Laboratório de Física Geral

Profª Patricia Teles

Sala 3006-A

Email: athenafma@gmail.com

<u>Aula4/5</u>: Erros associados às incertezas do tipo A: distribuição de Gauss, erros em medidas individuais, erro da média, nível de confiança. Algarismos significativos e desvio padrão amostral. Erros associados às incertezas do tipo P: Instrumentos Analógicos e Digitais. Erro Padrão. Compatibilidade e Discrepância. Combinação de resultados compatíveis.

PARTE I

AVISOS, LEMBRETES e PENDÊNCIAS

1) **Mudança data prova P1 (ver na página de Física Geral):**
   Prova P1 – 14/05 (Terça)
   Prova P2 – 25/06 (Terça)
   T1 a T4: M4-M5
   T5 e T4: T5-T6
   A Prova Final englobará questões de teoria e laboratório.
   Prova Final – 4/07 (Quinta)
   T1, T2, T3, T4, T5 e T6

2) **Atividade 1:** Dados da Turma

3) **Atividade 2:** Medidas Resistores**.** Roteiro link deve ser seguido.

4) **Atividades**: as atividades valem nota (ver aula1)!! Seguir os Roteiros e suas questões. Na aula 1 slide "sobre o curso" existe um modelo de relatorio a ser seguido. **Será cobrado na correção das atividades: pertinência ao roteiro e formato do relatório.**
   a) Próxima atividade: Medida resistor com multímetro analógico e digital

5) **Módulo de Python**: Ver link para o curso de Python caso interesse conhecer os princípios básicos e estudar por conta própria.

6) **Aula reposição do dia 05/04**: sugestão na **quarta 17/04 pela manhã**.

Exercício (3.7.2): Dado um conjunto de medidas da aceleração da gravidade *g*:

$$\{9{,}90;\ 9{,}68;\ 9{,}57;\ 9{,}72;\ 9{,}80\}\ (\mathrm{m/s^2})$$

Determine a estimativa padrão para a aceleração da gravidade

i) A melhor estimativa para o valor esperado é a média: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

→ Média: 9,734

ii) A estimativa padrão para a incerteza é dada por: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$

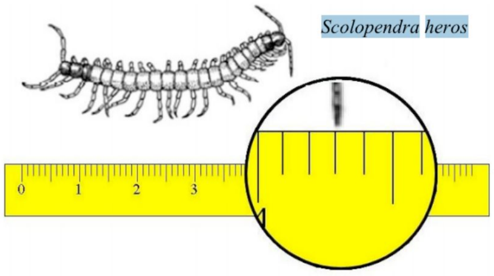
→ Erro padrão: 0,0556417

iii) Representamos o erro com um algarismo significativo e a medida com o mesmo número de casa decimais:

→ Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$(9{,}73 \pm 0{,}06)\ \mathrm{m/s^2}$$

Algarismos Significativos



Menor divisão: 1 mm = 0,1 cm

Qual é o comprimento afinal? 4,3**2** cm — Algarismo duvidoso

4,32 ± 0,05 cm — Erro: metade da menor divisão

Qualquer algarismo à **direita**, no sentido usual de leitura, do **primeiro algarismo não nulo**

Exemplos:

0,02	**⇒ 1 algarismo significativo**
0,2	**⇒ 1 algarismo significativo**
2	**⇒ 1 algarismo significativo**
2,0	**⇒ 2 algarismos significativos**
2,00	**⇒ 3 algarismos significativos**
2000	**⇒ 4 algarismos significativos**
$2{,}0 \times 10^3$	**⇒ 2 algarismos significativos**

Aproximações

3,870001 → 3,87
3,874999 → 3,87
3,875001 → 3,88
3,879999 → 3,88
3,875000… → ?

Convenção "ímpar":
3,875000 → 3,87
3,885000 → 3,89
3,895000 → 3,89

Convenção "par":
3,875000 → 3,88
3,885000 → 3,88
3,895000 → 3,90

Para quem está curtindo os histogramas:

https://www.blackwaterskies.co.uk/2013/12/how-to-interpret-an-image-histogram/#lightbox/0/

Computer Images Consist of Pixels

Em uma imagem monocromática ("preto e branco"), cada pixel é registrado como um número que corresponde a quão "brilhante" ele é. Um valor zero significa que o pixel é preto e o valor máximo significa que ele é branco. Os números entre representam os diferentes tons de cinza.

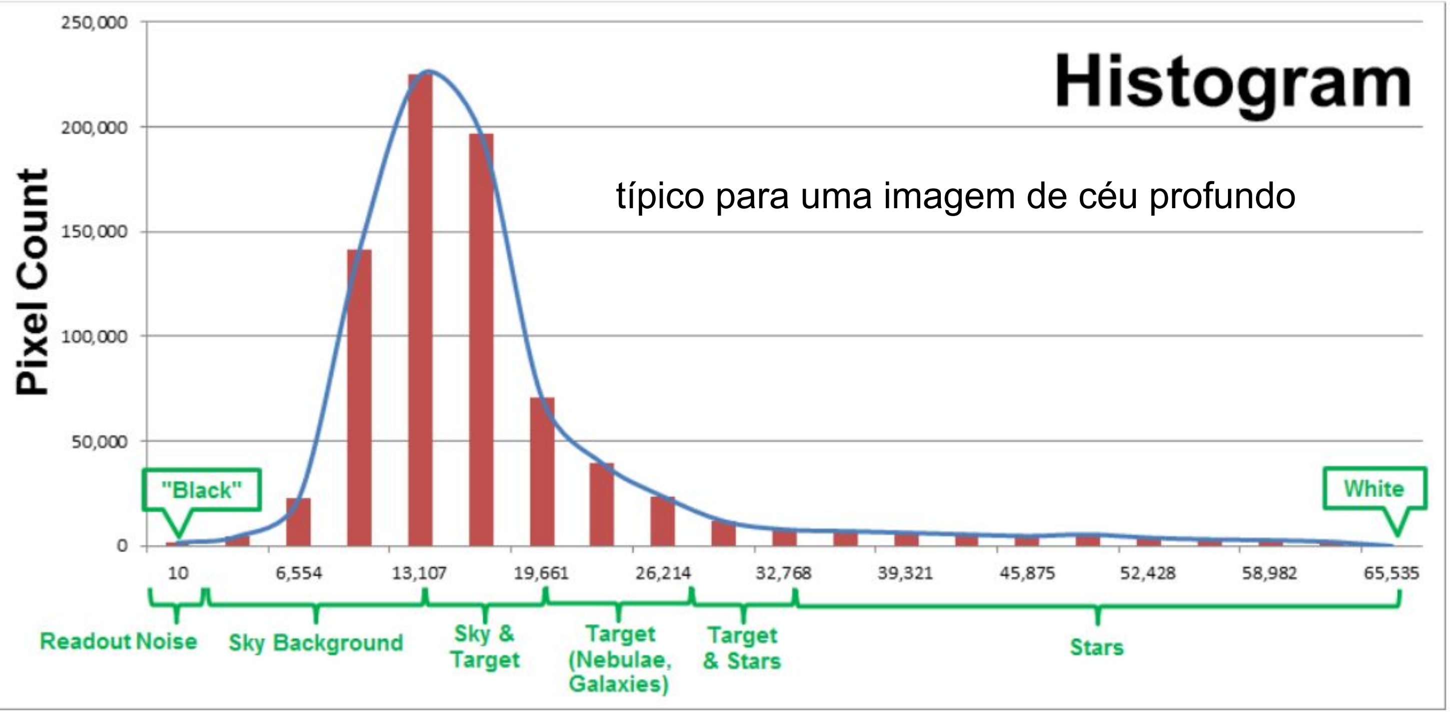
Em uma imagem monocromática típica, o valor máximo no arquivo de imagem depende do número de bits registrados para cada pixel. Uma imagem com 8 bits por pixel conterá valores entre 0 e 255, perfazendo um máximo de 256 tons diferentes de cinza (lembrando-se de contar tons a preto e branco!). A 16 bits por pixel, os valores variam de 0 a 65.535 tornando para 65.536 tons diferentes.

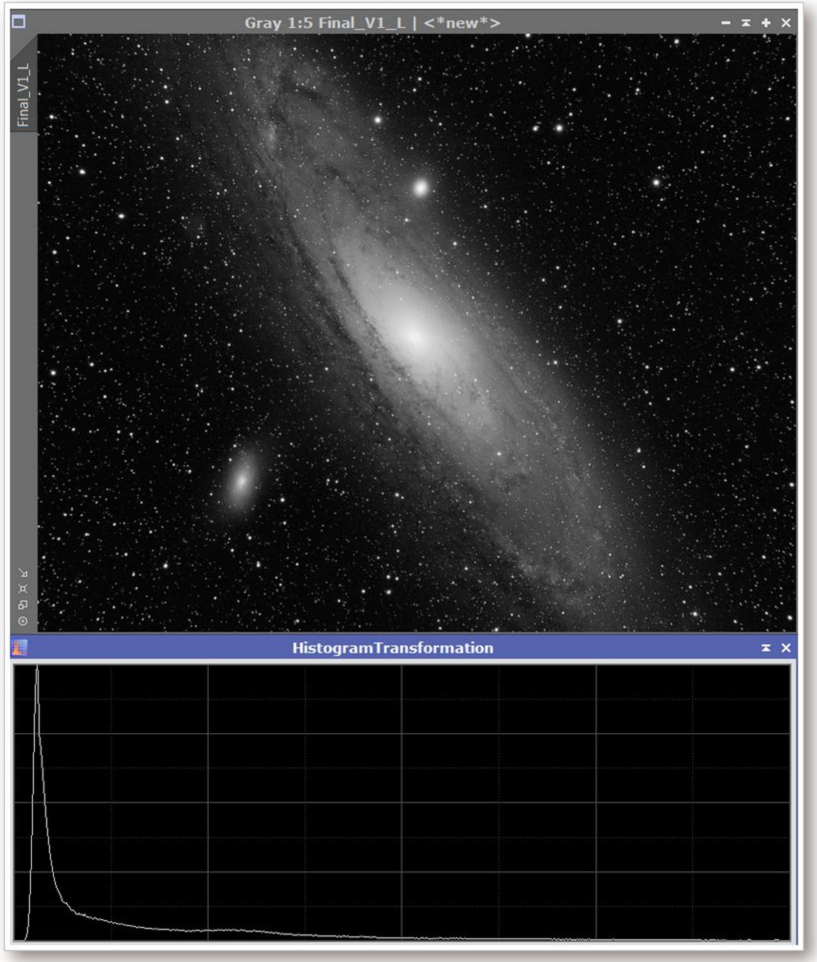
As imagens coloridas funcionam da mesma maneira, exceto pelo fato de que três números são gravados, representando a quantidade de vermelho, verde e azul em cada pixel. Ao misturar essas três cores primárias em diferentes proporções, podemos criar qualquer outra cor. Quanto mais bits por cor primária, mais combinações possíveis das três cores primárias.

Usa-se o termo ADU (Analog to Digital Unit) para nos referirmos aos valores de pixel que a câmera armazena no arquivo de imagem, a fim de distingui-los do (geralmente) menor número de níveis de brilho que são realmente exibidos na tela.

O histograma é muito útil para descobrir se você expôs corretamente sua imagem. Com 16 bits por pixel, os valores vão de 0 a 65.535, totalizando 65.536 tonalidades diferentes.

X - Pixel ADU	Y - Pixel Count
10	1,573
3,282	4,719
6,554	22,807
9,831	141,558
13,107	224,920
16,384	196,608
19,661	70,779
22,938	39,322
26,214	23,593
29,491	11,796
32,768	7,864
36,045	7,078
39,321	6,291
42,598	5,505
45,875	4,719
49,152	5,505
52,428	3,932
55,705	3,146
58,982	2,753
62,259	1,966
65,535	0
1,024 x 768 =	**786,432**





Example of a Monochrome Histogram

um exemplo de um histograma retirado de uma imagem monocromática da galáxia de Andrômeda.

Como você pode ver, a prática combina muito bem com a teoria. Temos um grande pico perto da esquerda do histograma que representa o fundo do céu. Segue-se um "ombro" para a direita, que representa as regiões exteriores fracas da galáxia, e uma longa "cauda" correndo para a direita, que inclui as partes internas mais brilhantes da galáxia e das estrelas.

https://www.ted.com/talks/katie_bouman_what_does_a_black_hole_look_like?utm_source=facebook.com&utm_medium=social&utm_campaign=tedspread&fbclid=IwAR1ODTbThGxU9vCuBVbL-hmQ4CEVSv2zXAgX8__1RxZ2jWNq9sql8k3Oaig

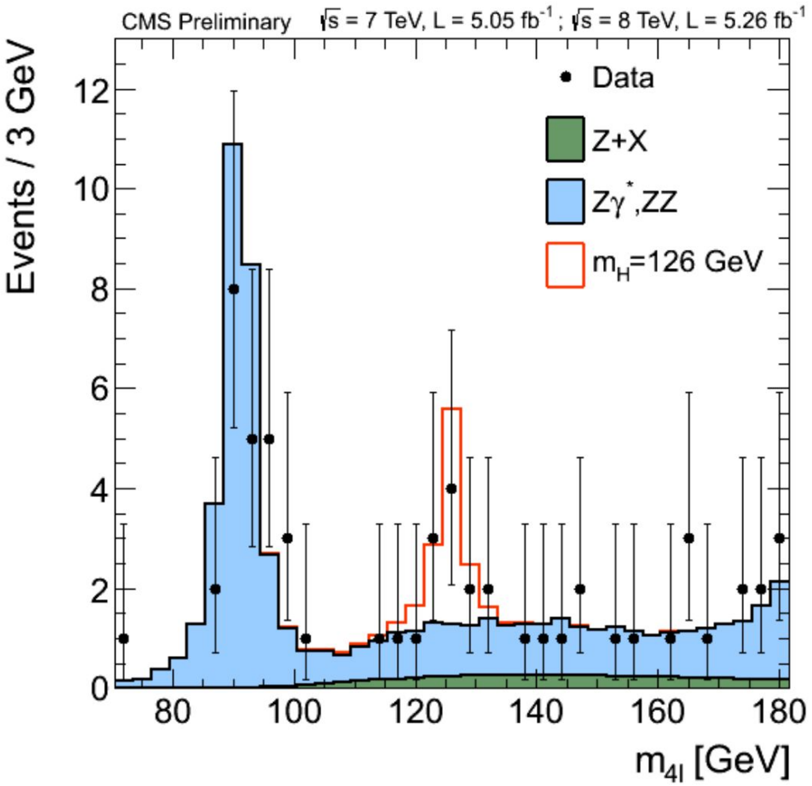
Katie Bouman (Imaging Scientist) desenvolveu o algoritmo para reconstruir essa imagem. Assista ao vídeo acima (de Nov 2016)

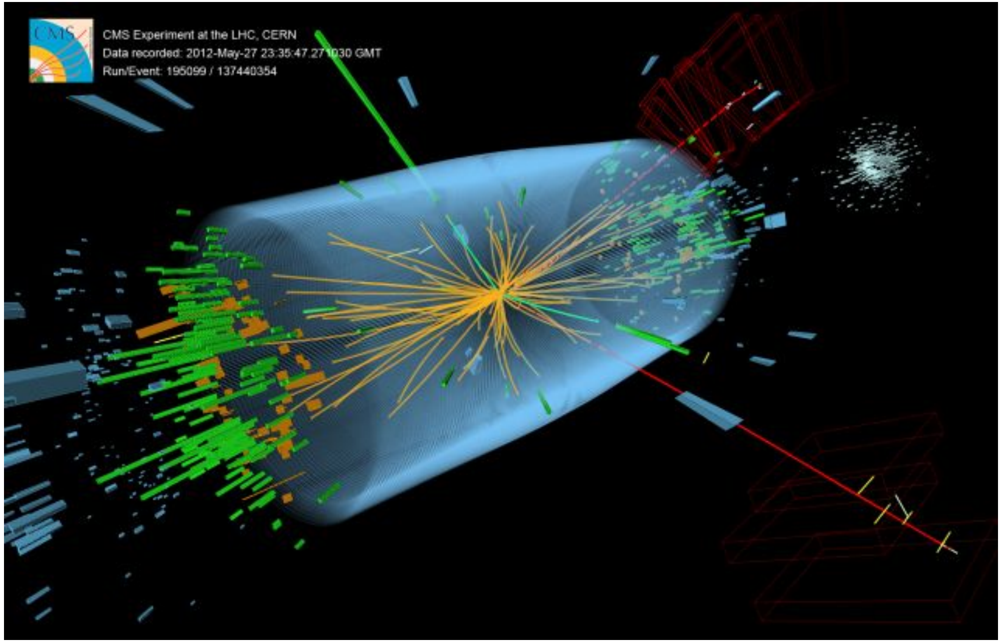
Artigo sobre o algoritmo
http://news.mit.edu/2016/method-image-black-holes-0606?fbclid=IwAR196wG6UX_218CAzFMwoPC3ecshZ-a82GlGKDsvPysztrzdRMP74HUHfqY

Primeiro teste direto da Teoria da Relatividade Geral de Einstein no forte campo gravitacional do buraco negro

Primeira imagem de um buraco negro divulgada em 10/04/2019 pela colaboração “Event Horizon Telescope”
https://eventhorizontelescope.org/

http://cms.web.cern.ch/news/observation-new-particle-mass-125-gev



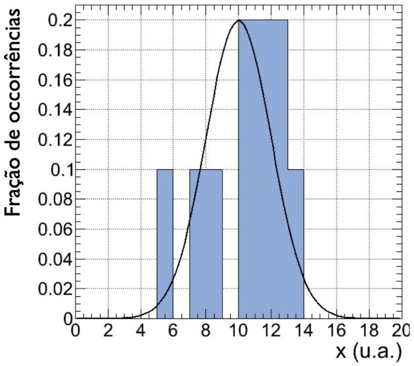


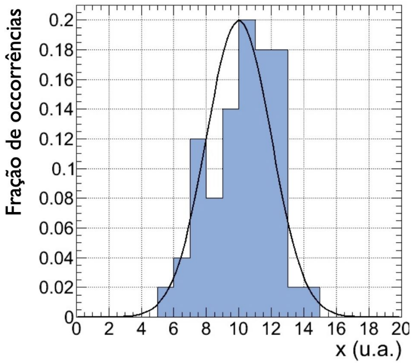
Descoberta do Bóson de Higgs, última peça do Modelo Padrão das Partículas Elementares

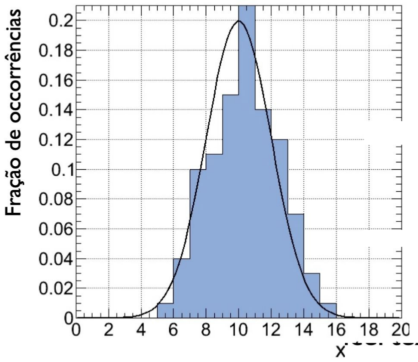
O CMS observa um **excesso de eventos em uma massa de aproximadamente 125 GeV** com uma **significância estatística de cinco desvios padrão (5 sigma)** acima das expectativas de fundo!! Esse texto é familiar para vocês? Não ainda. Ver próximos slides!!

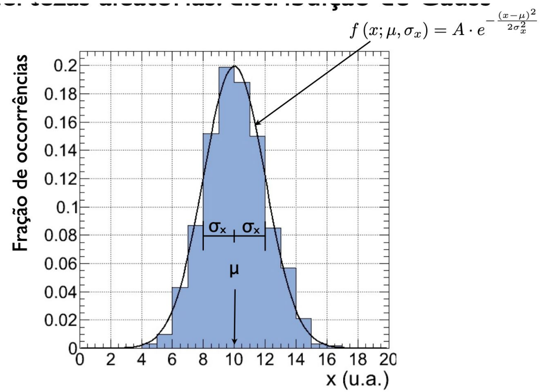
Avaliação de erros associados a incertezas do tipo A

Pela Lei dos Erros: quando o número de medidas cresce indefinidamente => distribuição de frequências das medidas (histograma) tende à distribuição de Gauss

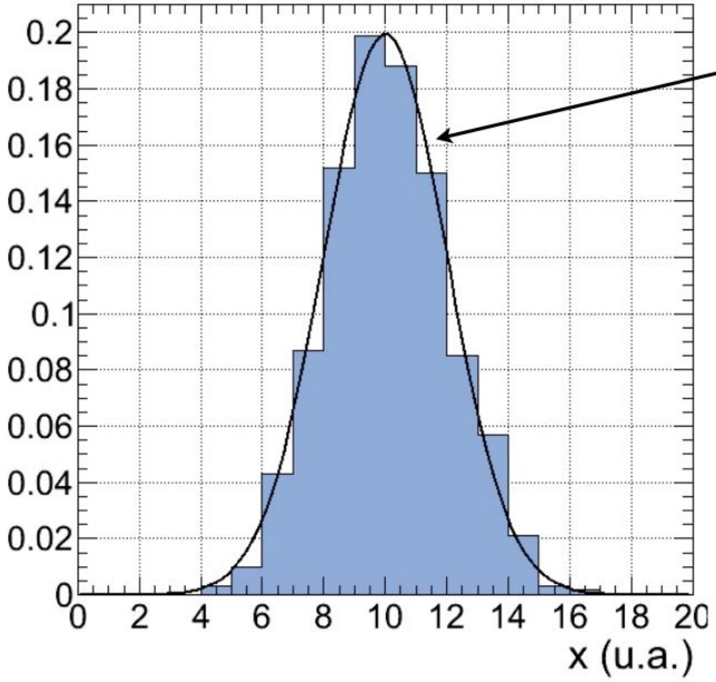








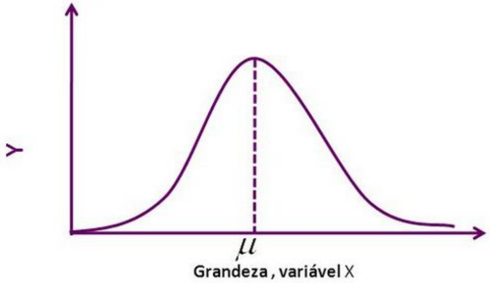
"Lei dos Erros": Para um número indefinidamente grande de medidas a distribuição das frequências se comporta como uma distribuição de Gauss



$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Média μ

Desvio Padrão σ_x



$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

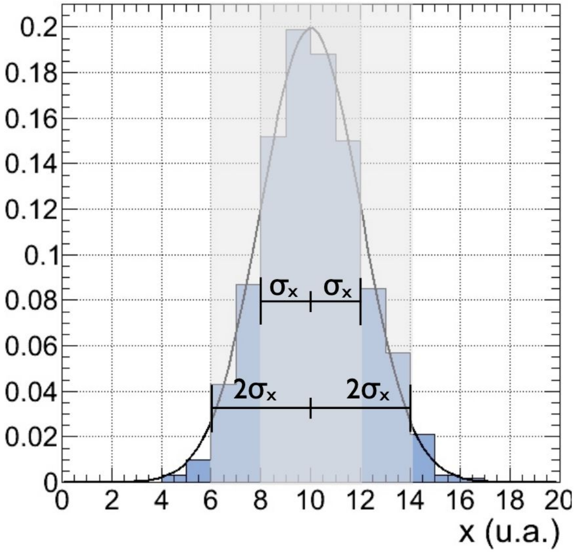
estimativa do valor esperado $\pm$ *erro* (*unidade*)

$$\bar{x} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

As estimativas do valor esperado e de seu erro associado definem um intervalo, ao qual atribuímos um *nível de confiança,* de que <u>o intervalo contenha o valor esperado</u>

Se considerarmos que as medidas se distribuem de acordo com uma distribuição de Gauss (Lei dos Erros), os valores dos níveis de confiança são determinados pela sua área correspondente



68,3% da área entre (μ - σ_x) e (μ + σ_x)

95,5% da área entre (μ - 2σ_x) e (μ + 2σ_x)

99,7% da área entre (μ - 3σ_x) e (μ + 3σ_x)

...

Em geral para um intervalo de confiança [a,b], o nível de confiança pode ser interpretado como a fração de ocorrências em que o valor esperado μ se encontra neste intervalo, se o experimento for repetido um grande número de vezes.

Intervalo de Confiança	Nível de Confiança (CL)
$(\overline{x} - 0{,}67\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 0{,}67\,\sigma_{\overline{x}})$	50,0%
$(\overline{x} - 1{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}00\,\sigma_{\overline{x}})$	68,3%
$(\overline{x} - 1{,}65\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}65\,\sigma_{\overline{x}})$	90,0%
$(\overline{x} - 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}})$	95,0%
$(\overline{x} - 2{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 2{,}00\sigma_{\overline{x}})$	95,5%
$(\overline{x} - 3{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 3{,}00\,\sigma_{\overline{x}})$	99,7%

Intervalo de confiança de 68,3%

Intervalo de confiança de 95,5%

Exercício (3.7.1): De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o erro padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos intervalos:

a) (14,18)

b) (12,16)

c) (18,20)

a) (14,18) → (16 - 2, 16 + 2) → (16 - σ, 16 + σ)

→ Associamos ao intervalo o nível de confiança de aprox. 68,3% Para um grande número de leituras, 68,3% delas estarão no intervalo (16 - σ, 16 + σ)

b) (12,16) → (16 - 4, 16 + 0) → (16 - 2σ, 16 + 0σ)

→ Nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 2σ): 95,5% → O nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 0σ) será a metade: 47,75%

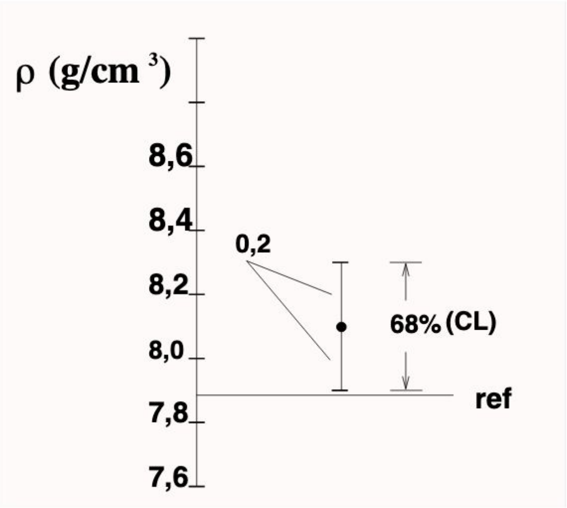
c) (18,20) → (16 + 1σ, 16 + 2σ)

→ Nível de confiança: 95,5% / 2 - 68,3% / 2 = 13,6%

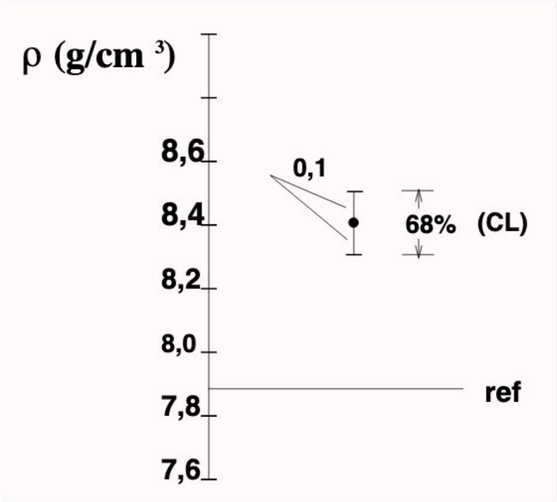
Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{ref} = 7{,}86\ g/cm^3$

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2\ g/cm^3$



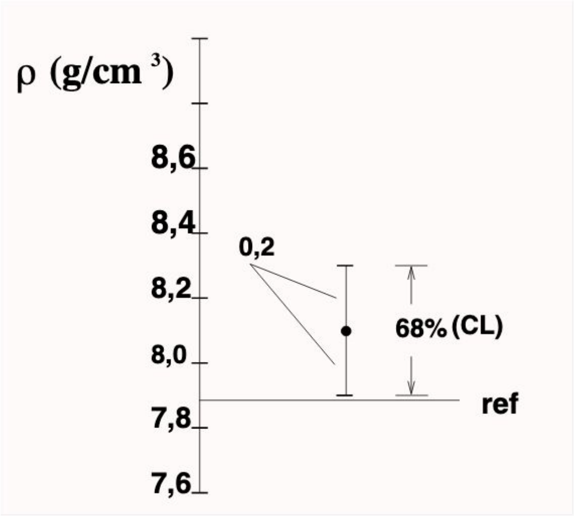
Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1\ g/cm^3$



Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:

$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



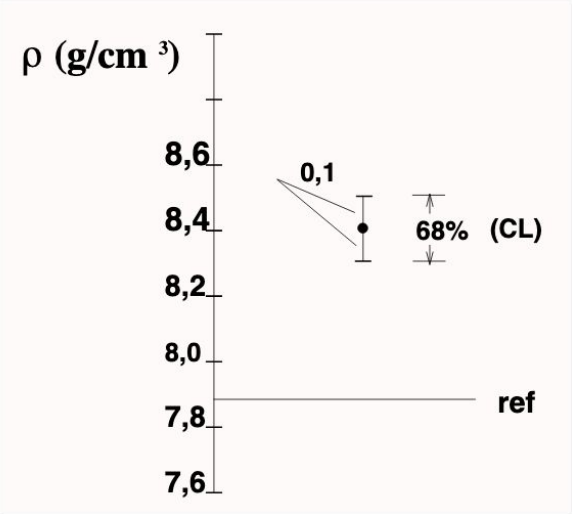
Discrepância

$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8{,}1 - 7{,}86 | = 0{,}24 \sim 1\sigma$

Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectiva de apenas ~68% de que o intervalo contenha o valor esperado

A discrepância não é *estatisticamente significativa*

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



Discrepância
$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8{,}4 - 7{,}86 | = 0{,}54 > 3\sigma$

Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável (< 1%) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Regra prática: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Inconclusivo}$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

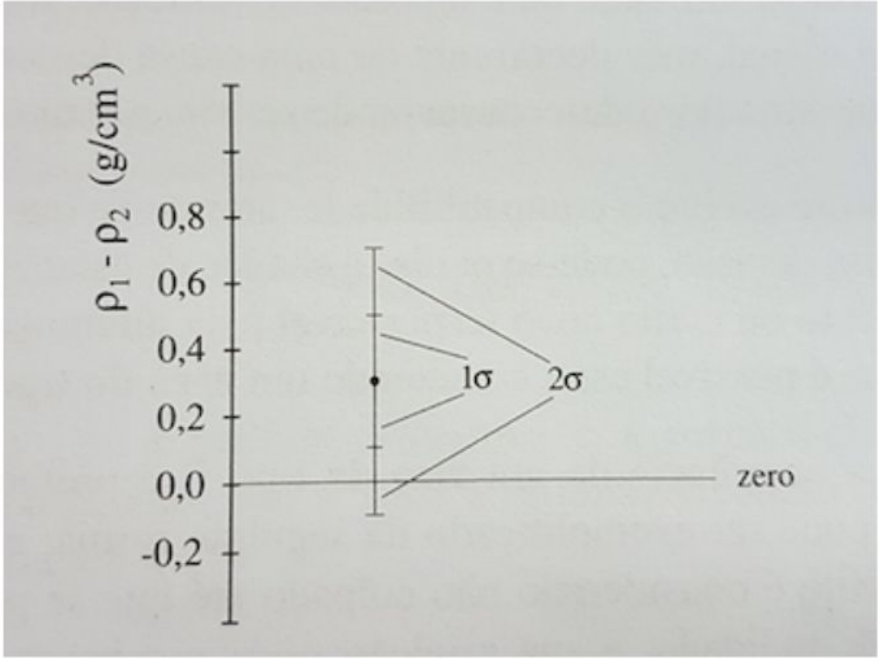
Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Discrepância: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Erro associado: $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):

ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0{,}3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}1)^2} \approx 0{,}2 \text{ g/cm}^3$$

Podemos dizer que as estimativas são compatíveis *entre si*.

A discrepância não é significativa.

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):

ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0{,}2)^2} + \frac{1}{(0{,}1)^2}}} = 0{,}08944 \text{ g/cm}^3$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0{,}2}\right)^2 \cdot 8{,}1 + \left(\frac{\sigma}{0{,}1}\right)^2 \cdot 8{,}4 = 8{,}3400 \text{ g/cm}^3$$

$$\Rightarrow \rho = (8{,}34 \pm 0{,}09) \text{ g/cm}^3$$