



Laboratório de Física Geral

Profª Patricia Teles

Sala 3006-A

Email: athenafma@gmail.com

Aula7: Estimativas e Erros em Medidas Indiretas: Propagação de Erros

Agenda atualizada

FÍSICA GERAL 2019-1		
Semana	Atividade de Laboratório	Obs.
25/02	01/03	Planejamento do período
04/03	08/03	CARNAVAL
11/03	15/03	Apresentação do curso e informações gerais. Dados e medidas. Organização dos dados em tabelas e histogramas. Coleta dos dados da turma (idade, massa, altura).
18/03	22/03	Parâmetros de posição, dispersão e correlação. Atividade 1: utilização dos dados da turma.
25/03	29/03	Medidas diretas: valor esperado, incertezas e erros, exatidão e precisão. Atividade 2: medidas diretas com resistores.
01/04	05/04	Módulo de Python
08/04	12/04	Erros associados às incertezas do tipo A: distribuição de Gauss, erro em medidas individuais, erro da média, nível de confiança. Algoritmos significativos e desvio padrão amostral. Erros associados a incertezas do tipo B: instrumentos analógicos e digitais. Erro padrão. Compatibilidade e discrepância: combinação de resultados compatíveis.]
15/04	19/04	Não houve aula/feriado páscoa
22/04	26/04	Erros associados a incertezas do tipo B: instrumentos analógicos e digitais. Erro padrão. Atividade 3: medida de um resistor com multímetros analógico e digital. Compatibilidade e discrepância: combinação de resultados compatíveis.]
29/04	03/05	Atividade 3: medida de um resistor com multímetros analógico e digital.
06/05	10/05	Aula de reposição dos experimentos / exercícios.
13/05	17/05	Estimativas e erros em medidas indiretas: propagação de erros. 17/05 apos P1
20/05	24/05	Atividade 4: medidas de área e volume de um sólido a partir de medidas diretas de suas dimensões com um paquímetro.
27/05	31/05	Estimativas e erros em medidas indiretas: ajuste de funções, ajuste linear.
03/06	07/06	Atividade 5: determinação da aceleração da gravidade com um pêndulo via ajuste linear.
10/06	14/06	Aula de reposição dos experimentos / exercícios.
17/06	21/06	Aula de reposição dos experimentos / exercícios.
24/06	28/06	Prova 2 de Laboratório / Prova de Reposição
01/07	05/07	Prova Final
08/07	12/07	Reserva - Término do semestre
15/07		RECESSO

Reposição Segunda
06/05
Exercícios/Duvidas



Feriado: 19/04 (6ª)
Sexta-feira Santa
Feriado: 23/04 (3ª)
São Jorge
Feriado: 01/05 (4ª)
Dia do trabalho

P1 Lab 14/05

23-24/05
Master Class CBPF

24/05 não
haverá
aula



P2 Lab 25/06
Final 04/07

1º Dia (23/05/19)		Local
09:00	Recepção	
09:15	Abertura/apresentação do evento-programa	Auditório 6º Andar
09:30	Palestra 1 : A vida dura de um cientista <i>Prof.Dr. Ronald Cintra Shellard – Diretor CBPF</i>	Auditório 6º Andar
10:20	Café	
10:35	Palestra 2: Da maçã de Newton à primeira foto do Buraco negro <i>Dr. Martin Makler – Pesquisador CBPF</i>	Auditório 6º Andar
11:25	Palestra 3 - A Estrutura Elementar da Matéria <i>Prof.Dr.Nelson Barrelo Jr – UFF/Pesquisador SPRACE</i>	Auditório 6º Andar
12:10	Palestra 4: Os Aceleradores de Partículas e as Experiências do CERN <i>Profa.Dra. Patricia Rebello Teles - UERJ</i>	Auditório 6º Andar
13:00	Almoço	
13:50	Instruções para análise de dados (<i>Nelson/Patricia</i>)	Auditório 6º Andar
14:30	Exercício no PC: Análise de Dados obtidos no CERN/CMS (em grupos de 2)	Sala RNP
16:40	Intervalo	
17:00	Fim das atividades do 1º dia	

2º. Dia (24/05)		
09:00	Palestra 5: Preparando para o Run 3 <i>Profa.Dra.Yara Amaral Coutinho- IF/UFRJ</i>	Auditório 6º Andar
10:00	Café	
10:20	Apresentação estudantes Beamline	Auditório 6º Andar
10:50	Discussão dos resultados e de assuntos correlatos Estatística, gráficos, histogramas <i>Patricia Rebello Teles</i>	Auditório 6º Andar
12:00	Videoconferência com pesquisadores do SPRACE	Auditório Vídeo
13:00	Almoço	
14:00	"Tarde do fisico" - atividade de visitação guiada às dependências/experimentos do CBPF	Laboratórios
16:00	Café	
16:15	Encerramento	Auditório

Quem se interessar em participar me avise!!

Não haverá aula dia 24/05, pois participarei das atividades do evento nos dois dias.

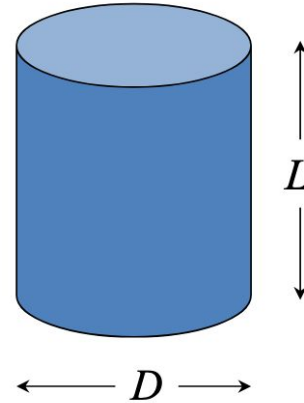
Endereço: Rua Xavier Sigaud, 150 Urca. Perto do Instituto Benjamin Constant e do Rio Sul.

Como determinar a incerteza de uma grandeza que é obtida por meio de um cálculo usando medidas diretas?

Exemplo: Vamos considerar um cilindro de diâmetro da base D e altura L .

Medindo D e L , o volume do cilindro será estimado por:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$



Aí vem a seguinte questão:

Qual a incerteza envolvida nessa determinação indireta do volume?

O diâmetro e a altura são determinados experimentalmente e, conseqüentemente essas grandezas possuem incertezas associadas a sua determinação:

$$D = \bar{D} \pm \sigma_D, \quad L = \bar{L} \pm \sigma_L$$

Vamos considerar um caso concreto

$$D = 5,00 \pm 0,05 \text{ cm} \quad L = 12,50 \pm 0,05 \text{ cm}$$

Considerando a expressão para a determinação do volume

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(5,00 \pm 0,05)^2}{4} (12,50 \pm 0,05) \text{ cm}^3$$

O valor médio do volume é dado simplesmente pelos valores médios do diâmetro e da altura:

$$\bar{V} = \pi \frac{(5,0)^2}{4} (12,5) \text{ cm}^3 = 245,44 \text{ cm}^3$$

Mas, qual a incerteza nessa determinação do volume?

Qual o valor que obteríamos se considerássemos os valores máximos do diâmetro, 5,05 cm, e da altura, 12,55 cm?

E se considerássemos os valores mínimos?

Assim, com esses dados de diâmetro e altura, podemos concluir que

$$V = (245 \pm 6) \text{ cm}^3$$

Esse procedimento de considerar “valores máximos e mínimos” nos dá uma ideia grosseira da incerteza na variável determinada indiretamente.

Existe um método mais rigoroso e apropriado para se encontrar a incerteza de uma variável determinada indiretamente.

Esse método é denominado PROPAGAÇÃO DE ERROS

Vamos considerar o caso de uma variável dependente geral

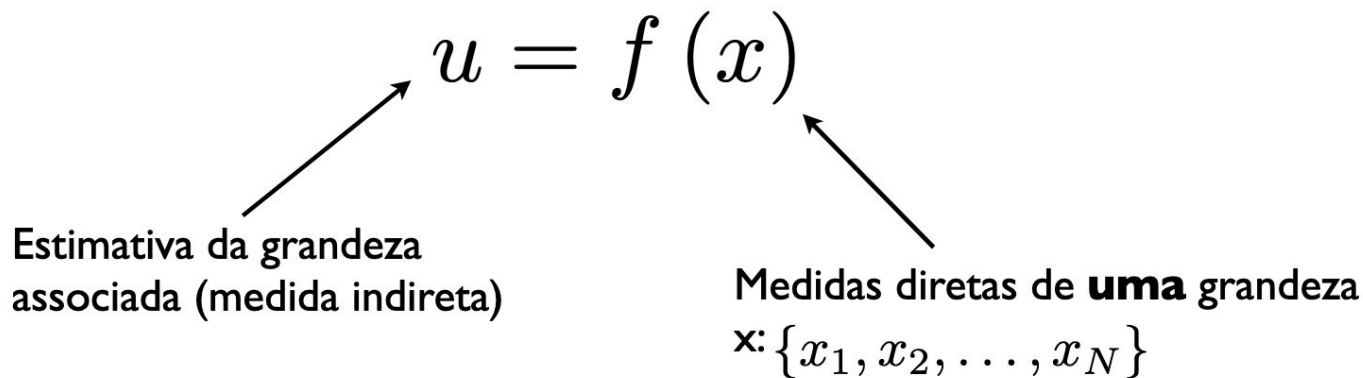
$$F(x, y, z, \dots)$$

A incerteza em F é determinada indiretamente pela propagação dos erros das outras variáveis

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (\sigma_z)^2 + \dots}$$

Medidas indiretas

- Propagação de erros



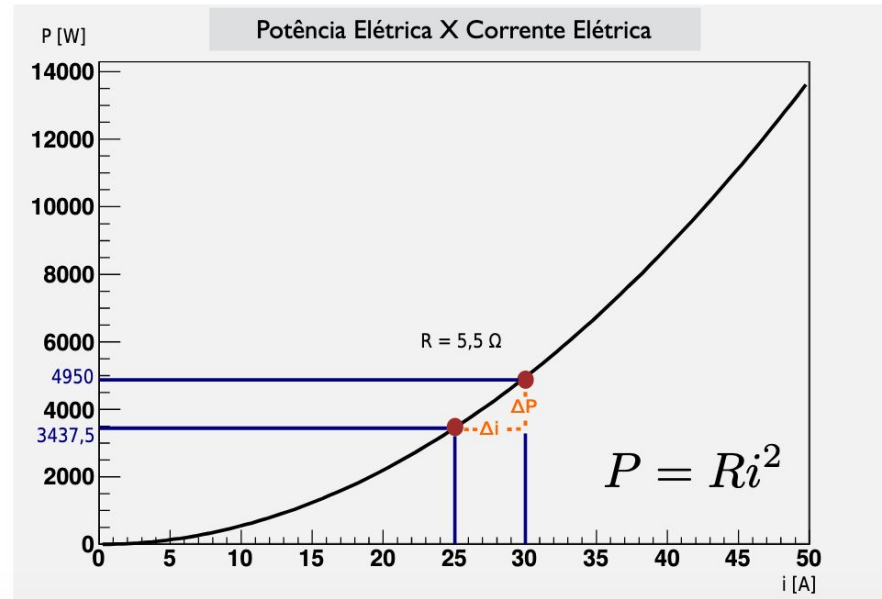
Qual a incerteza em u ?

Estimamos a incerteza em u por **propagação de erro**

Medidas indiretas - Propagação de erros

Exemplo: **Potência elétrica**, $P(i)$

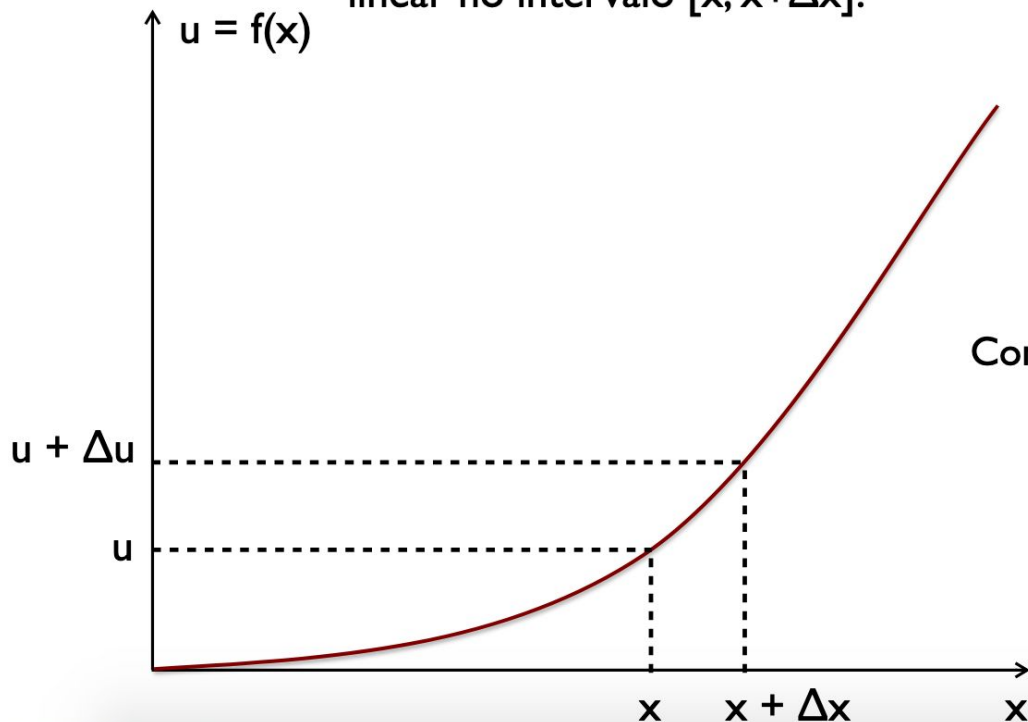
- medida direta: i
- Para uma dada incerteza em i (Δi), associa-se uma incerteza em $P(i)$ (ΔP);
- Determinamos ΔP com propagação de erro;



Medidas indiretas - Propagação de erros

Supomos que Δx é pequeno o suficiente para considerarmos u linear no intervalo $[x, x+\Delta x]$.

coef. angular da reta no intervalo $[x, x+\Delta x] = \Delta u/\Delta x$



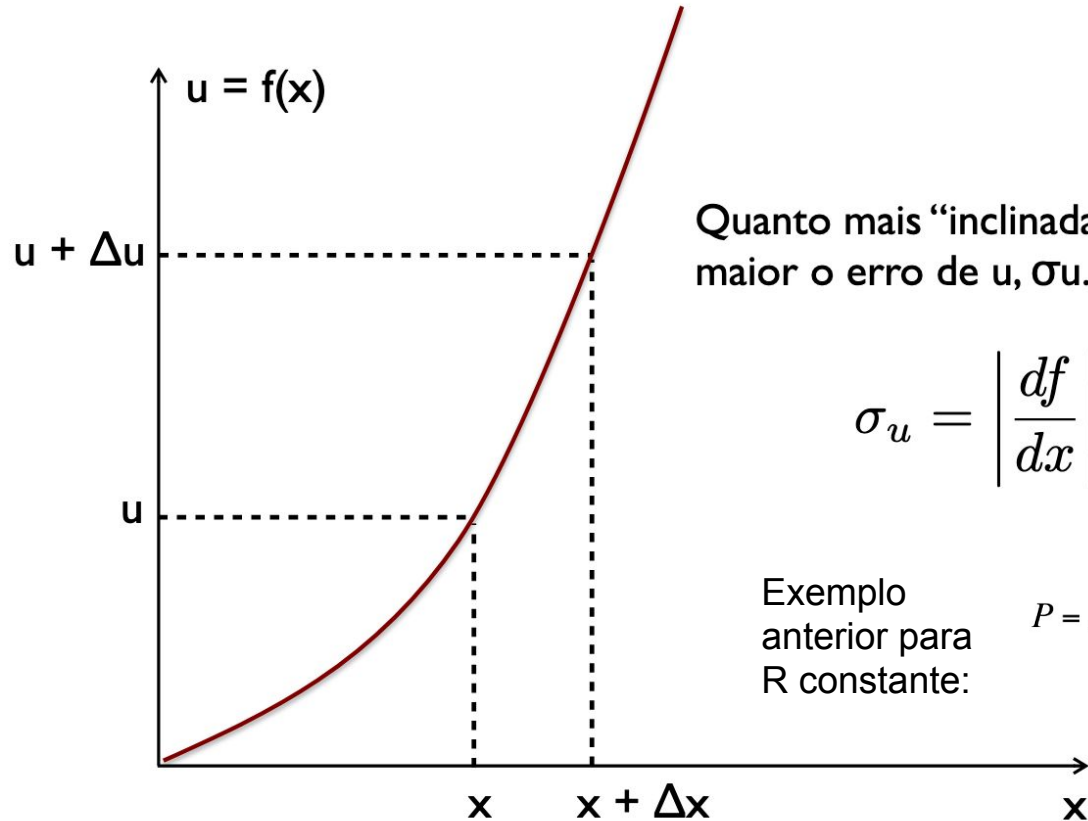
$$\Delta u/\Delta x = |df/dx|$$

$$\Delta u = |df/dx|\Delta x$$

Considerando $\Delta x = \sigma_x$, temos

$$\sigma_u = \left| \frac{df}{dx} \right| \sigma_x$$

Medidas indiretas - Propagação de erros



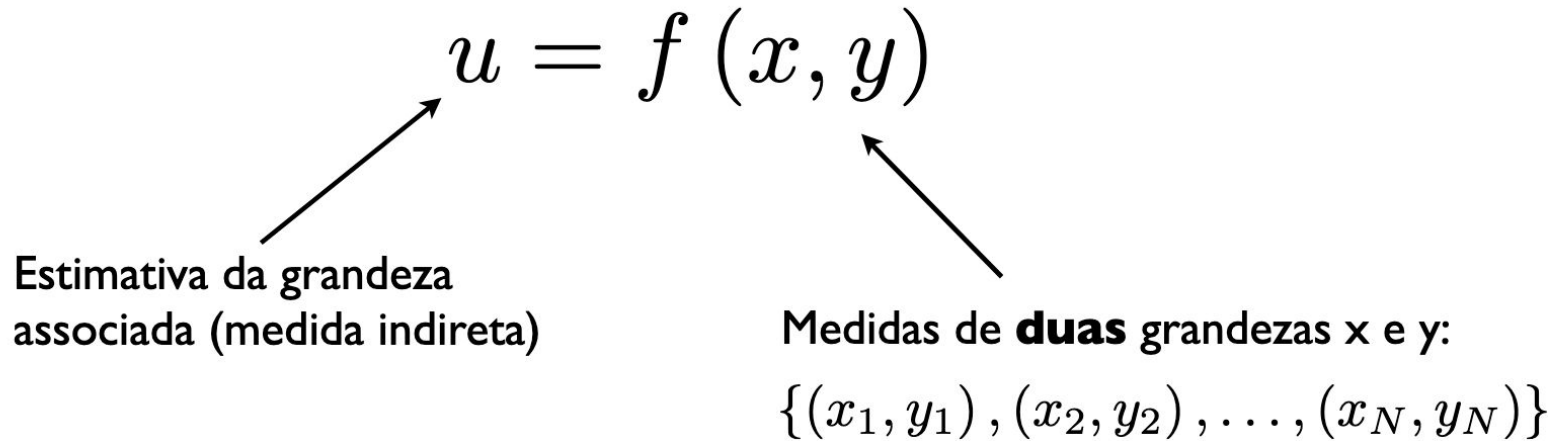
$$\sigma_u = \left| \frac{df}{dx} \right| \sigma_x$$

Exemplo anterior para R constante:

$$P = Ri^2 \rightarrow \sigma_P = \left| \frac{dP}{di} \right| \sigma_i = 2Ri\sigma_i$$

Medidas indiretas - Propagação de erros

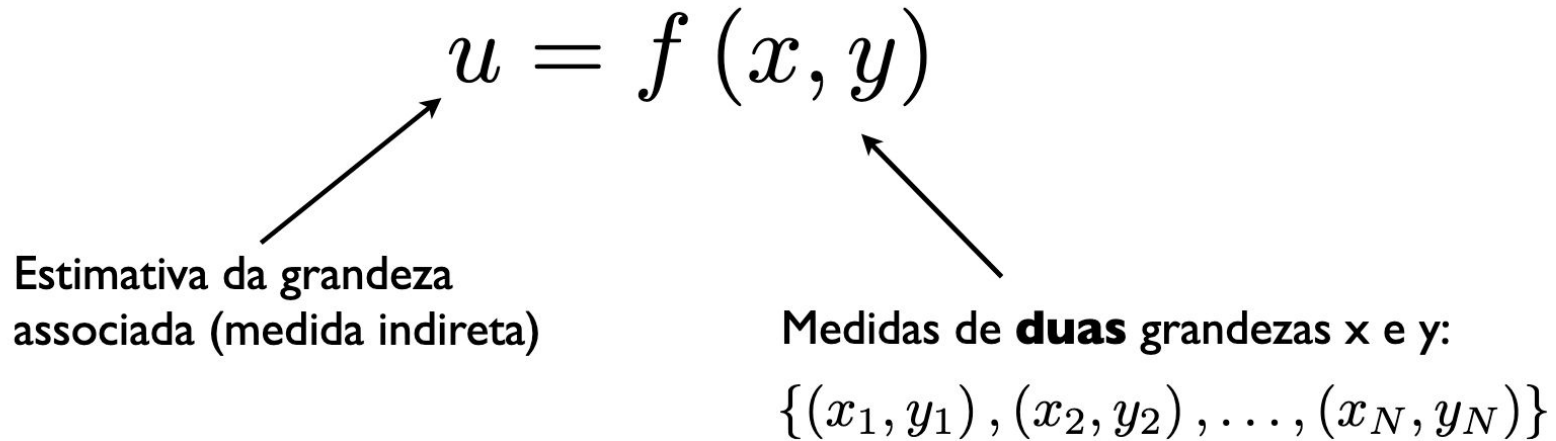
□ Propagação de erros



Queremos obter: $\bar{u} \pm \sigma_{\bar{u}}$

Medidas indiretas - Propagação de erros

□ Propagação de erros



Queremos obter: $\bar{u} \pm \sigma_{\bar{u}}$

□ Estimativa padrão da incerteza

Em geral: $u = f(x, y)$

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{xy}$$

Exemplo:

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Exemplo: Adição ou subtração de variáveis

$$u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r \sigma_{\bar{x}} \sigma_{\bar{y}}}$$

Coeficiente linear de Pearson $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Exemplo: Multiplicação ou divisão de variáveis

Se x e y são independentes (correlação nula):

$$u = xy \longrightarrow \frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \right)^2}$$

ou

$$u = x/y$$

Se a correlação não é nula:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \right)^2 \pm 2r \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \right) \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \right)}$$

Se x e y são independentes (correlação nula)

$$\longrightarrow \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$$

Exemplo:

I. Erro associado à **compatibilidade** entre duas medidas:

- Comparação da discrepância entre duas estimativas: $u = |x - y|$ (subtração)

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Exercícios:

i) $u = x^2$

v) $p = kl$

ii) $u = (x \cdot y) / (x + y)$

vi) $I = V/R$

iii) $u = x + y + z$

vii) $v = \sqrt{2gh}$

iv) $u = xy + z$

viii) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Voltando ao exemplo anterior do volume de um cilindro:

$$\begin{aligned}\sigma_V &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2} = \bar{V} \sqrt{4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} \\ &= 245 \sqrt{4\left(\frac{0,05}{5,00}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{12,5}\right)^2}\end{aligned}$$

Resultando num erro propagado de **5 cm³**

$$V = (245 \pm 5) \text{ cm}^3$$

Determine a aceleração gravitacional g considerando o exemplo do experimento de queda livre caseiro:

O tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2,00 \pm 0,05 \text{ m}$, foi medido com o cronômetro do meu telefone celular.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Tratando os dados: $t = t_m \pm \sigma_m = (0,63 \pm 0,01) \text{ s}$

Cálculo de g : $g = 2 \frac{h}{t^2}$ $\bar{g} = 2 \frac{\bar{h}}{\bar{t}^2} = 10,406 \text{ m/s}^2$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 (\sigma_h)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 (\sigma_t)^2} = \bar{g} \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2} = 0,425 \text{ m/s}^2$$

Apresentação do Resultado:

$$g = 10,4 \pm 0,4 \text{ m/s}^2$$

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para σ_w
$w = x \pm y$ soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
$w = axy$ multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
$w = a(y/x)$ divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
$w = x^m$ potência simples	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left m \frac{\sigma_x}{x} \right $
$w = ax$ multiplicação por constante	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $ ou $\sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax + b$	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $ ou $\sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax^p y^q$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = a \sin(bx)$ função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = ab \cos(bx) \sigma_x$ $b \sigma_x$ em radianos

Identifique o tipo de expressão que você precisa para determinar a incerteza.

Exemplo: Um objeto percorreu a distância de $D = (2,4 \pm 0,2)$ m em um tempo de $t = (1,2 \pm 0,1)$ s. Determine a velocidade média do objeto e sua incerteza.

$$v = \frac{D}{t} = \frac{2,4}{1,2} = 2$$

Para o cálculo da incerteza, observamos na tabela que:

$$\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

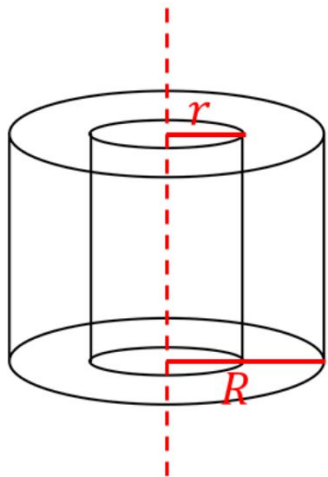
$$\sigma_v = v \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 0,23$$

Logo: $v = (2,0 \pm 0,2)$ m/s

Informação para Atividade 4

Volume do cilindro oco

O volume deste sólido geométrico é calculado através da subtração dos dois volumes, o do cilindro externo e o do interno. Primeiro calcula-se o volume do cilindro maior e subtrais pelo volume do cindo interno, menor.



$$V = \pi R^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h$$

Raio do cilindro maior

↑

$$V = \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2)$$

↓

Altura ←

Raio do cilindro menor

$$S_L = 2\pi h(R + r)$$

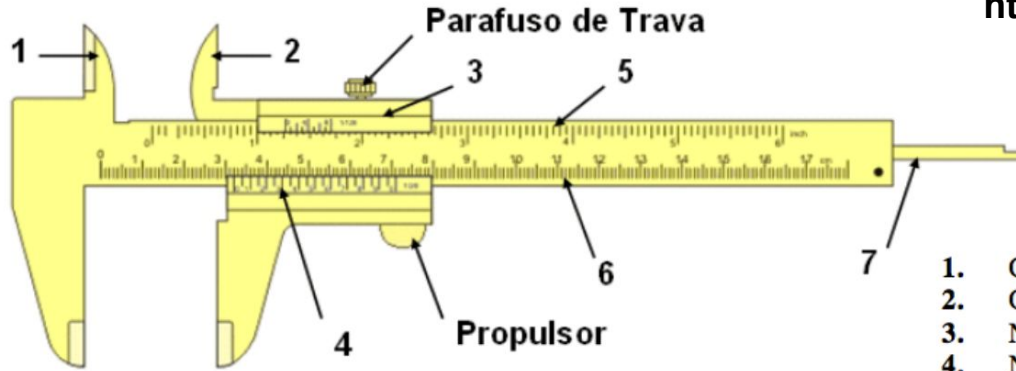
Área da superfície Lateral

Uso do Paquímetro

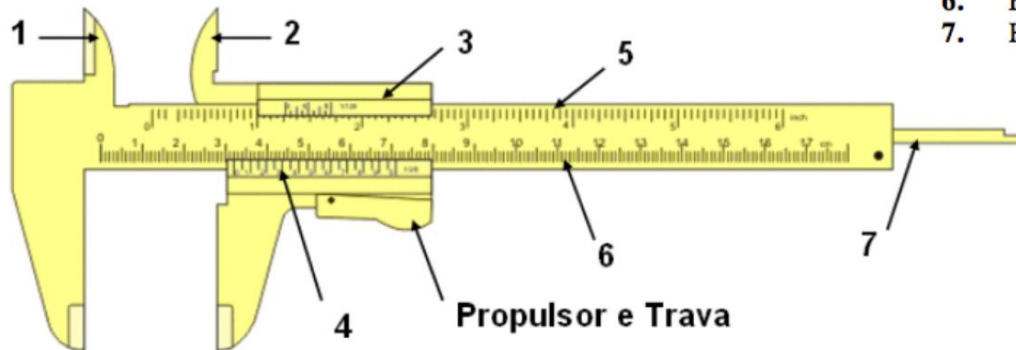
Paquímetro

Simulador

<https://www.stefanelli.eng.br>



1. Orelha fixa,
2. Orelha móvel,
3. Nônio ou Vernier em polegadas,
4. Nônio ou Vernier em milímetros,
5. Escala fixa em polegadas,
6. Escala fixa em milímetros e
7. Haste de profundidade.



Resolução de um instrumento

Por definição **resolução é a menor diferença entre indicações de um dispositivo mostrador que pode ser significativamente percebida**. Deste modo, a menor medida oferecida por um instrumento é chamada: 'resolução'. Podemos determinar a resolução do instrumento dividindo a menor divisão da escala fixa pelo número de divisões do nônio.

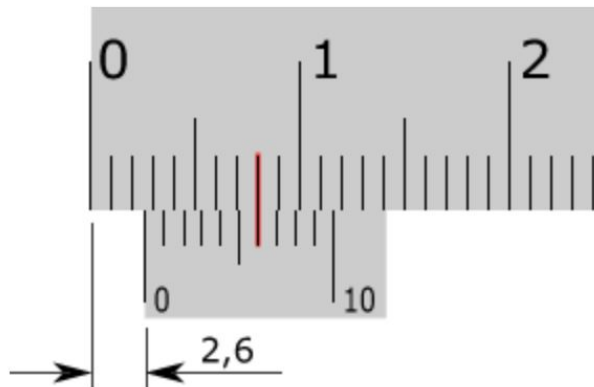


figura 4

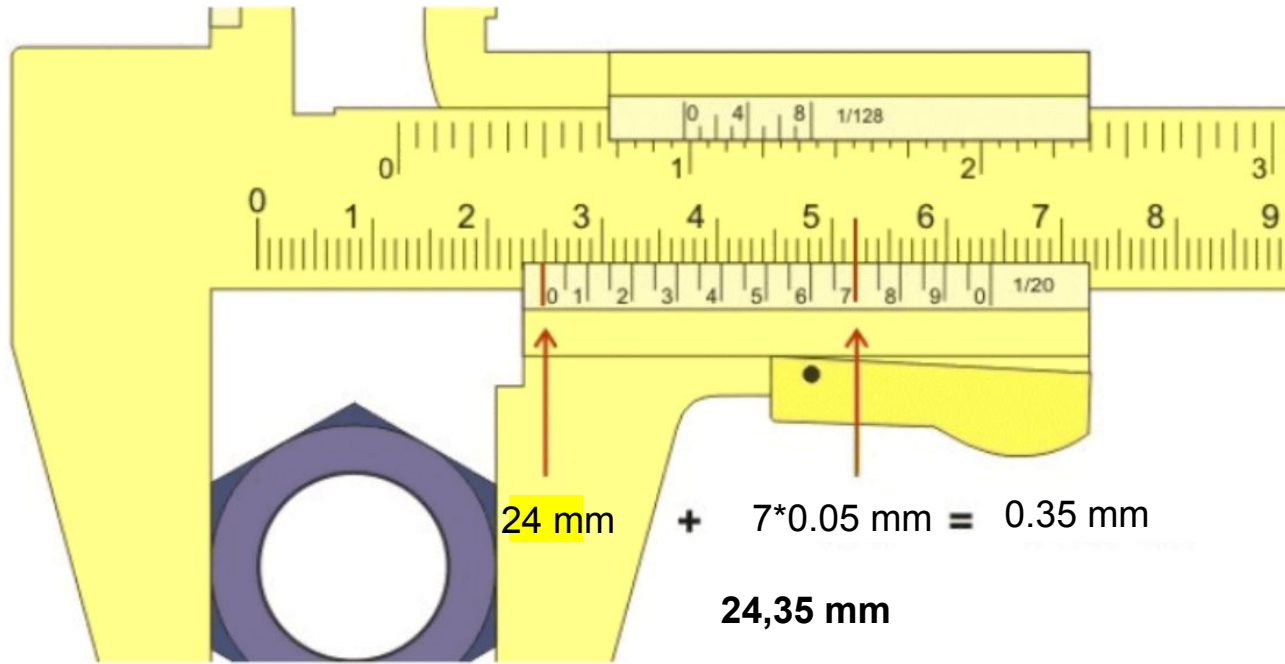
medição com uma escala provida de nônio - aumento da resolução

Nônio com dez divisões

Neste simulador a menor divisão da escala principal -escala fixa- é um milímetro, que foi dividido pelas dez divisões do nônio.

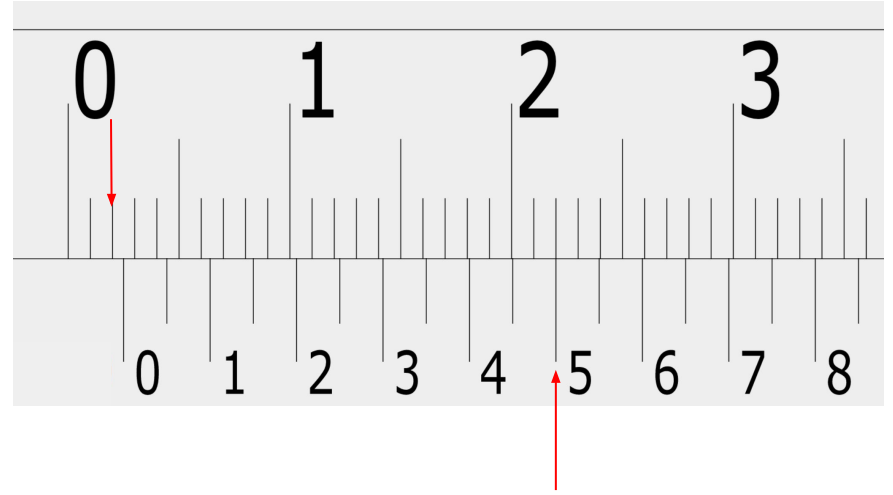
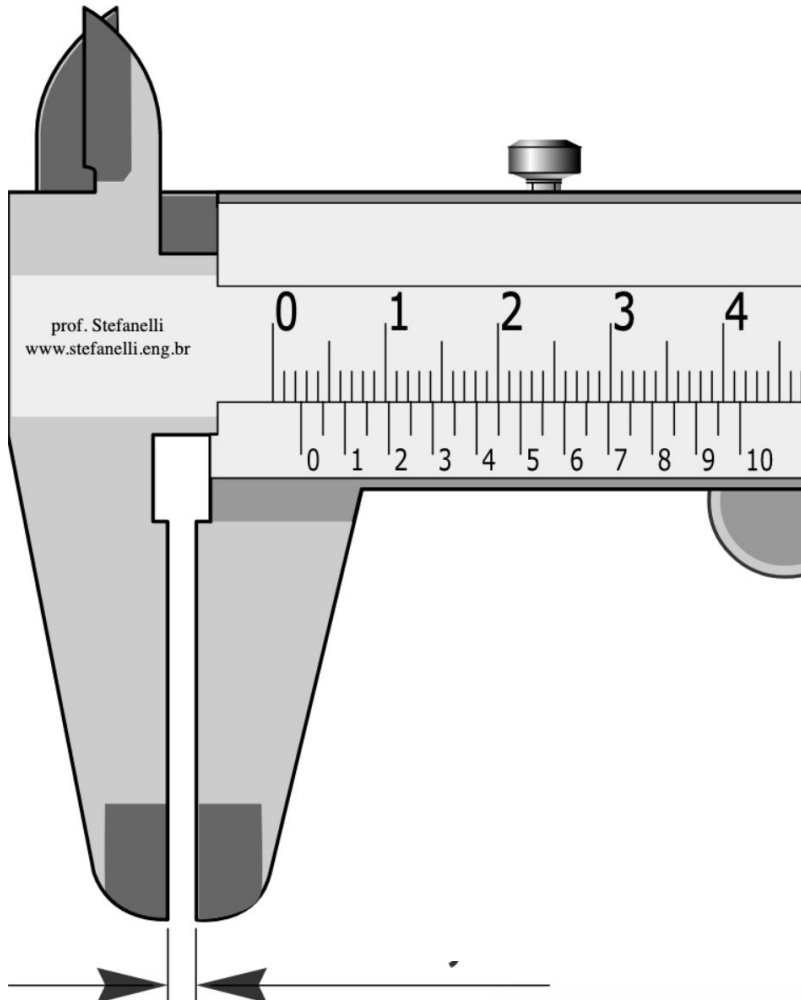
$$\text{Resolução} = 1 \text{ mm} / 10 = 0,1 \text{ mm}$$

A resolução deste simulador é um décimo de milímetro 0,1 mm.

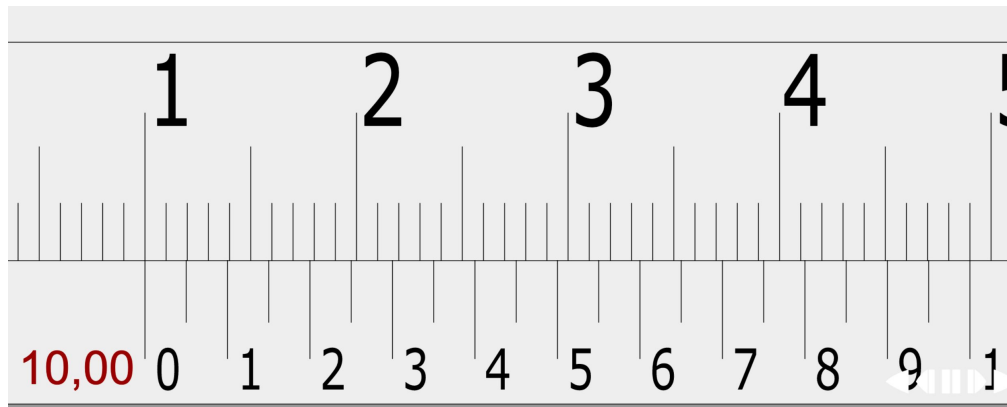
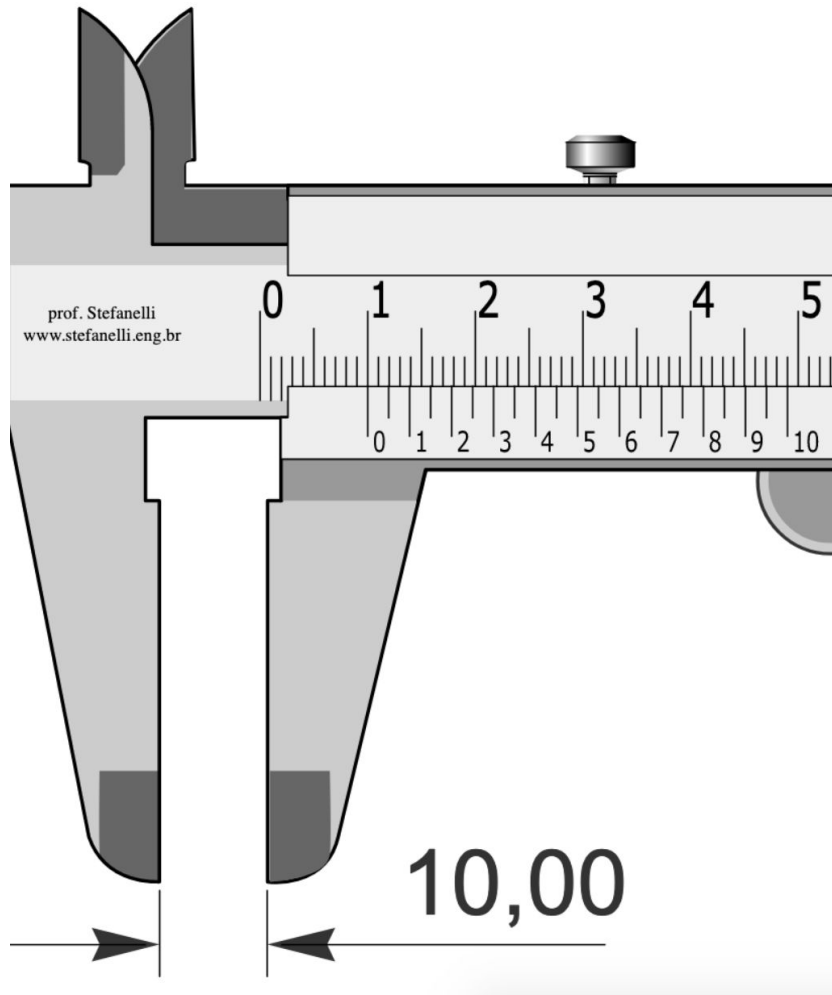



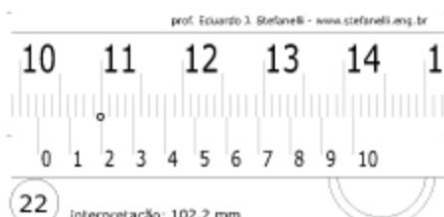
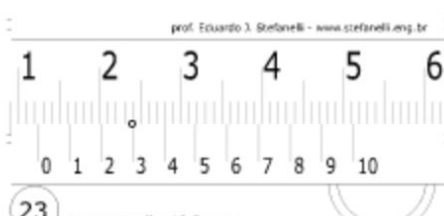
Resolução = 0.05mm

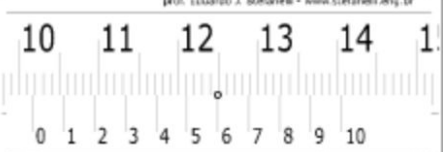
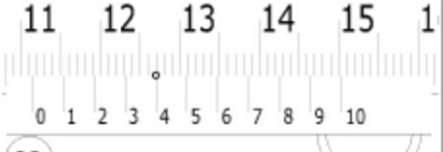
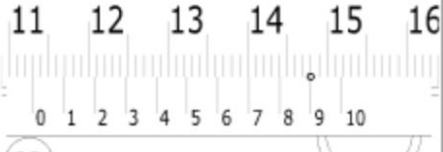
$$\text{Resolução} = \frac{\text{menor divisão da escala fixa}}{\text{número total de divisões do nônio}} = \frac{1}{20} \text{ mm}$$



$$2 \text{ mm} + 5 \cdot 0.05 \text{ mm} = 2,25 \text{ mm}$$



exemplo de leitura de paquímetro em milímetro decimal	leituras			interpretação
	escala principal	nônio ou vernier	leitura total	
<p>prof. Ecuarte J. Stefanelli - www.stefanelli.eng.br</p>  <p>21 Interpretação: 21,4 mm</p>	$2 * 10\text{mm}$ $+ 1 * 1\text{mm}$ $= 21\text{ mm}$	$4 * 0,1\text{mm}$	21 mm $+ 0,4\text{ mm}$ $= 21,4\text{ mm}$	<p>O zero do nônio passou da 2ª marca longa da escala e passou da 1ª marca pequena. No nônio a 4ª marca está alinhada</p>
<p>prof. Ecuarte J. Stefanelli - www.stefanelli.eng.br</p>  <p>22 Interpretação: 102,2 mm</p>	$10 * 10\text{mm}$ $+ 2 * 1\text{mm}$ $= 102\text{ mm}$	$2 * 0,1\text{mm}$	102 mm $+ 0,2\text{ mm}$ $= 102,2\text{ mm}$	<p>O zero do nônio passou da 10ª marca longa da escala e passou da 2ª marca pequena. No nônio a 2ª marca está alinhada</p>
<p>prof. Ecuarte J. Stefanelli - www.stefanelli.eng.br</p>  <p>23 Interpretação: 12,3 mm</p>	$1 * 10\text{mm}$ $+ 2 * 1\text{mm}$ $= 12\text{ mm}$	$3 * 0,1\text{mm}$	12 mm $+ 0,3\text{ mm}$ $= 12,3\text{ mm}$	<p>O zero do nônio passou da 1ª marca longa da escala e passou da 2ª marca pequena. No nônio a 3ª marca está alinhada</p>

exemplo de leitura de paquímetro em milímetro decimal	leituras			interpretação
	escala principal	nônio ou vernier	leitura total	
<p>prof. Eduardo J. Stefanelli - www.stefanelli.eng.br</p>  <p>31 interpretação: 101,6 mm</p>	$10 \text{ cm} = 10 \text{ mm} + \text{mm}$ $10 * 10 \text{ mm} + 1 * 1 \text{ mm} = 101 \text{ mm}$	$10 \text{ divisões} = 0,1 \text{ mm}$ $6 * 0,1 \text{ mm}$	$101 \text{ mm} + 0,6 \text{ mm} = 101,6 \text{ mm}$	<p>O zero do nônio passou da 10ª marca longa da escala e passou da 1ª marca pequena. No nônio a 6ª marca está alinhada</p>
<p>prof. Eduardo J. Stefanelli - www.stefanelli.eng.br</p>  <p>32 interpretação: 111,4 mm</p>	$11 * 10 \text{ mm} + 1 * 1 \text{ mm} = 111 \text{ mm}$	$4 * 0,1 \text{ mm}$	$111 \text{ mm} + 0,4 \text{ mm} = 111,4 \text{ mm}$	<p>O zero do nônio passou da 11ª marca longa da escala e passou da 1ª marca pequena. No nônio a 4ª marca está alinhada</p>
<p>prof. Eduardo J. Stefanelli - www.stefanelli.eng.br</p>  <p>33 interpretação: 112,9 mm</p>	$11 * 10 \text{ mm} + 2 * 1 \text{ mm} = 112 \text{ mm}$	$9 * 0,1 \text{ mm}$	$112 \text{ mm} + 0,9 \text{ mm} = 112,9 \text{ mm}$	<p>O zero do nônio passou da 11ª marca longa da escala e passou da 2ª marca pequena. No nônio a 9ª marca está alinhada</p>

Física Geral - Medidas indiretas e propagação de erros

O objetivo desta prática é compreender os conceitos relacionados às incertezas em medidas indiretas.

Material para a prática: paquímetro e cilindro de metal do estojo de mecânica.

Procedimentos para tomada dos dados:

- Usando o paquímetro, fazer as medidas do comprimento e dos diâmetros internos e externo de um cilindro do estojo de mecânica.

comprimento ()	diâmetro interno ()	diâmetro externo ()

- Usando o erro relativo, determine a precisão das medidas individuais realizadas com o paquímetro.
- Considerando as medidas individuais do cilindro utilizado e usando a equação apropriada calcule:
 1. o volume total;
 2. a área da base;
 3. a área lateral.
- Calcule os erros associados às medidas indiretas, através da propagação de erros.

Sugestões e observação

O trabalho realizado nesta prática, deve ser apresentado sob a forma de um relatório.

O relatório desta prática deve ser organizado da seguinte forma:

- Título da experiência.
- Objetivo da experiência.
- Introdução teórica, relativa à propagação de erros.
- Descrição da experiência. Neste ítem vocês devem descrever como a experiência foi montada, os procedimentos adotados para fazer as medidas e todas as observações que fizeram neste processo. É importante descrever o material utilizado e as principais características do instrumento de medida utilizado. (Pode-se apresentar um diagrama esquemático da montagem realizada.)
- Apresentação dos dados. Neste ítem vocês devem apresentar tabelas com os dados, identificar as variáveis que estão usando e descrever os cálculos que estão fazendo. Vocês devem organizar os cálculos em subitens separados a fim de tornar mais claro o desenvolvimento dos mesmos.
- Análise dos resultados: Neste ítem vocês devem avaliar a compatibilidade entre os valores de área e de volume obtidos com os do seu colega ao lado. Anote o nome do colega com o qual os dados estão sendo comparados.
- Conclusão: Conclua a respeito dos resultados (Precisão, exatidão, incertezas ...).