Laboratório de Física Geral

Profª Patricia Teles

Sala 3006-A

Email: athenafma@gmail.com

<u>Aula8</u>: Método dos Mínimos Quadrados (ajuste linear)

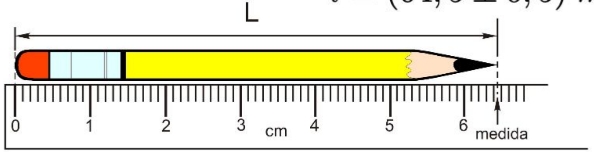
Medidas e Incertezas

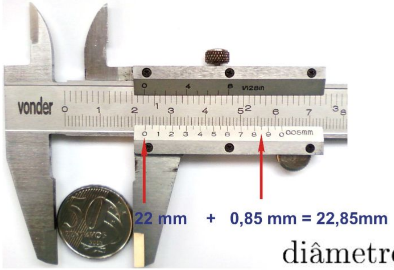
Experimentos em qualquer área:

- envolvem medidas às quais estão relacionadas incertezas: estimar, reduzir ou controlar essas incertezas (erros);
- qualquer medida só faz sentido se vier acompanhada de sua incerteza (erro): **(valor da medida +/- erro)**
- Classificação geral de medidas:
  - **Diretas**: valores obtidos diretamente de escalas ou especificações de instrumentos
    - No caso de escalas (régua, paquímetro etc): a incerteza é dada por L/2 onde L é o valor da menor divisão

$$\sigma_{ap} = 1/2 \times (\textit{precisão da régua milimetrada}) = 0,5mm$$

$$l = (64,5 \pm 0,5)\ mm$$

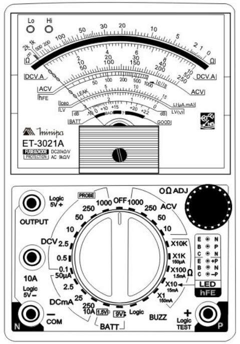




Paquimetro com precisao
1/N = 1/20 = 0.05 mm,
onde N=20 é o nro de divisoes do Nonio (ou Vernier metrico)

$$\text{diâmetro da moeda é } (22,85 \pm 0,05\ mm)$$

- No caso de instrumentos (fotômetro, multímetro etc):



Multimetro Analogico (especificações)
Resistência
Precisão: ± 3,0% arco de escala

Multimetro Digital (especificações)
Precisão: 2000Ω ~ 200kΩ ±(0,8%+5D)

Medidas e Incertezas (continuação)

- Classificação geral de medidas:
  - **Indiretas**: medição de grandezas que dependem de outras grandezas, as quais podem ser medidas diretamente.
    - Supõem um modelo ou uma relação matemática que permite obter uma grandeza desconhecida (grandeza de saida) através de grandezas conhecidas (grandeza de entrada)
    - Observar que as incertezas calculadas nas medidas diretas são propagadas para as medidas indiretas (**propagação de erros**)

$$g = 4\pi^2 l/T^2 \quad u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{\bar{T}^2}\right]^2 u^2(l) + \left[4\pi^2 \frac{2\bar{l}}{\bar{T}^3}\right]^2 u^2(T)$$

(1) as melhores estimativas $\bar{l} = 1{,}000\ m$ e $\bar{T} = 2{,}00\ s$; e (2) as incertezas de medição $u(l) = 0{,}005\ m$ e $u(T) = 0{,}01\ s$ das grandezas de entrada. Com isso, obtemos:

$$u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{2{,}00^2}\right]^2 0{,}005^2 + \left[4\pi^2 \frac{2 \cdot 1{,}000}{2{,}00^3}\right]^2 0{,}01^2 \cong \pi^4 \cdot 0{,}005^2 + \pi^4 \cdot 0{,}01^2$$

$$\therefore u(g) \cong \sqrt{\pi^4 \cdot 0{,}005^2 + \pi^4 \cdot 0{,}01^2} \cong 0{,}1103\ m/s^2$$

Enfim, arredondando $u(g)$ para apresentar somente um algarismo não-nulo e arredondando $\bar{g}$ para apresentar a mesma quantidade de algarismos após a vírgula que $u(g)$, temos que a aceleração local da gravidade pode ser expressa por $(9{,}9 \pm 0{,}1)\ m/s^2$. Ou seja, no nosso exemplo, o valor (verdadeiro) da aceleração local da gravidade provavelmente pertence ao intervalo de $9{,}8\ m/s^2$ a $10{,}0\ m/s^2$.

Considere o seguinte modelo matemático genérico que relacione uma grandeza de saída y às grandezas de entrada $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Seja $\bar{x}_i$ a melhor estimativa da i-ésima grandeza de entrada e $u(x_i)$ sua incerteza de medição. Assumindo que a correlação entre as n grandezas de entrada pode ser desprezada e que o modelo matemático $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é aproximadamente linear na região de interesse, é possível estimar a incerteza $u(y)$ da grandeza de saída pela seguinte lei de propagação:

$$u^2(y) \cong \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2 u^2(x_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^2 u^2(x_2) + \cdots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^2 u^2(x_n)$$

Medidas indiretas: Ajuste de funções

- Ajuste de funções

$$y = f\left(x; a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$$

Medidas de duas grandezas x e y:

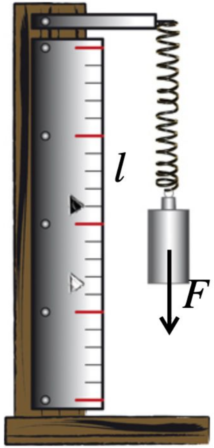
$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$

Estimativa dos parâmetros (a partir de uma relação funcional postulada)

Queremos obter: $a_1 \pm \sigma_{a_1}, \ldots, a_p \pm \sigma_{a_p}$

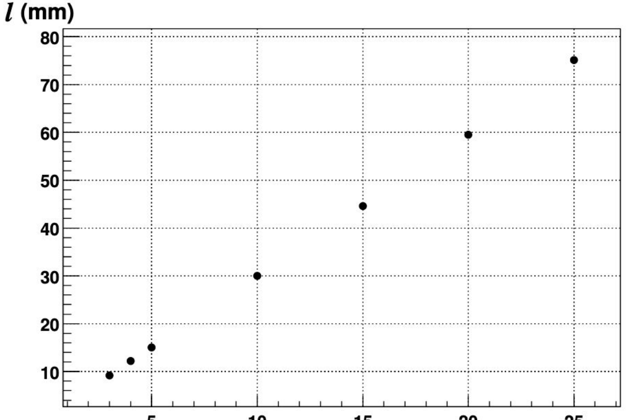
Exemplo: dinamômetro de mola

Reta de Calibração de um dinanômetro



F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

Gráfico de dispersão



- O comportamento ideal de uma mola nos diz que a sua elongação é relacionada com a magnitude da força aplicada na mesma:

$$l = a \cdot F + b$$

Equação de uma reta

$$y = f\left(x; a, b\right) = a \cdot x + b$$

- Queremos obter estimativas para os parâmetros da reta (a,b). Para isso utilizamos um método chamado de "Método dos Mínimos Quadrados"

Ajuste linear

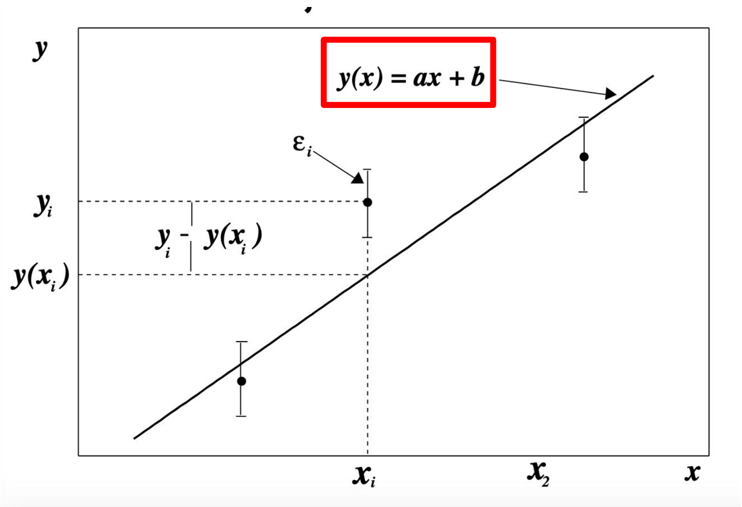
- Queremos minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre a medidas observadas e os valores previstos pela relação funcional entre y e x:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Medida observada

$$y = f(x_i; a, b) = ax_i + b$$

Obs.: Quando a relação funcional postulada entre as medidas é linear (ou seja elas são relacionadas pela eq. de uma reta), chamamos o método de "Ajuste linear"



$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$N\left(\overline{xy} - a\overline{x^2} - b\bar{x}\right) = 0$$

$$N(\bar{y} - a\bar{x} - b) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{array}}$$

- Podemos mostrar (Exercício - Ver Apêndice F do livro texto) que as estimativas dos parâmetros e suas incertezas são dadas por:

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x}\frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}}$$

Estimativa do Erro em cada medida de y

residuos

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{\boxed{[y_i - (ax_i + b)]}^2}{N-2}} = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{N-2}(1-r^2)}$$

Dos N dados utilizados na estimativa de erro apenas N-2 são independentes

- No caso anterior assumimos que as incertezas nas medidas de y e x são constantes. Em geral devemos considerar o erro em cada medida (σ_i):

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Erro efetivo em cada medida

	X	Y	XY	X²	a+bx	Δy²	Δy
1	3.000	9.200	27.600	9.000	9.090	0.012	0.110
2	4.000	12.200	48.800	16.000	12.073	0.016	0.127
3	5.000	15.000	75.000	25.000	15.056	0.003	-0.056
4	10.000	30.000	300.000	100.000	29.972	0.001	0.028
5	15.000	44.600	669.000	225.000	44.887	0.083	-0.287
6	20.000	59.500	1190.000	400.000	59.803	0.092	-0.303
7	25.000	75.100	1877.500	625.000	74.719	0.145	0.381

N =
7

a	b
0.1405072	2.9831274

σ²	Δa	Δb
0.0704090	0.1790131	0.0126581

a±Δa =	0.1405072	±	0.1790131
b±Δb =	2.9831274	±	0.0126581

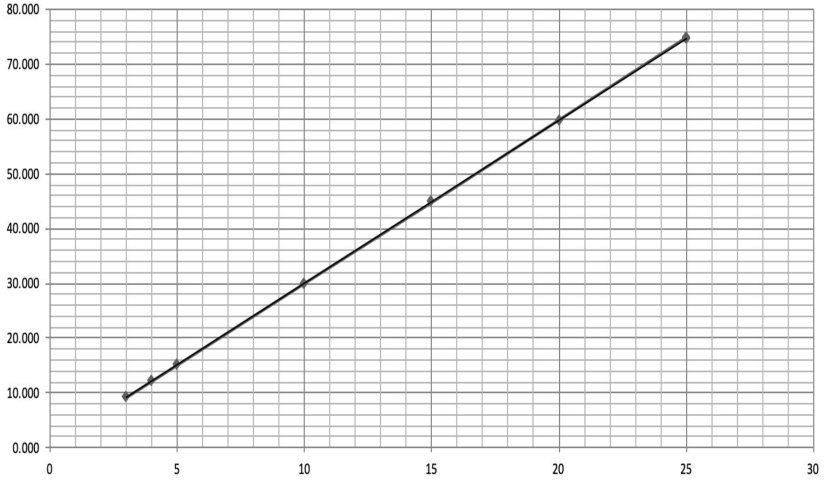
$$a = (2.983 \pm 0.013)\ \mathrm{mm/gf}$$

$$b = (0.14 \pm 0.18)\ \mathrm{mm}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_l = 0.27\ \mathrm{mm}$$

Equação da reta:

$$l\ (\mathrm{mm}) = 2.983 \cdot F\ (\mathrm{gf}) + 0.14$$

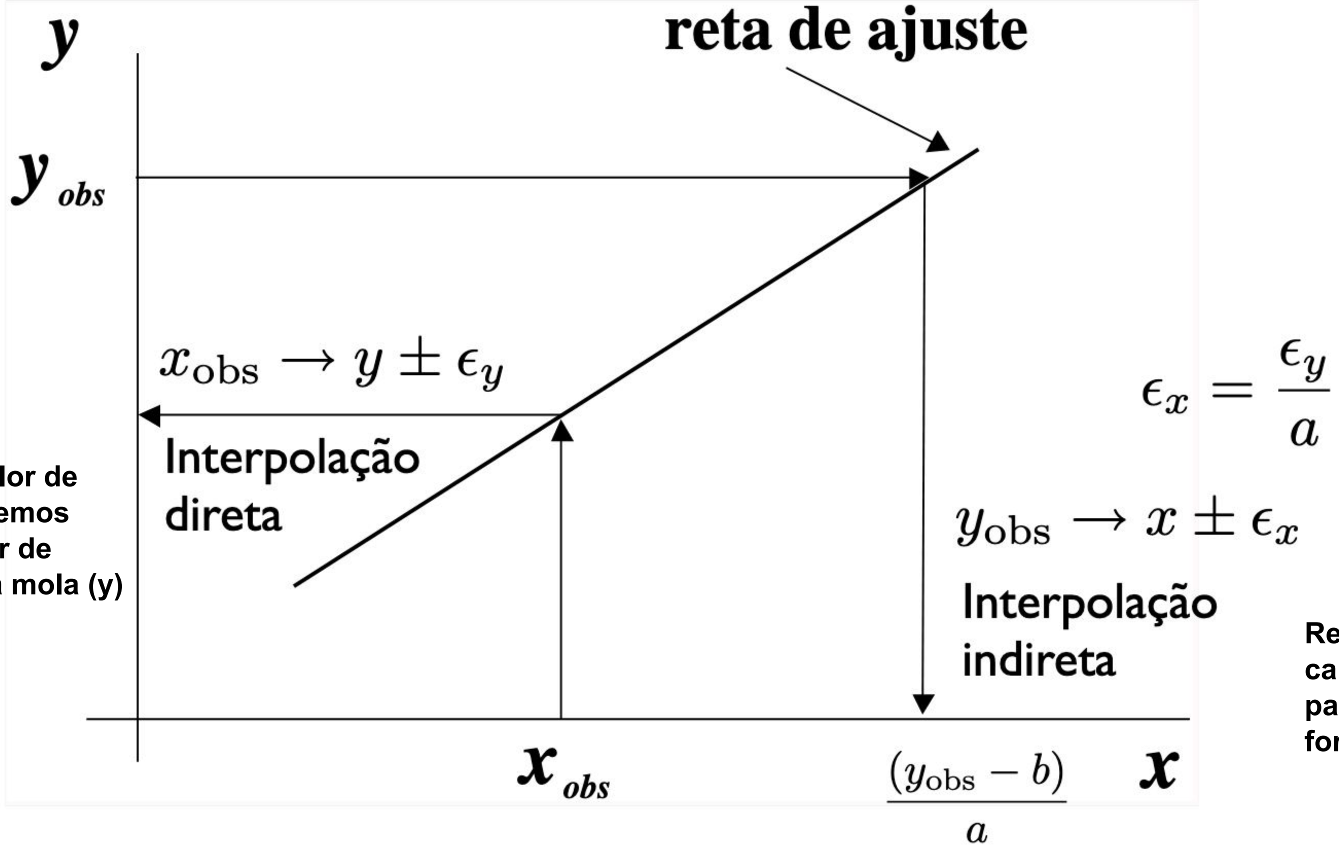


Reta de Calibração de um dinanômetro

Feito com Planilha de Ajuste Linear no Excel: ver na página

Reta de calibração e interpolação

Interpolação: método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecido

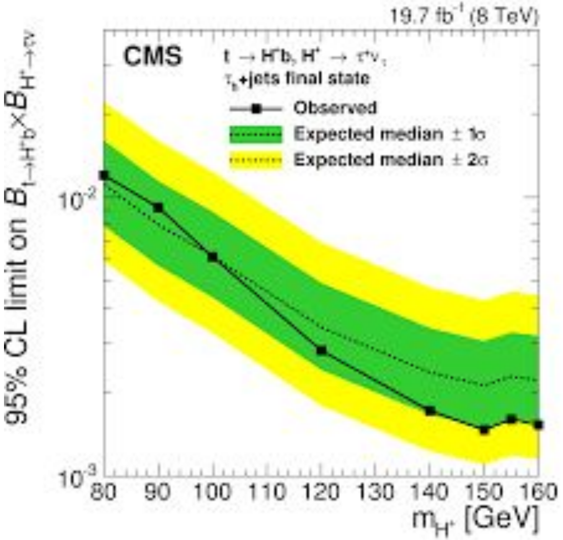


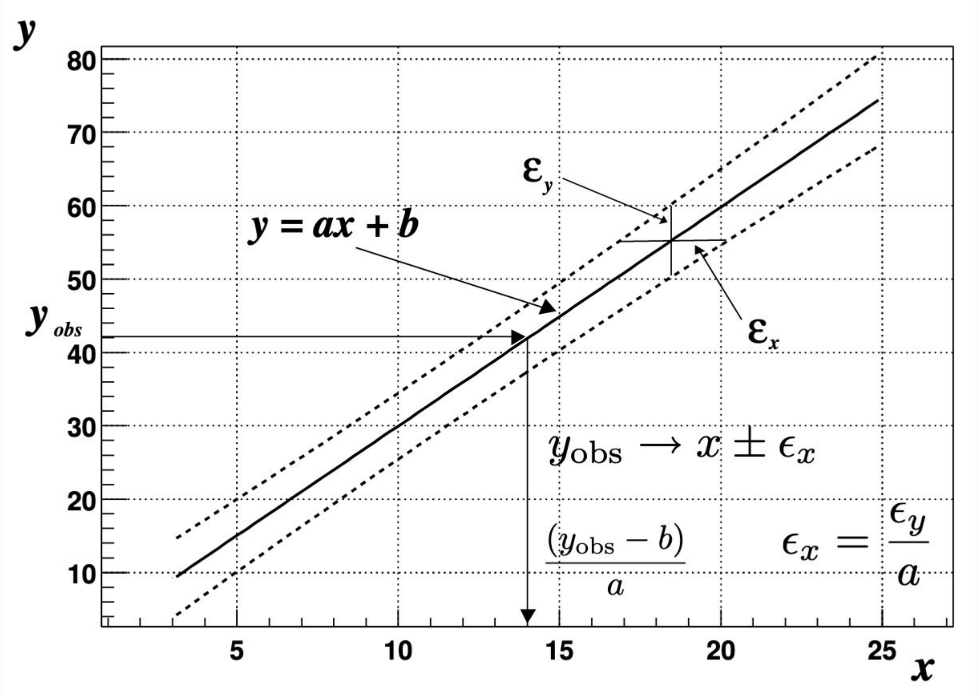
Para dado valor de força (x) podemos prever o valor de elongação da mola (y)

Reta de calibração para medir a força (x)

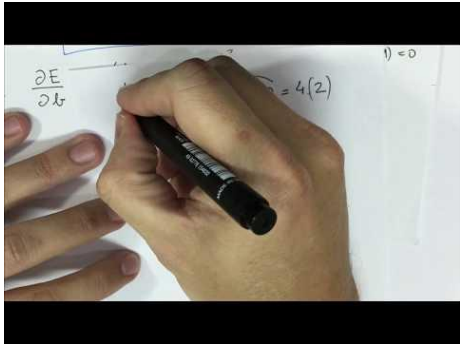
Faixa de confiança padrão associada a um nível de confiança da ordem de 68% limita um conjunto de valores (y - ε_y , y + ε_y) para a variavel y e um conjunto de valores (x - ε_x , x + ε_x) para x

Faixa de confiança

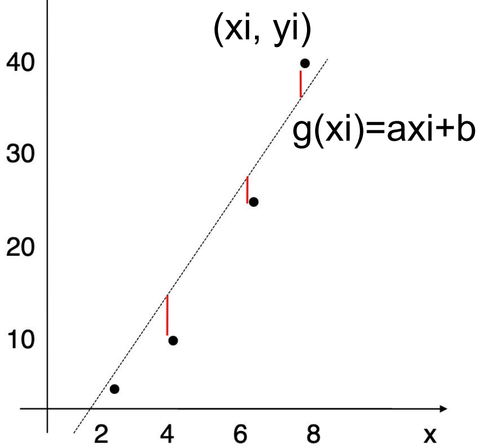




Video muito didático sobre MMQ, inclusive ensinando como usar calculadora para aplicar o método



i	1	2	3	4
x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	40



Pelo MMQ a função que melhor se ajusta ao conjunto de dados experimentais é aquela que minimiza a soma do quadrado dos desvios.

Em outras palavras, para medir o erro entre qualquer ponto (xi,yi) e a reta g(x) temos:

Erro = yi - g(xi) que é a distância entre o ponto e a reta.

Repare que se somarmos essas distancias pode acontecer que elas se anulem, então para evitar isso tomamos o módulo Erro = |yi - g(xi)|

As menores distâncias, melhor ajuste dos pontos à reta, deve abarcar todos os pontos

Erro = $\sum_i$ |yi - g(xi)| e esse erro deve ser “minimo”

O ponto de mínimo de uma função é calculado usando derivadas parciais. Por outro lado a função módulo não é diferenciável (tem um “bico”) então no lugar dela usamos a funcão quadrática (se erro é mínimo então o erro ao quadrado também é mínimo.

Assim, Erro = $\sum_i (yi - g(xi))^2 = \sum_i (yi - axi - b))^2$

Para obter o mínimo Erro, calculamos as derivadas parciais em relação à “a” e à “b” e as igualamos a zero.

Após alguma algebra (ver vídeo com detalhes) chega-se aos coeficientes angular “a” e linear “b”:

a = (N $\sum_i$ xi - $\sum_i$ xi $\sum_i$ yi) / N $\sum_i$ xi^2 - ($\sum_i$ xi)^2 e b=($\sum_i$ yi - a$\sum_i$ xi) / N

Com os valores acima se obtem a reta g(x) que melhor se ajusta aos pontos do gráfico.

Nesse caso g(x) = 6.55x - 12.5.

Mas ainda precisamos calcular as incertezas associadas aos coeficientes “a” e “b”