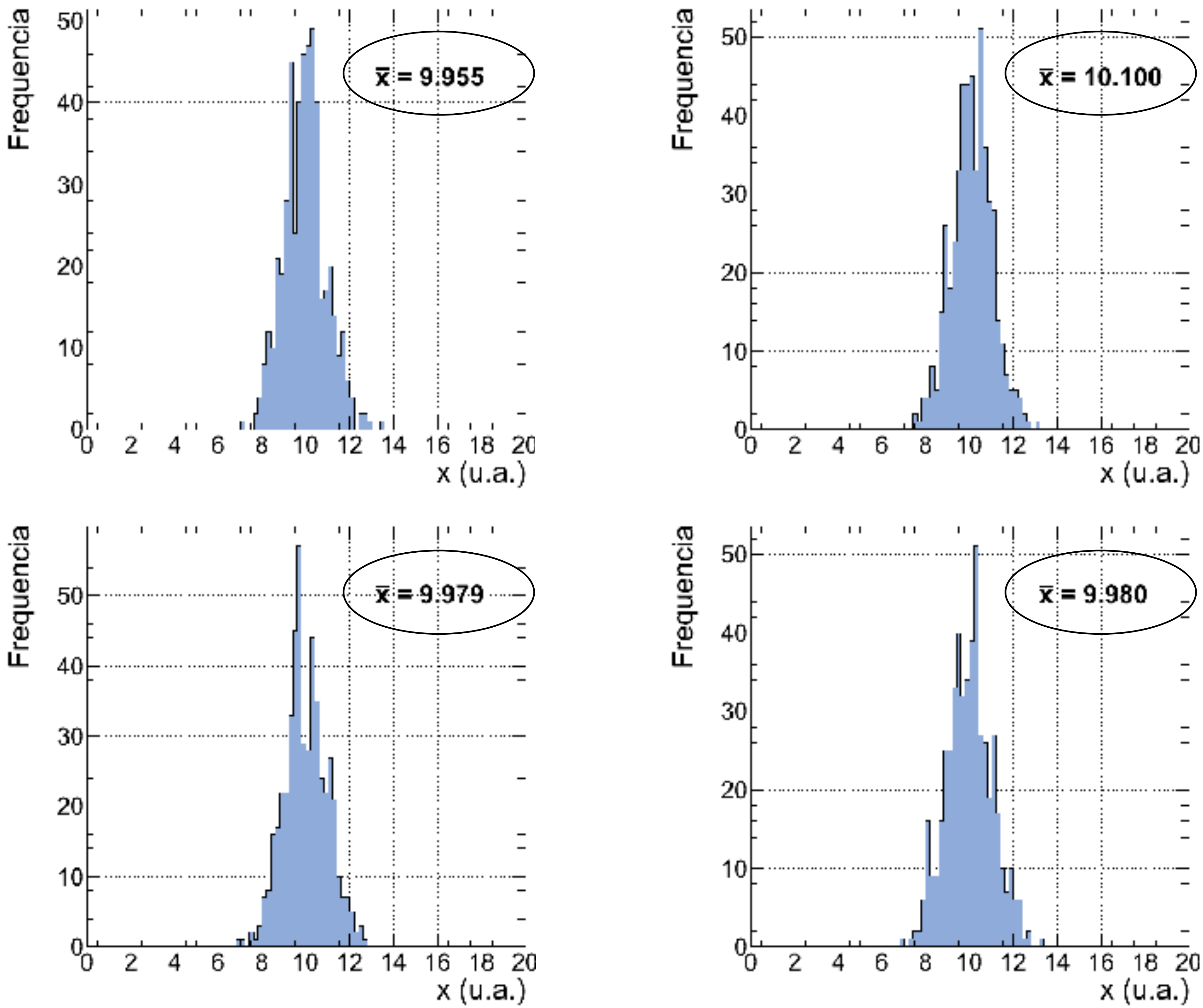




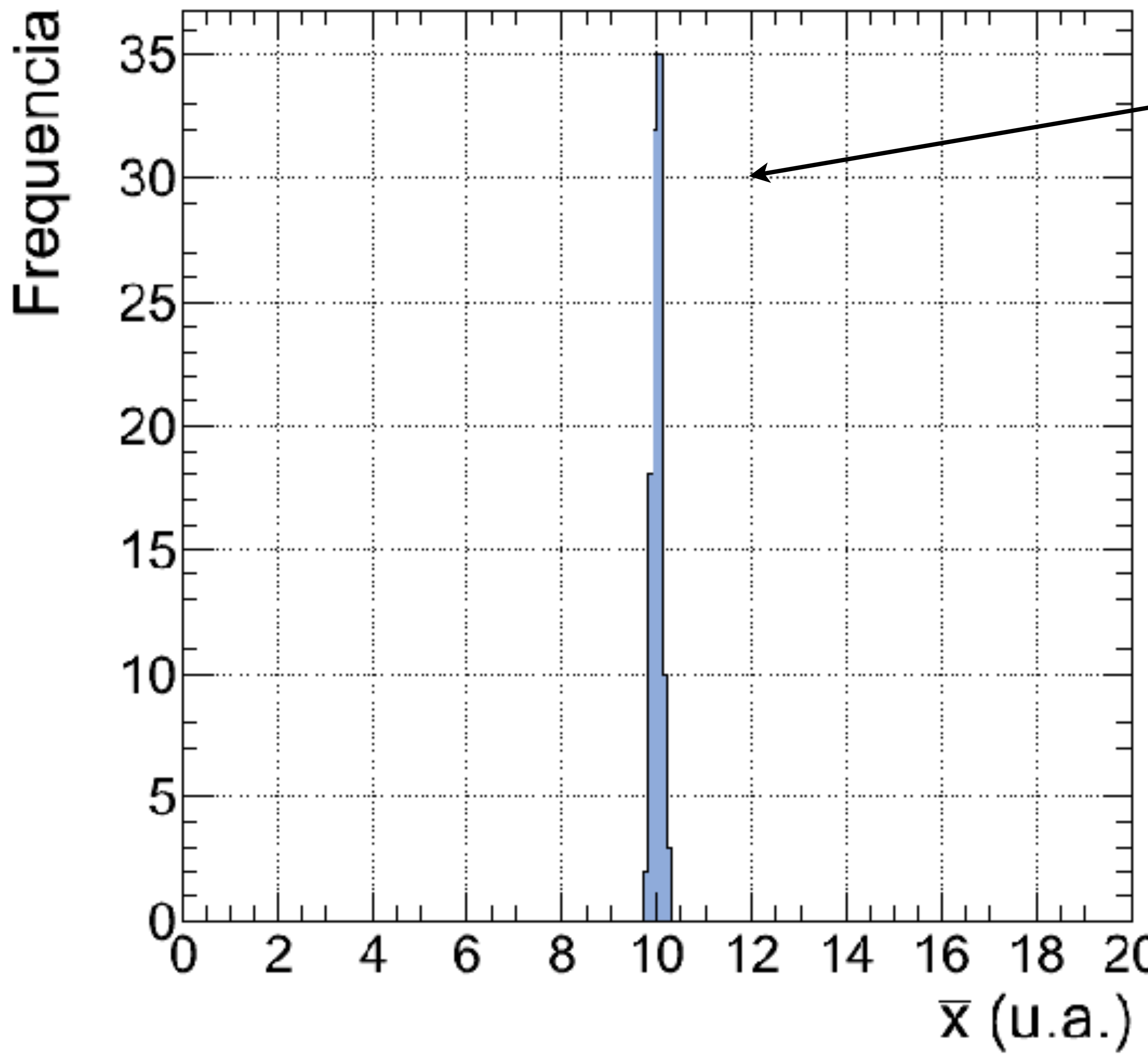
Erro da média



Erro da média



Erro da média



Distribuição das médias de 100 "experimentos", cada um com 100 medidas

Note que o "erro da média" é menor que o "erro da medida"

Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de N medidas diretas.

Vamos estimar primeiramente o erro de cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\sigma_x$$

O erro da média pode ser aproximado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de N medidas diretas.

"desvio padrão experimental" ou "amostral"

Vamos estimar primeiramente o erro de cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\sigma_x$$

desvio padrão

O erro da média pode ser aproximado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de N medidas diretas.

"desvio padrão experimental" ou "amostral"

Vamos estimar primeiramente o erro de cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\sigma_x$$

desvio padrão

O erro da média pode ser aproximado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

O desvio padrão experimental (s_x) será comumente representado igualmente por σ_x

Estimativa do erro da medida e da média

Para um número grande de medidas:

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro da medida e da média

Para um número grande de medidas:

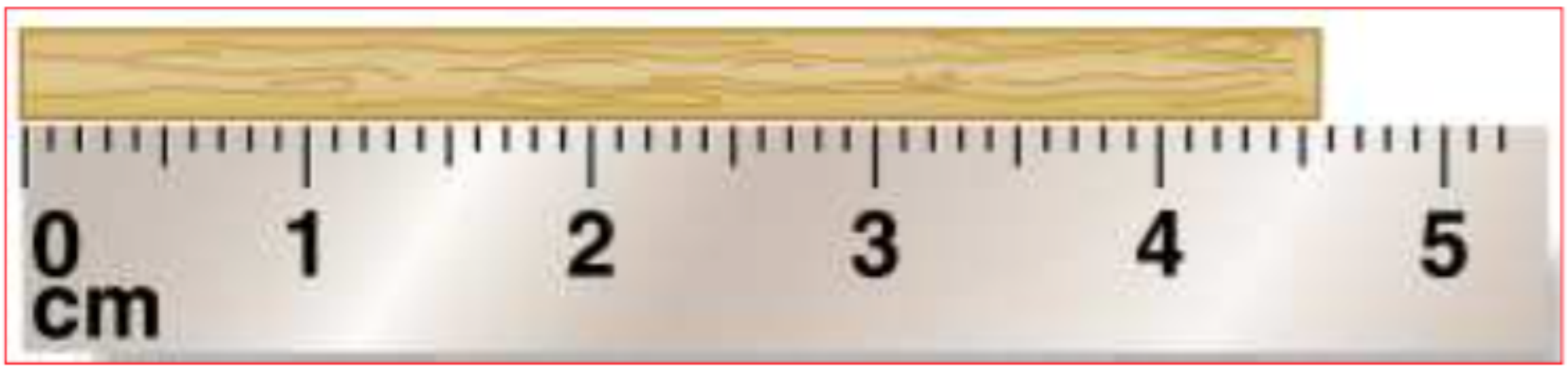
$$N \longrightarrow \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Quanto maior o número de medidas em um experimento, menor o erro estimado "da média"

Medidas diretas

Em **medidas diretas** o valor desconhecido da grandeza é comparado com o valor padrão



Sem levar em conta a medida do erro experimental, qual o comprimento do pedaço de madeira?

$\boxed{L = 4{,}5\underline{4}\text{ cm}}$

Medidas indiretas

Já em **medidas indiretas** as mesmas são realizadas efetuando-se operações matemáticas com os resultados das **medidas diretas.**

Sem levar em conta a medida do erro experimental, qual a área do pedaço de madeira?

Ela é calculada a partir das medidas de comprimento e largura do mesmo.

Medidas indiretas

Já em **medidas indiretas** as mesmas são realizadas efetuando-se operações matemáticas com os resultados das **medidas diretas.**

$A = L \cdot H$

$L = 4{,}5\underline{4}\ \text{cm}$

$H = 0{,}4\underline{3}\ \text{cm}$

$A = 4{,}5\underline{4}\ \text{cm} \times 0{,}43\ \text{cm} = 1{,}\underline{9}522\ \text{cm}^2$

$A = 2{,}\underline{0}\ \text{cm}^2$

Individualmente, as medidas de L e H apresentam **erros**. Consequentemente, a **medida indireta** da área A também possui **erros**!!!

Algarismos significativos

Todos os números obtidos em uma medida, acompanhados de um último duvidoso são chamados de **algarismos significativos**.

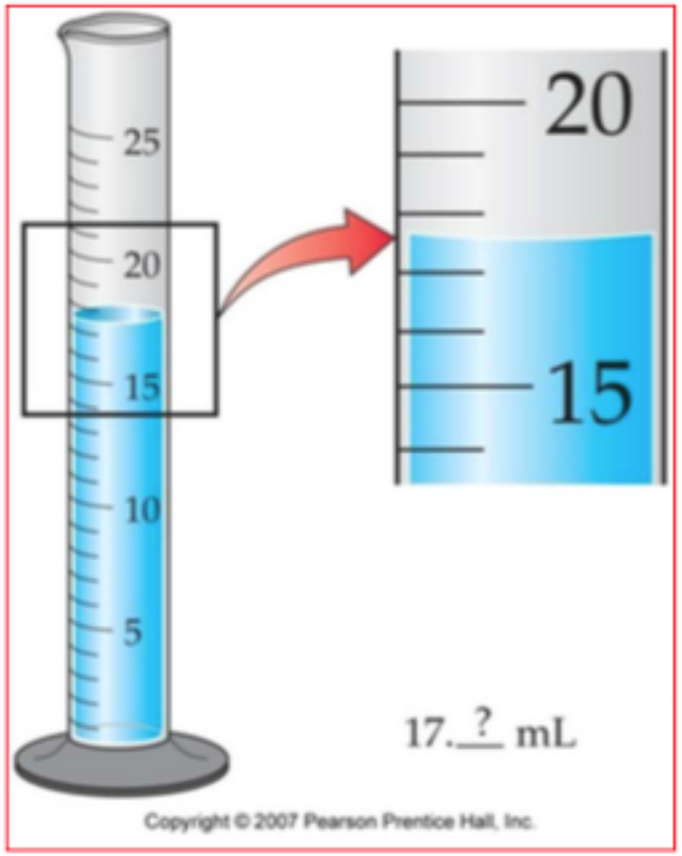
Na prática, **algarismos significativos** de uma medida são aqueles que temos **plena certeza**, mais um **duvidoso**.

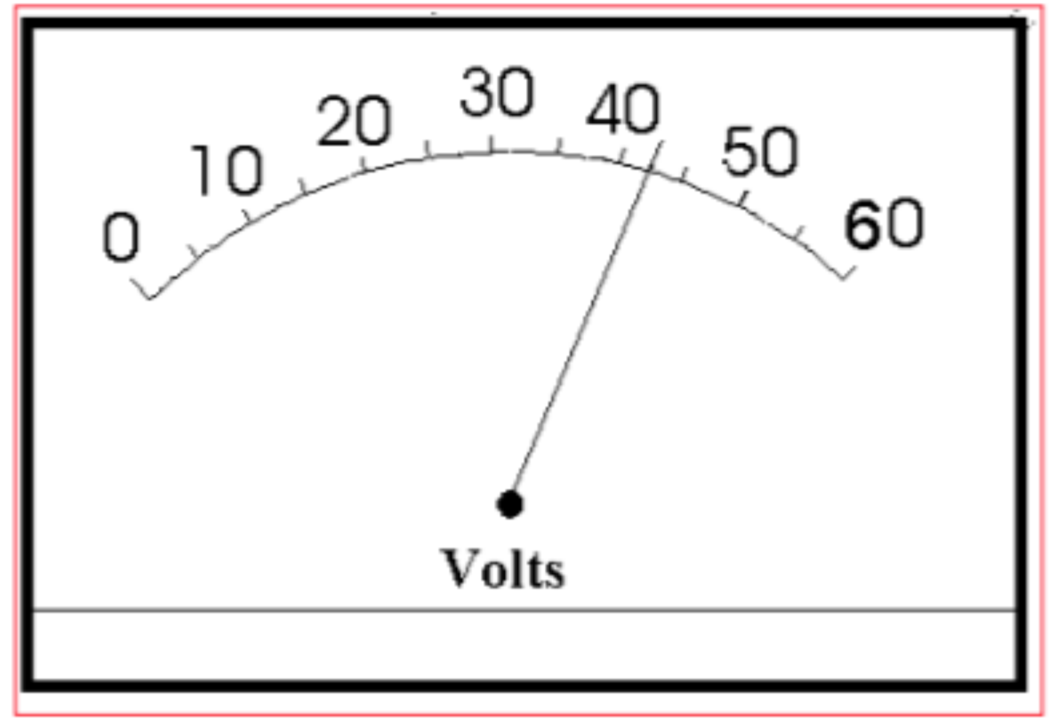
O **algarismo duvidoso** está diretamente ligado à escala do instrumento de medida…

… logo, **algarismo duvidoso** é um indicativo da escala do instrumento de medida

Algarismos significativos

Exemplos de algarismos significativos: medidores analógicos





V = (17,7 ± 0,5) mL

(17,7 mL): três A.S.

V = (42 ± 2) V

(42 V): dois A.S.

Algarismos significativos

Exemplos de algarismos significativos: medidor digital

V = (3,999) V

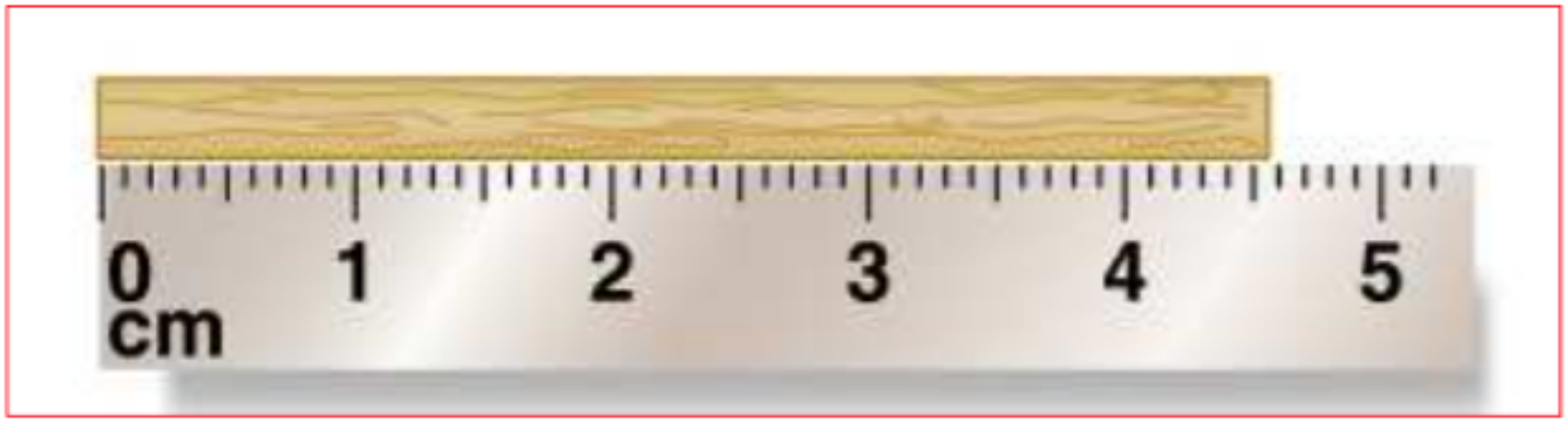
3,999 V: 4 A.S.

t = (27) °C

27 °C: 2 A.S.

Algarismos significativos

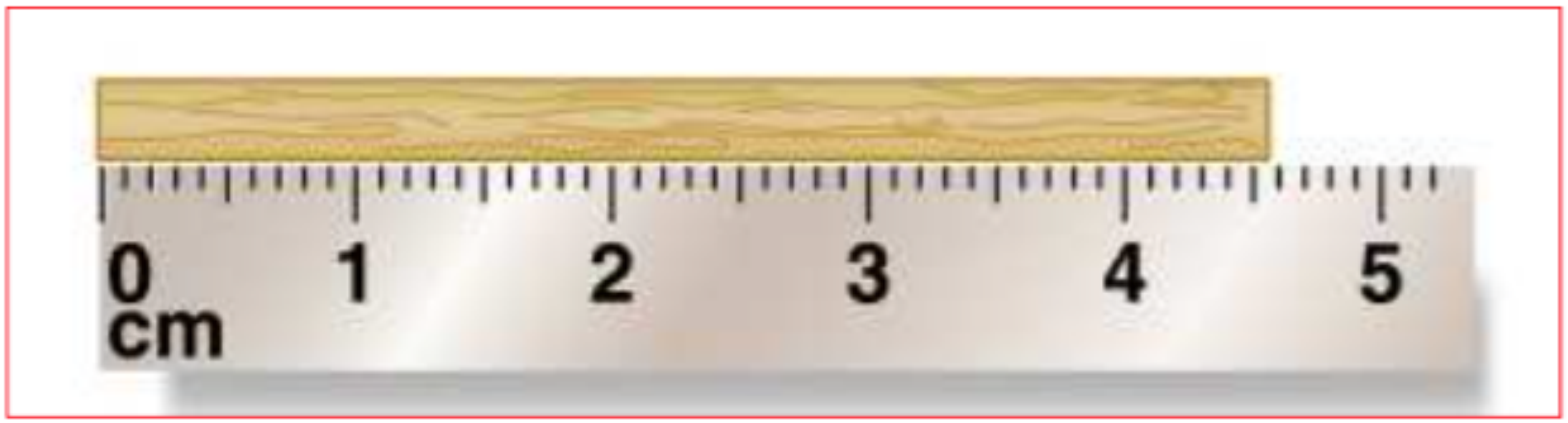
Qual o comprimento da barra abaixo?



1) 4,5 cm
2) 4,54 cm
3) 4,547 cm

Algarismos significativos

Qual o comprimento da barra abaixo?



1) 4,5 cm
2) 4,54 cm
3) 4,547 cm

Algarismos significativos

Quantos são os algarismos significativos nos números abaixo???

1) **0,030 m**
2) **4050 litros**
3) **0,0008 g**
4) **3,00 m**
5) **0,8340**

1	**2**	**3**
2	**3**	**4**
1	**2**	**4**
1	**2**	**3**
3	**5**	**4**

Algarismos significativos

Quantos são os algarismos significativos nos números abaixo???

1) 0,030 m	**2**
2) 4050 litros	**4**
3) 0,0008 g	**1**
4) 3,00 m	**3**
5) 0,8340	**4**

Resultado de uma medição:
Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \pm \textit{erro}\ (\textit{unidade})}$$

Resultado de uma medição:
Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \; \pm \; \textit{erro} \; (\textit{unidade})}$$

$\bar{x}$

Resultado de uma medição:
Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro}\ (\textit{unidade})}$$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Resultado de uma medição: Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro}\ (\textit{unidade})}$$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Note que aqui estamos estimando o que definimos antes como *incertezas aleatórias*. Incertezas aleatórias podem ser reduzidas por repetição (maior número N de medidas).

Incertezas sistemáticas, no entanto, não podem em geral ser reduzidas por mera repetição. Elas dependem do entendimento do instrumento e das técnicas de medição. A partir de um número suficientemente grande de medidas, elas passam a ser *dominantes*.

Resultado de uma medição:
Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \ \pm \ \textit{erro (unidade)}}$$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Exemplo:

$$\bar{x} = 10,0835 \longrightarrow \bar{x} = 10,08 \pm 0,07(\text{unid.})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0,072$$

Resultado de uma medição: Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro} \; (\textit{unidade})}$$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

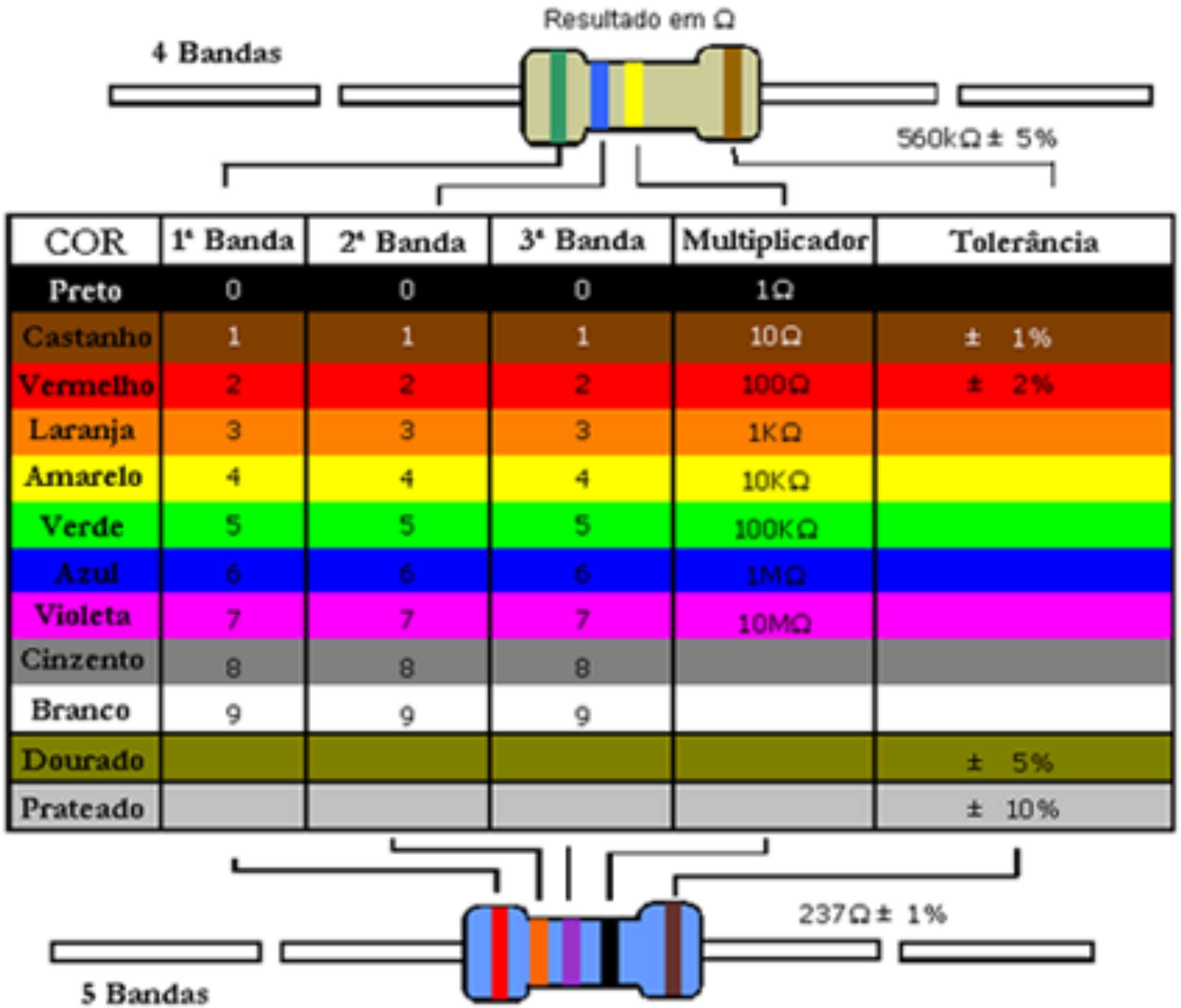
Exemplo:

$$\bar{x} = 10,0835 \longrightarrow \bar{x} = 10,08 \pm 0,07(\text{unid.})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0,072$$

Número de algarismos significativos
determinado pelo valor do erro

Como ler o código de cores de um resistor



COR	1ª Banda	2ª Banda	3ª Banda	Multiplicador	Tolerância
Preto	0	0	0	1Ω	
Castanho	1	1	1	10Ω	± 1%
Vermelho	2	2	2	100Ω	± 2%
Laranja	3	3	3	1KΩ	
Amarelo	4	4	4	10KΩ	
Verde	5	5	5	100KΩ	
Azul	6	6	6	1MΩ	
Violeta	7	7	7	10MΩ	
Cinzento	8	8	8		
Branco	9	9	9		
Dourado					± 5%
Prateado					± 10%

Cor	Código
Preto	0
Castanho	1
Vermelho	2
Laranja	3
Amarelo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Cinza	8
Branco	9

Precisão

Castanho	± 1%
Vermelho	± 2%
Dourado	± 5%
Prata	± 10%

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	0	0	2

DC

$\boxed{600\ V}$

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução: 1 V

(Variação do dígito menos significativo)

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	0	1.	6

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução: 0,1 V = 100 mV

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	1.	5	7

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução: 0,01 V = 10 mV

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

1.	5	7	1

Resolução: 0,001 V = 1 mV

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

Mostrador com dígito "1" à esquerda:
valor acima do máximo da escala

1		.	

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução: 0,1 mV = 100 μV

Extras

Exemplo Média

- Calcule a média da idade dos alunos da tabela ao lado, utilizando as diferentes classes.

Aluno	Idade
1	18
2	17
3	18
4	19
5	18
6	21
7	17
8	20
Soma	148
Média	18.5

Exemplo Média

- Calcule a média da idade dos alunos da tabela ao lado, utilizando as diferentes classes.

Aluno	Idade
1	18
2	17
3	18
4	19
5	18
6	21
7	17
8	20
Soma	148
Média	18.5

Dados em *M* classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, ..., x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, ..., n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_Mx_M}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} n_jx_j$$

Exemplo Média

- Calcule a média da idade dos alunos da tabela ao lado, utilizando as diferentes classes.

Aluno	Idade
1	18
2	17
3	18
4	19
5	18
6	21
7	17
8	20
Soma	148
Média	18.5

Dados em *M* classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, ..., x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, ..., n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_M x_M}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M} n_j x_j$$

Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha1
[16 – 18)	2	17	34
[18 – 20)	4	19	76
[20 – 22)	2	21	42
		Soma	152
		Média	19

Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha2
[17 – 19)	5	18	90
[19 – 21)	2	20	40
[21 – 23)	1	22	22
		Soma	152
		Média	19

Exemplo Média

- Calcule a média da idade dos alunos da tabela ao lado, utilizando as diferentes classes.

Aluno	Idade
1	18
2	17
3	18
4	19
5	18
6	21
7	17
8	20
Soma	148
Média	18.5

Dados em *M* classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, ..., x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, ..., n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_M x_M}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M} n_j x_j$$

Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha1
[16 – 18)	2	17	34
[18 – 20)	4	19	76
[20 – 22)	2	21	42
		Soma	152
		Média	19

Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha2
[17 – 19)	5	18	90
[19 – 21)	2	20	40
[21 – 23)	1	22	22
		Soma	152
		Média	19

Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha3
[16.5 – 18.5)	5	17.5	87.5
[18.5 – 20.5)	2	19.5	39
[20.5 – 22.5)	1	21.5	21.5
		Soma	148
		Média	18.5

Exemplo Média

- Calcule a média da idade dos alunos da tabela ao lado, utilizando as diferentes classes.

Aluno	Idade
1	18
2	17
3	18
4	19
5	18
6	21
7	17
8	20
Soma	148
Média	18.5

Dados em *M* classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, ..., x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, ..., n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_Mx_M}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} n_jx_j$$

Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha1
[16 – 18)	2	17	34
[18 – 20)	4	19	76
[20 – 22)	2	21	42
		Soma	152
		Média	19

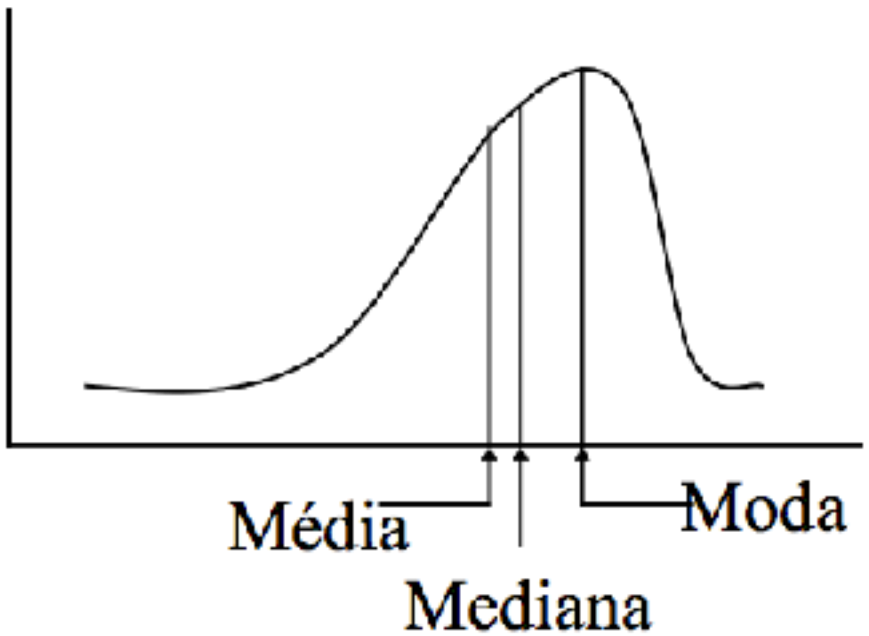
Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha3
[16.5 – 18.5)	5	17.5	87.5
[18.5 – 20.5)	2	19.5	39
[20.5 – 22.5)	1	21.5	21.5
		Soma	148
		Média	18.5

Idades [anos]	Frequência	Ponto Médio	Escolha2
[17 – 19)	5	18	90
[19 – 21)	2	20	40
[21 – 23)	1	22	22
		Soma	152
		Média	19

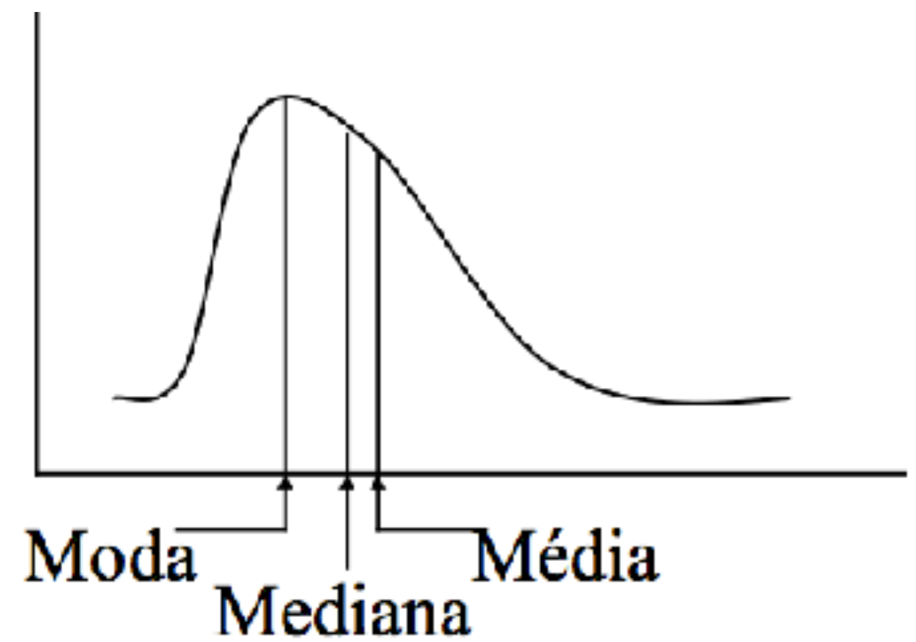
Conclusão: A média calculada a partir de uma tabela de frequências agrupada em classes é uma estimativa do valor real. Na prática, **SEMPRE** calcule a média com os dados originais.

Média - Mediana - Moda

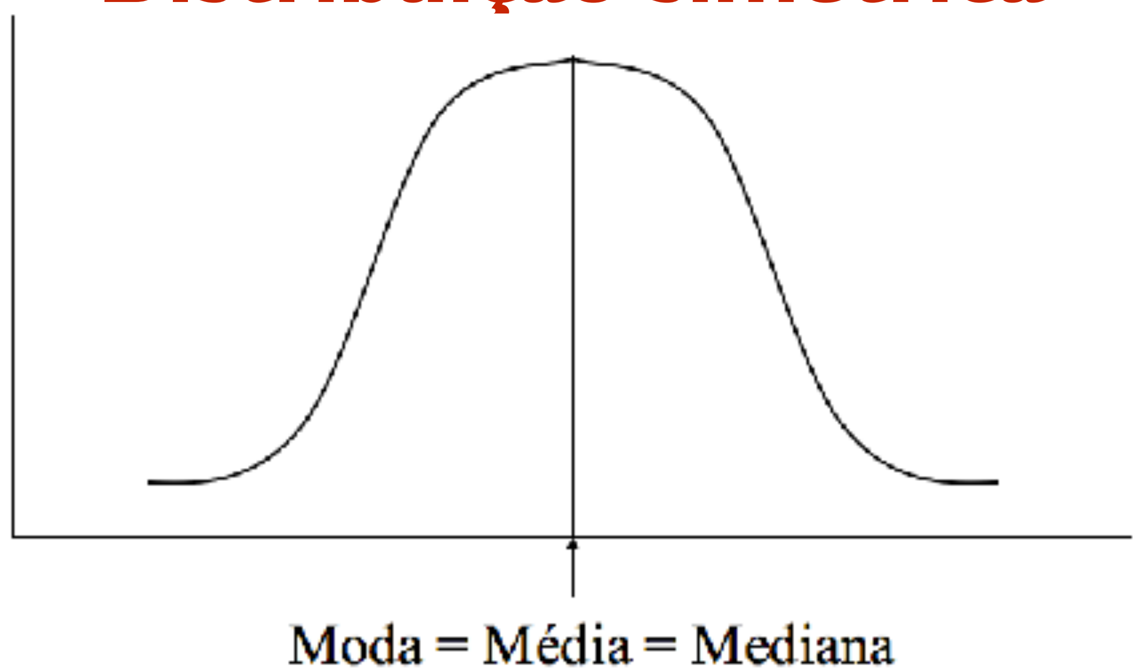
Distribuição assimétrica para a esquerda,



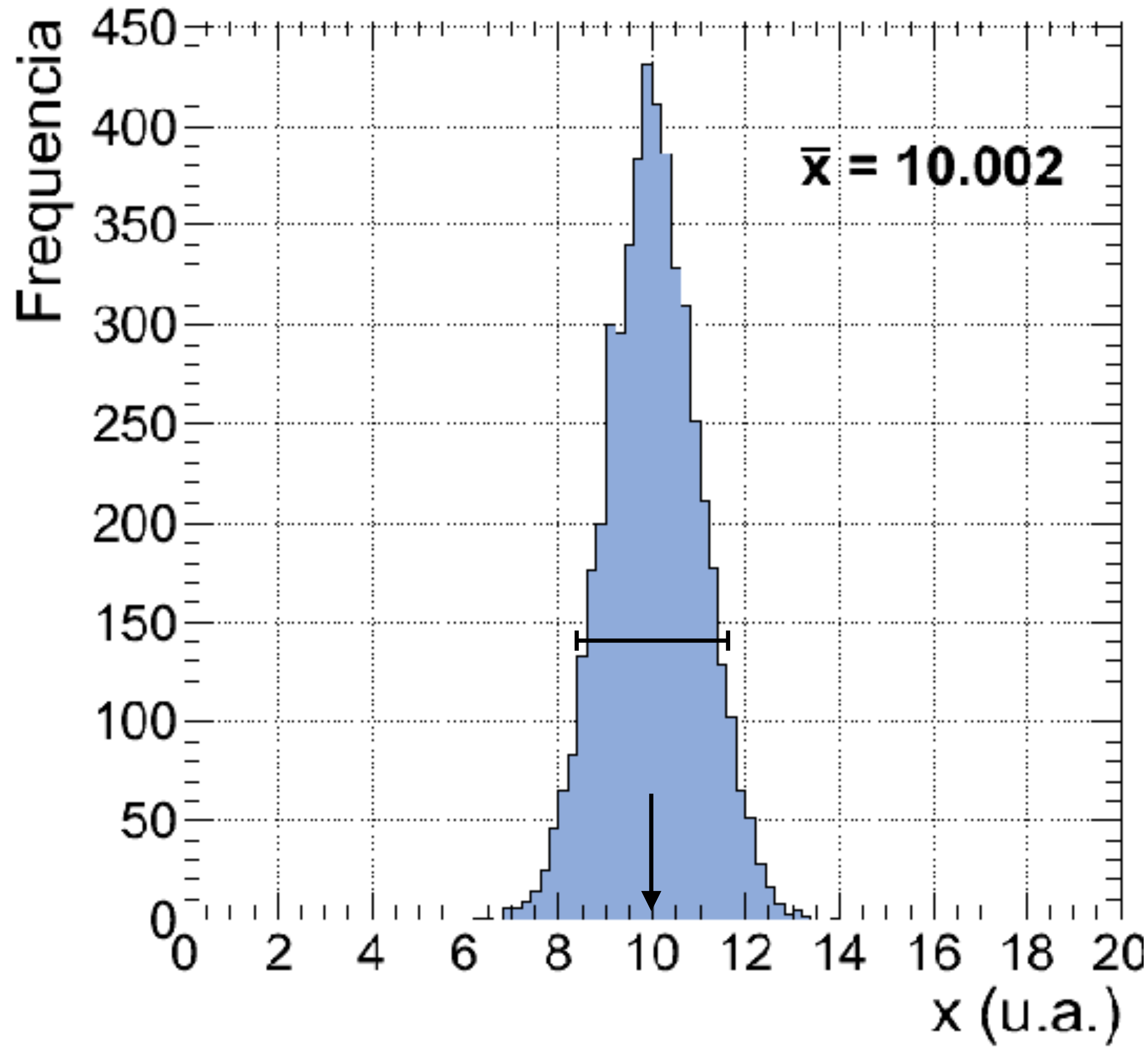
Distribuição assimétrica para a direita,



Distribuição simétrica



Estimativa do erro da medida



Resumo: parâmetros de posição

i) *Média*:

Valor médio de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$:

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Dados em *M* classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, ..., x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, ..., n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_M x_M}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} n_j x_j$$

ii) *Moda*: Valor mais frequente de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$

iii) *Média quadrática*:

$$x_{\mathrm{rms}} \equiv \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

iv) *Mediana* (Mesma quantidade de dados abaixo e acima da mediana):

$$N(\text{ímpar}) \rightarrow x_{\mathrm{med}} = x_{(N+1)/2}$$

$$N(\text{par}) \rightarrow x_{\mathrm{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

Parâmetros de dispersão

i) *Amplitude*: Diferença entre os valores máximo e mínimo de uma coleção de dados $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$

$$A = x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}$$

ii) *Desvio médio*: Média dos módulos dos desvios, em relação à média

$$\overline{|\delta x|} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\delta x_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \bar{x}| = \frac{|x_1 - \bar{x}| + \ldots + |x_N - \bar{x}|}{N}$$

Parâmetros de dispersão

iii) *Variância*: Média dos quadrados dos desvios (δx_i)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta x_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

Note que a expressão para a variância pode ser simplificada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Parâmetros de dispersão

iv) *Desvio padrão*: Raiz quadrada da variância, ou média quadrática dos desvios

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta x_i)^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$

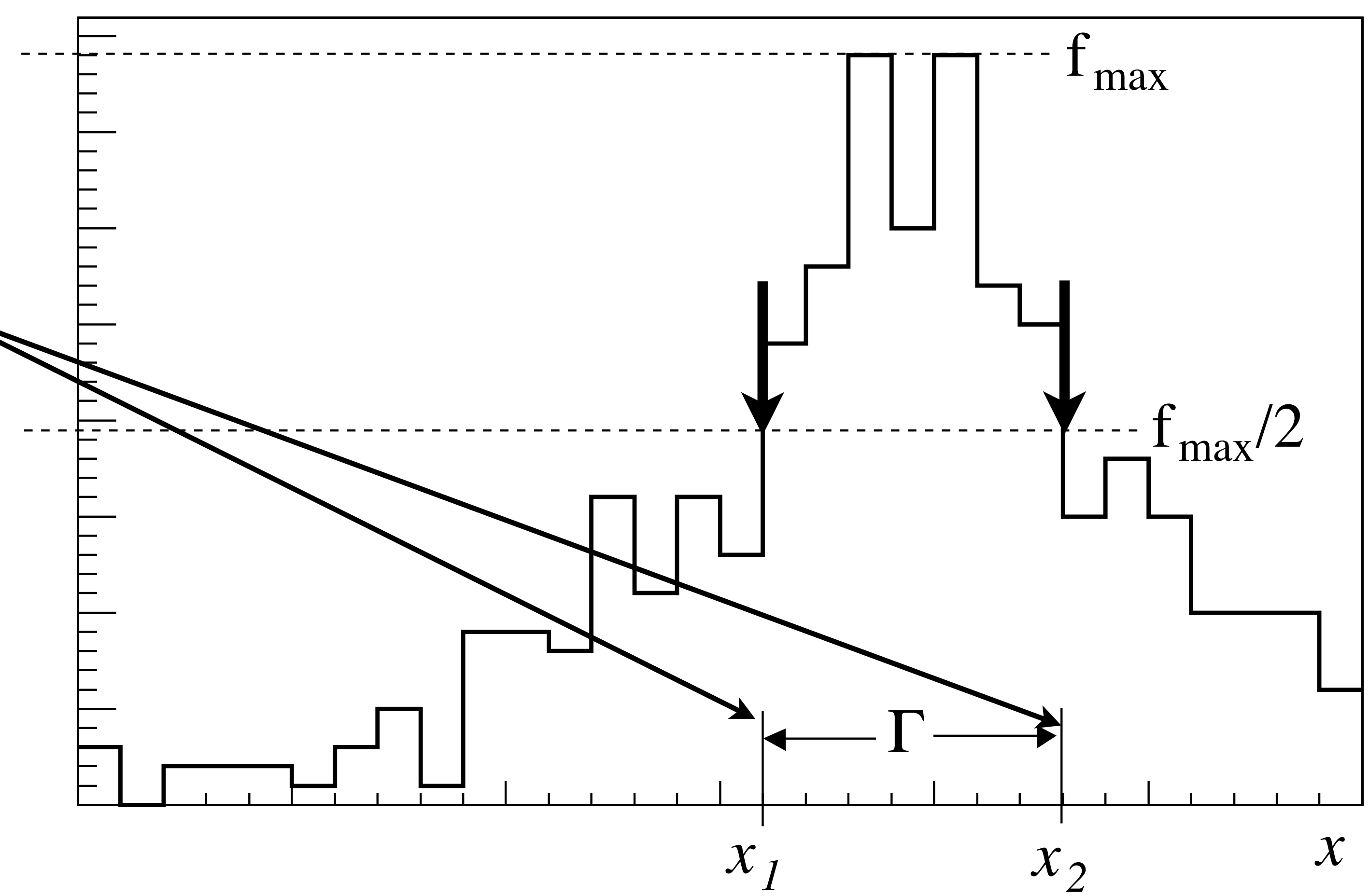
$$\Rightarrow \quad \sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

Parâmetros de dispersão

v) *Largura a meia altura*: Comprimento do intervalo limitado pelos valores (x_1,x_2) correspondentes à metade da frequência máxima

Símbolo: Γ

$$\Gamma = |x_2 - x_1|$$



Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)$$

$$= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)\left(y_1 - \bar{y}\right) + \ldots + \left(x_N - \bar{x}\right)\left(y_N - \bar{y}\right)}{N}$$

Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)$$

$$= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)\left(y_1 - \bar{y}\right) + \ldots + \left(x_N - \bar{x}\right)\left(y_N - \bar{y}\right)}{N}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)$$

$$= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)\left(y_1 - \bar{y}\right) + \ldots + \left(x_N - \bar{x}\right)\left(y_N - \bar{y}\right)}{N}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

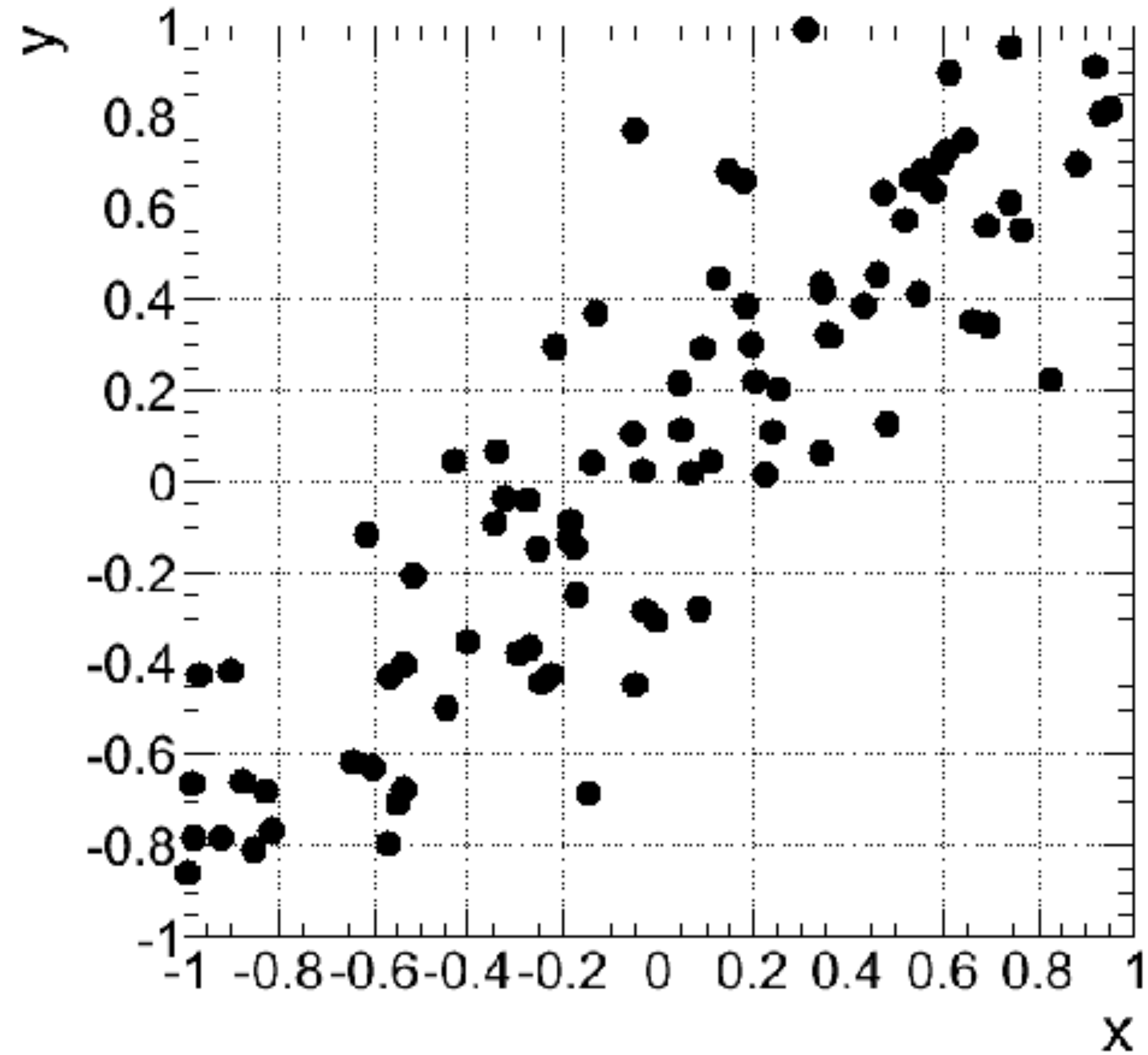
e que não importa a ordem das variáveis:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

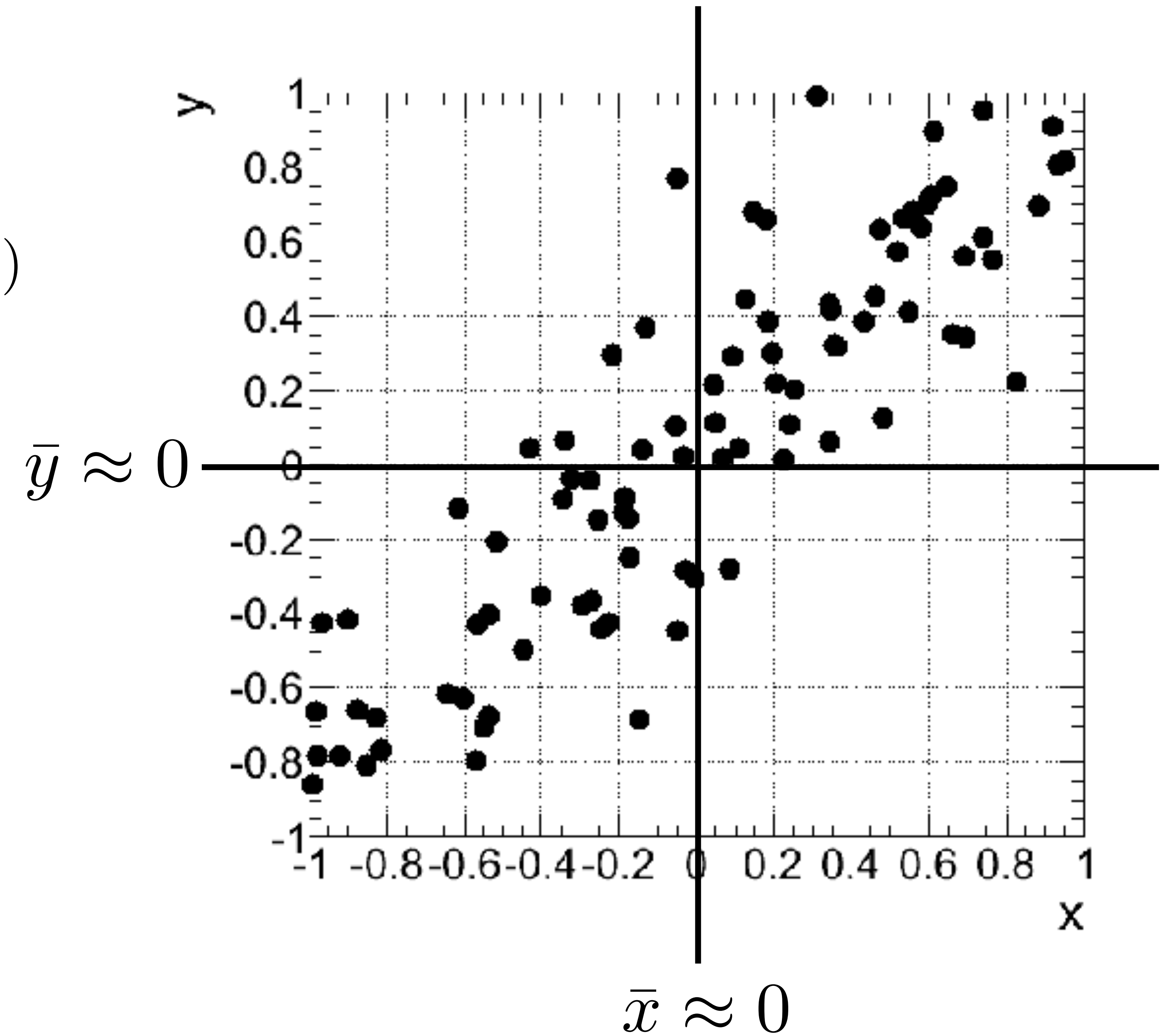
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



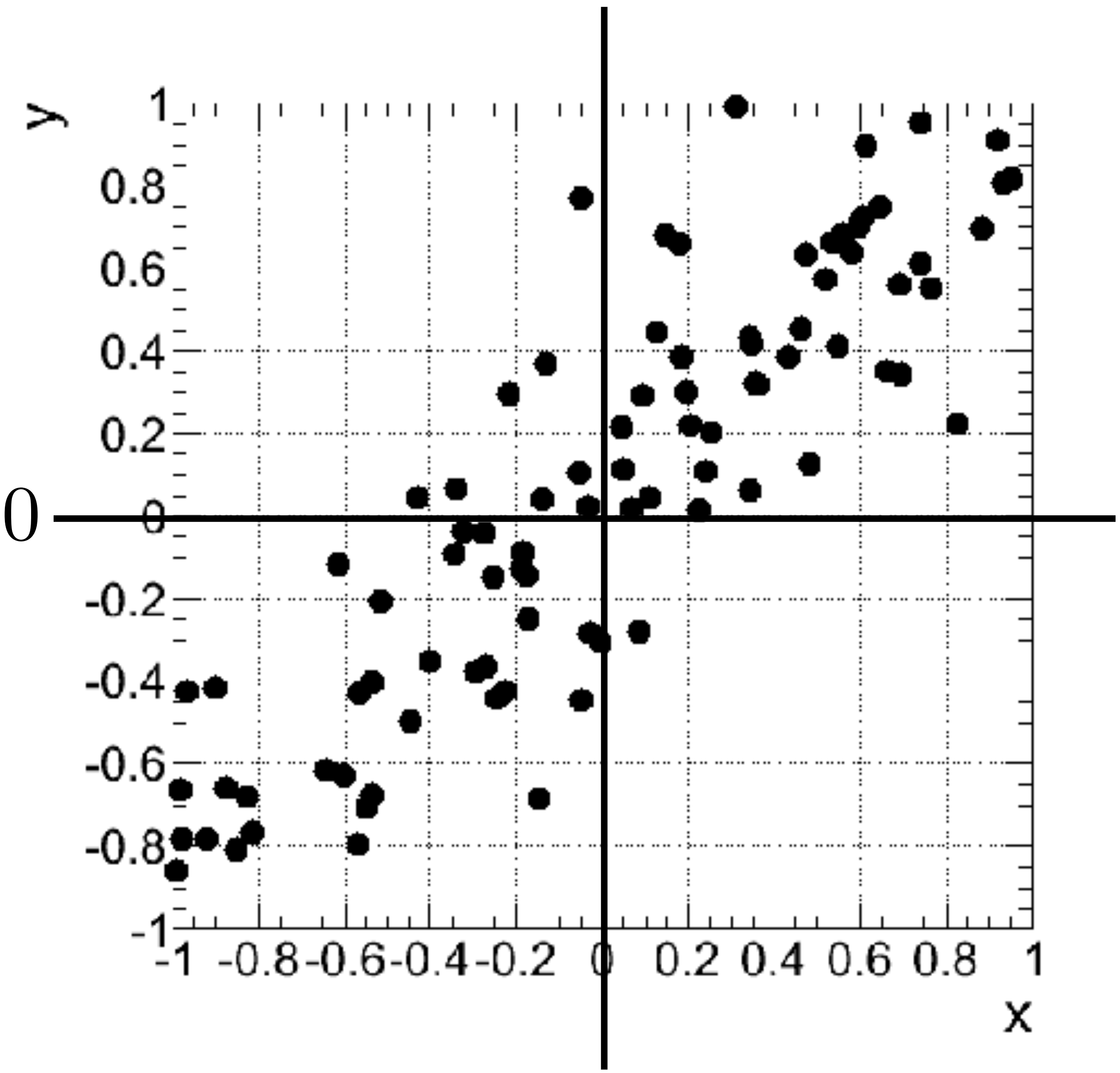
Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{xy} > 0$$

$\bar{y} \approx 0$

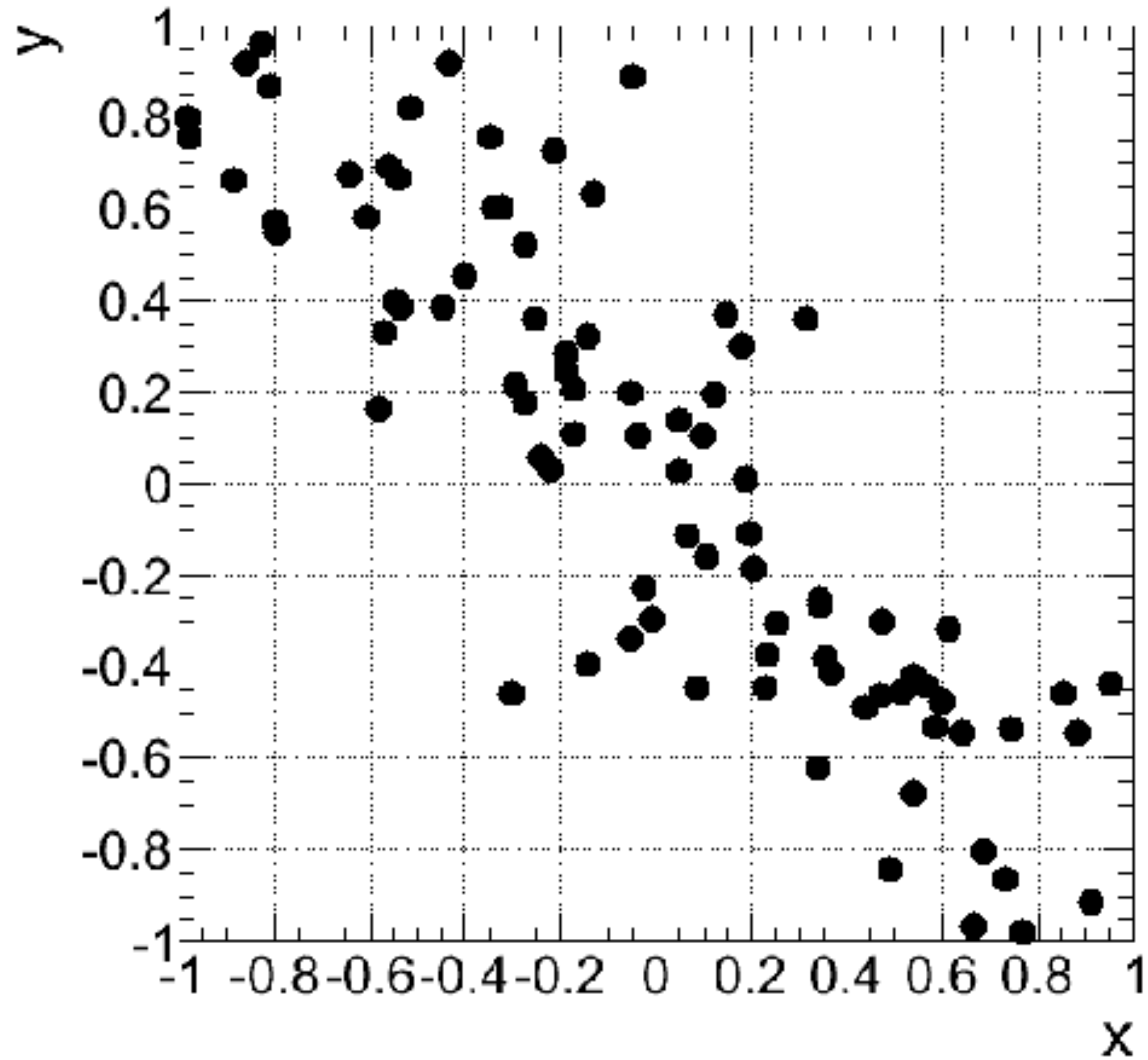


$\bar{x} \approx 0$

Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

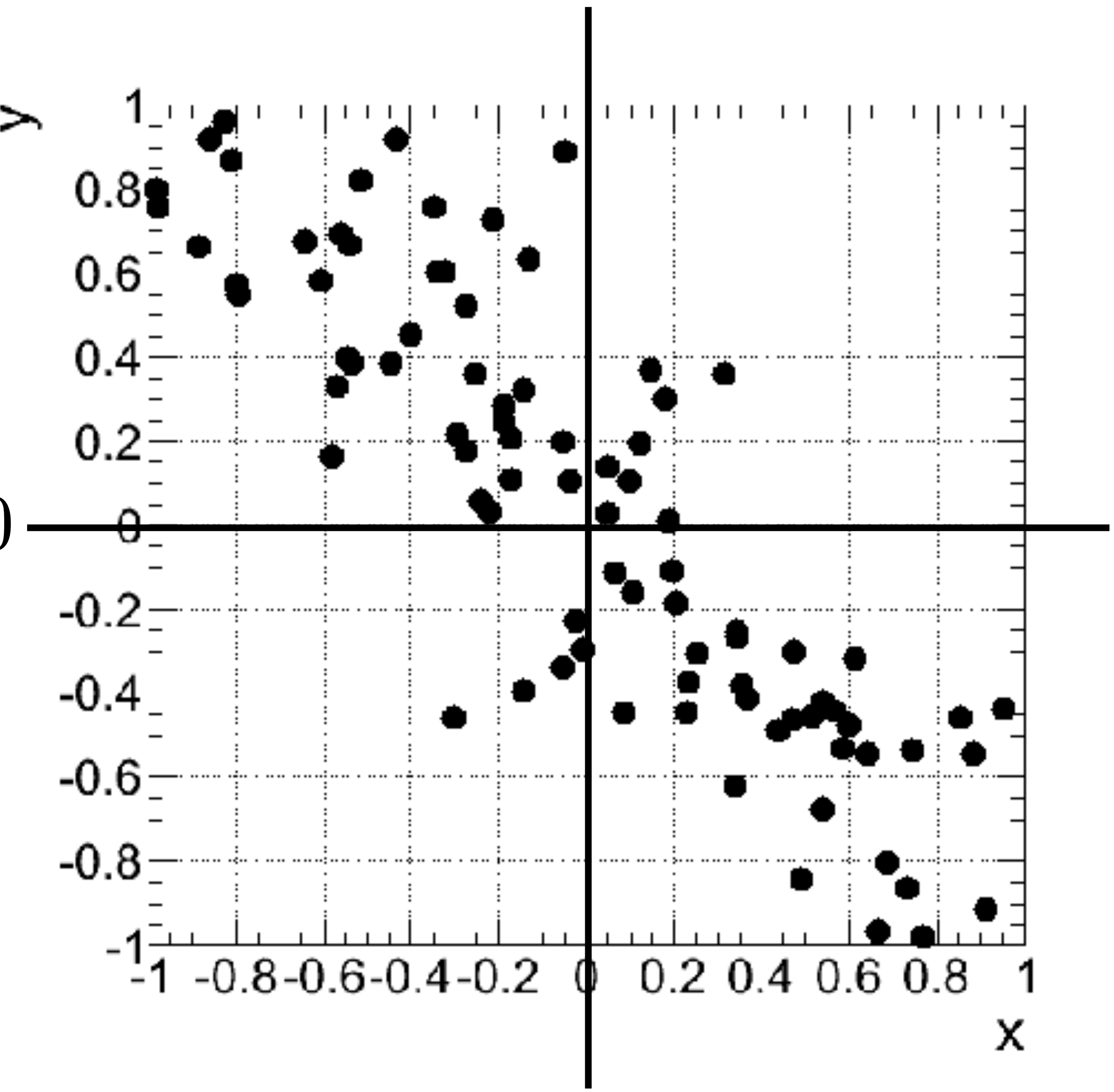


Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)$$

$\bar{y} \approx 0$



$\bar{x} \approx 0$

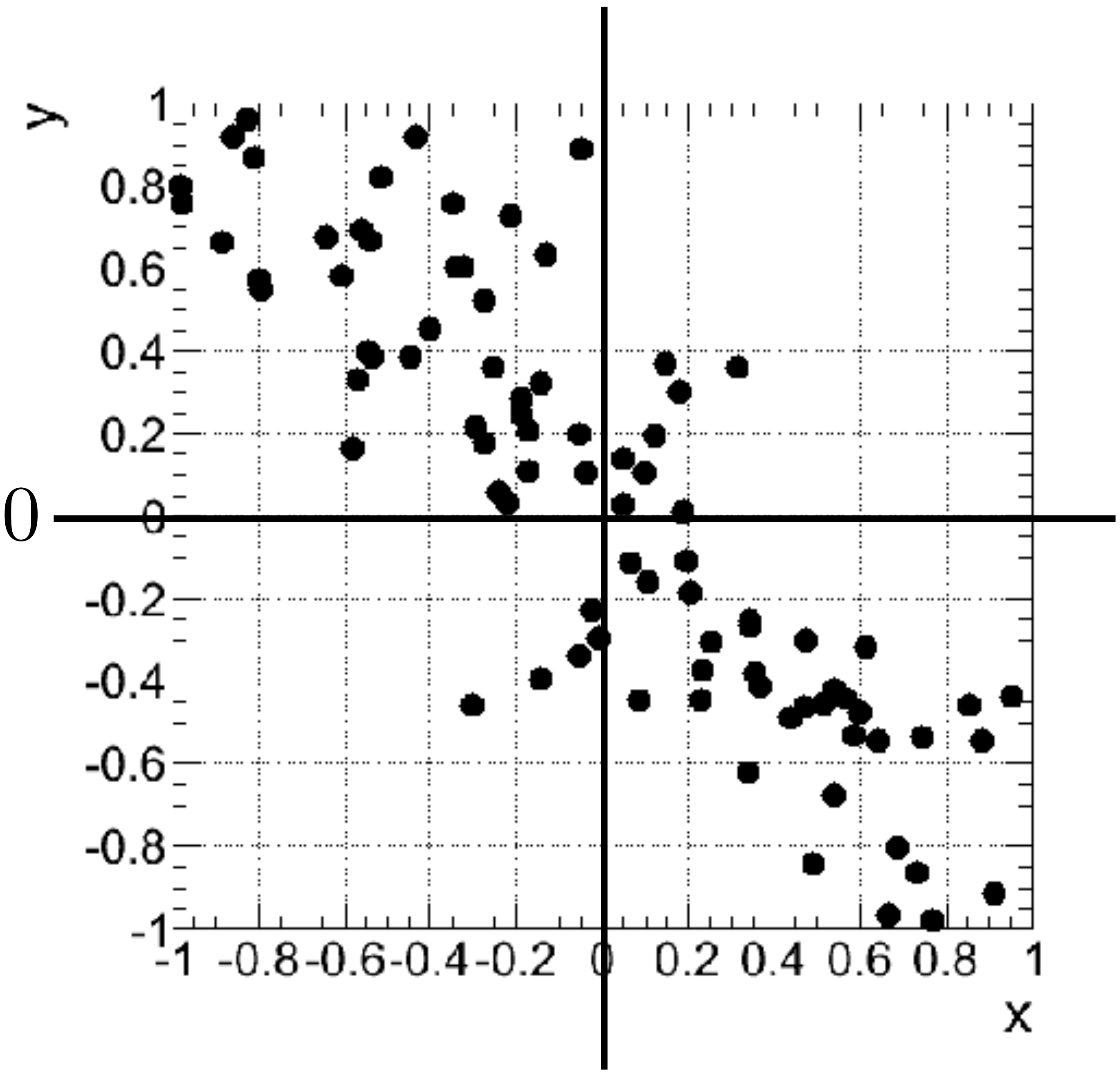
Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{xy} < 0$$

$\bar{y} \approx 0$



$\bar{x} \approx 0$

Parâmetros de correlação

i) *Coeficiente de correlação linear de Pearson*: covariância entre duas variáveis, dividida por seus desvios padrão

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad\qquad -1 \geq r \leq 1$$

Correlação linear, perfeita e positiva: $r = 1$

Correlação linear, perfeita e negativa: $r = -1$