

# Física Geral (2014/1)

Aula 5: Compatibilidade e combinação de resultados



# Estimativa do valor esperado

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$\bar{x}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Estimativa do erro de cada medida



$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Estimativa do erro da média



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

# Compatibilidade com um valor de referência

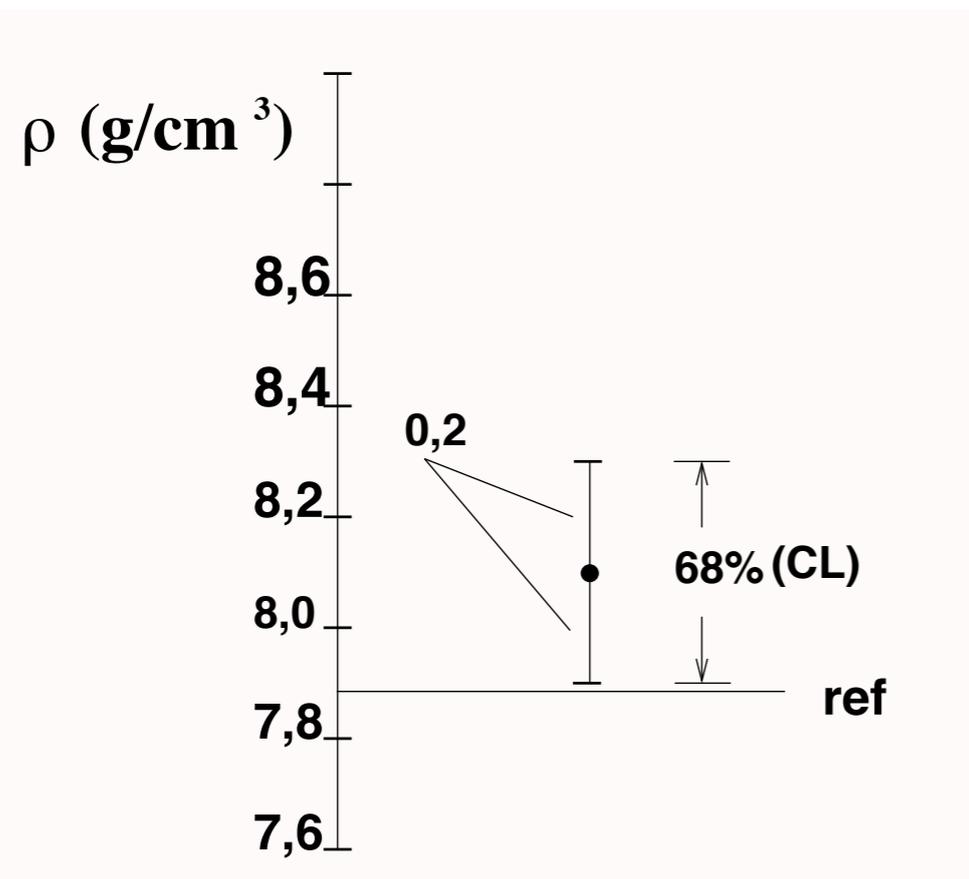
Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência  $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

# Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência  $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Resultado Exp. I:

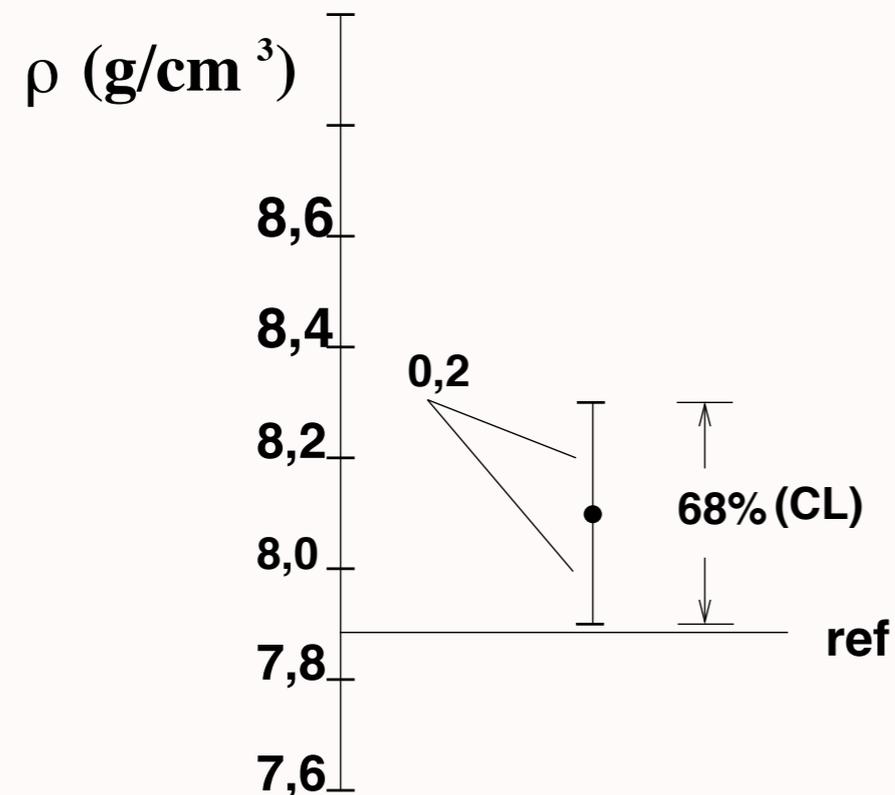
$$\rho_I = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



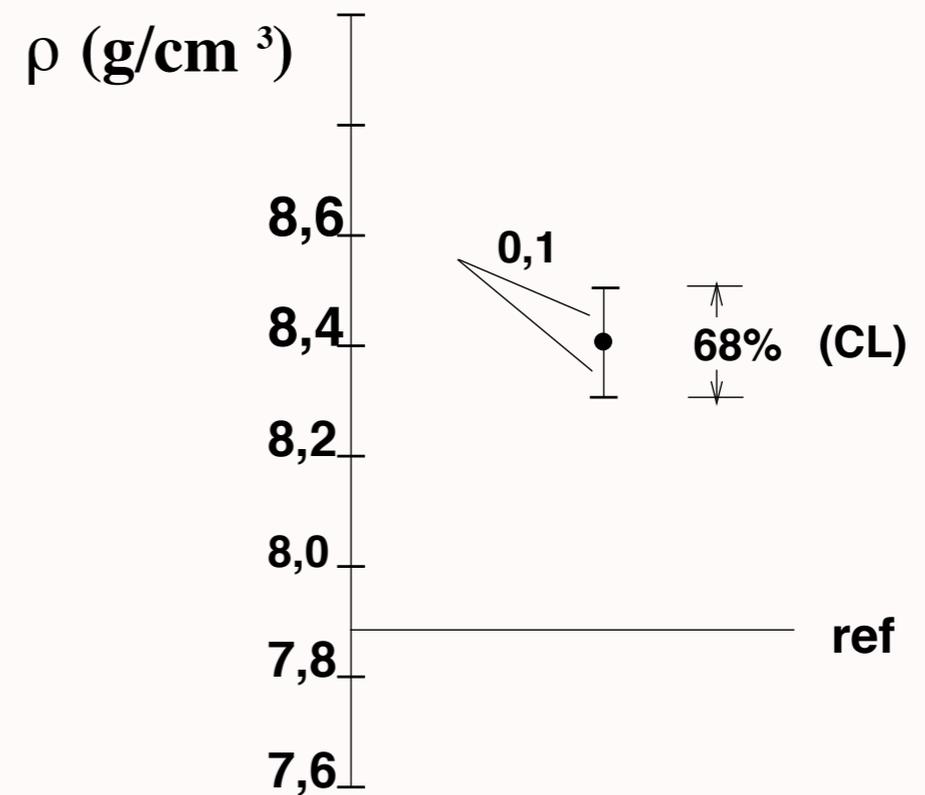
# Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência  $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Resultado Exp. 1:  
 $\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$



Resultado Exp. 2:  
 $\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$

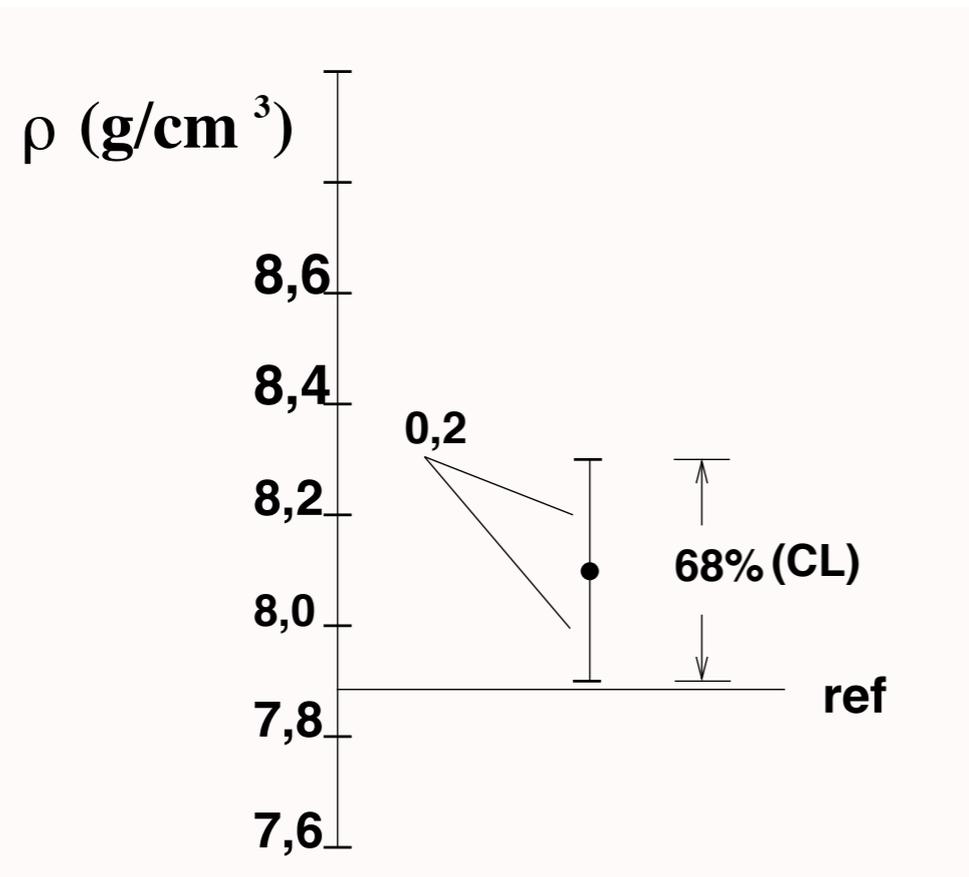


# Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



# Compatibilidade com um valor de referência

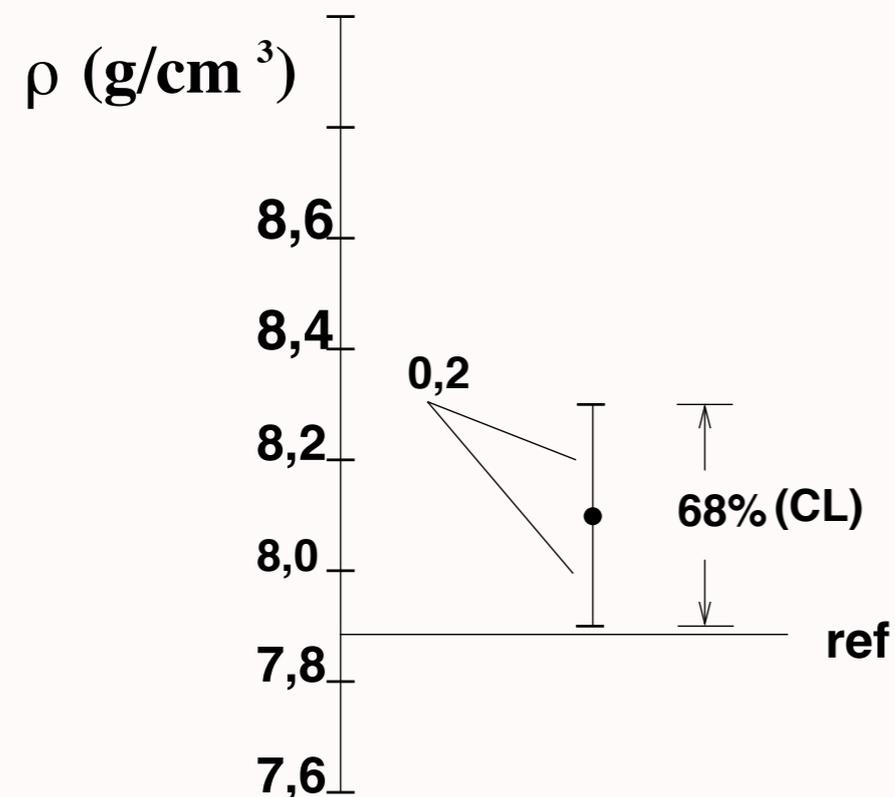
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



# Compatibilidade com um valor de referência

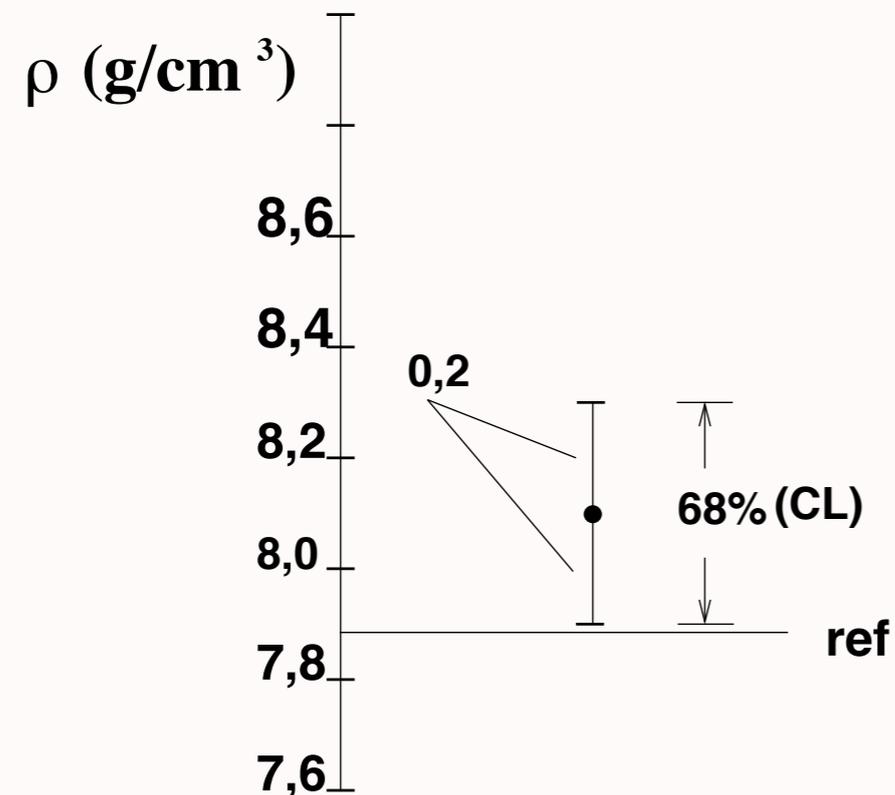
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



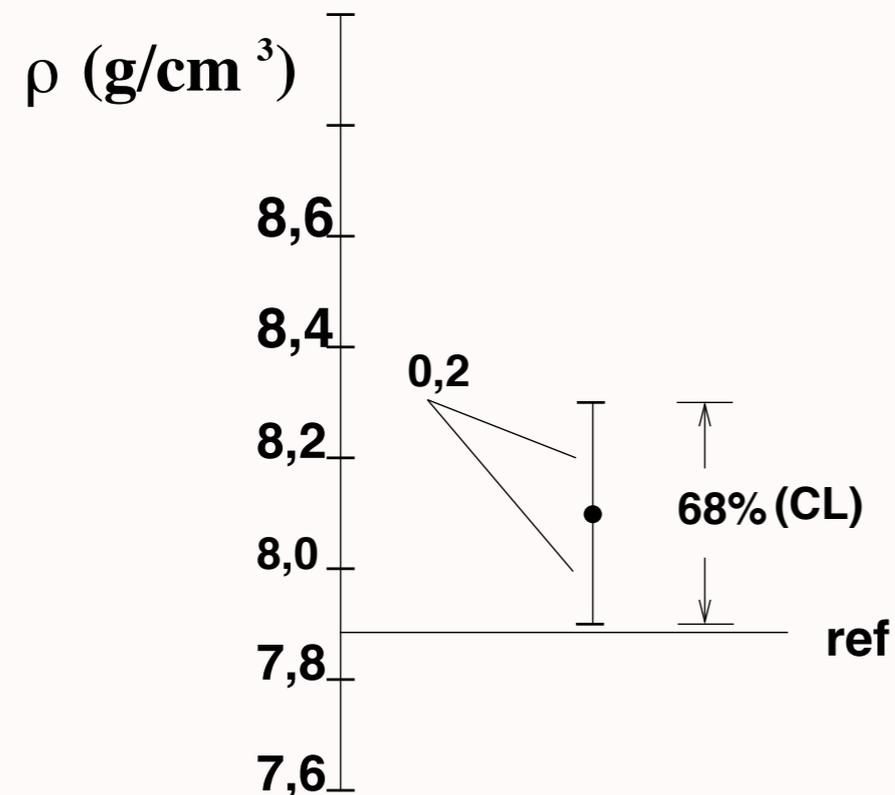
Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas  $\sim 68\%$  de que o intervalo contenha o valor esperado

# Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 1:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



*Discrepância*

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$

Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas  $\sim 68\%$  de que o intervalo contenha o valor esperado

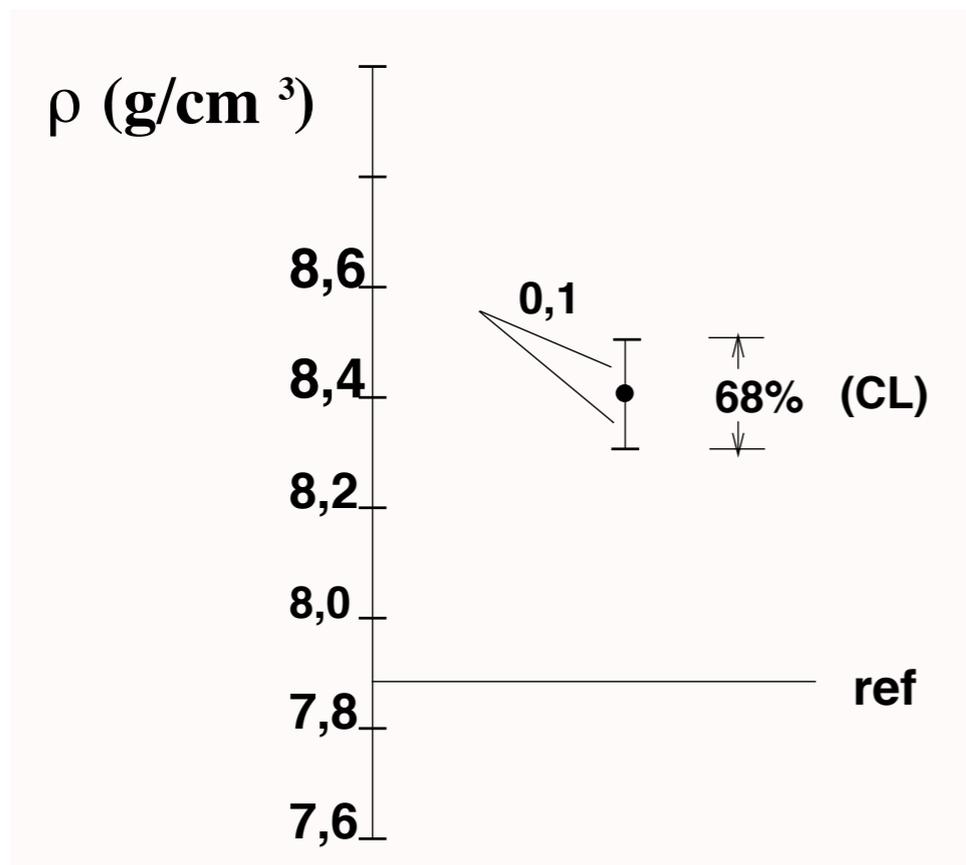
A discrepância não é estatisticamente significativa

# Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



# Compatibilidade com um valor de referência

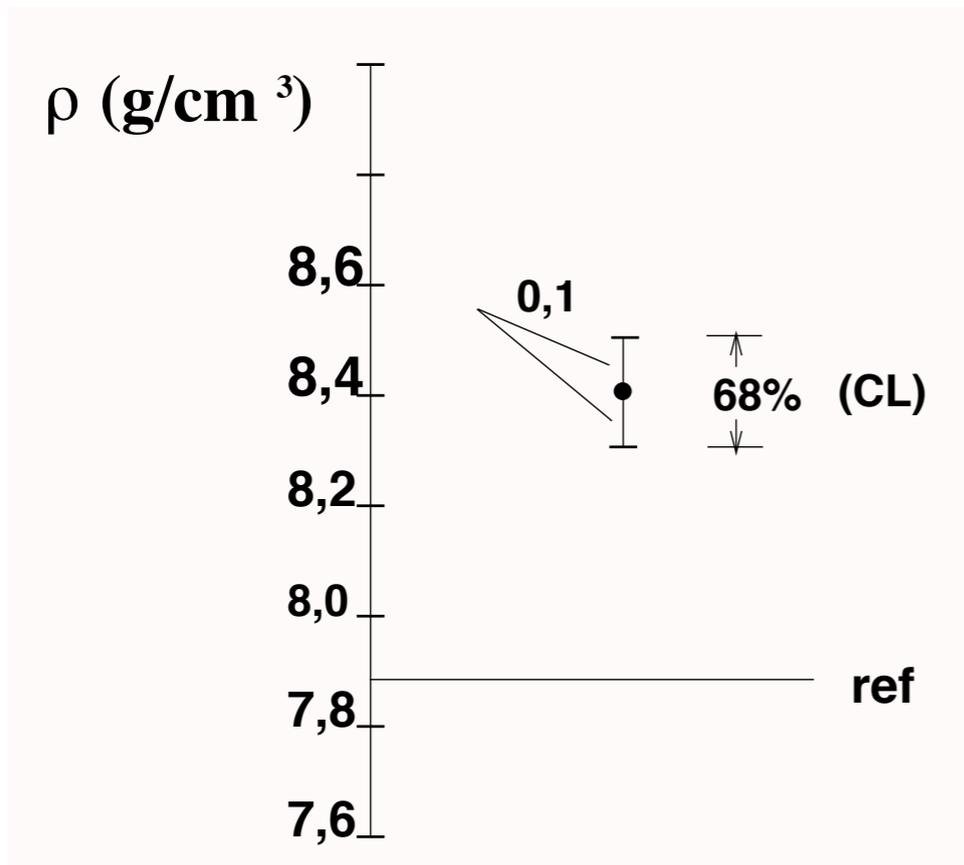
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



# Compatibilidade com um valor de referência

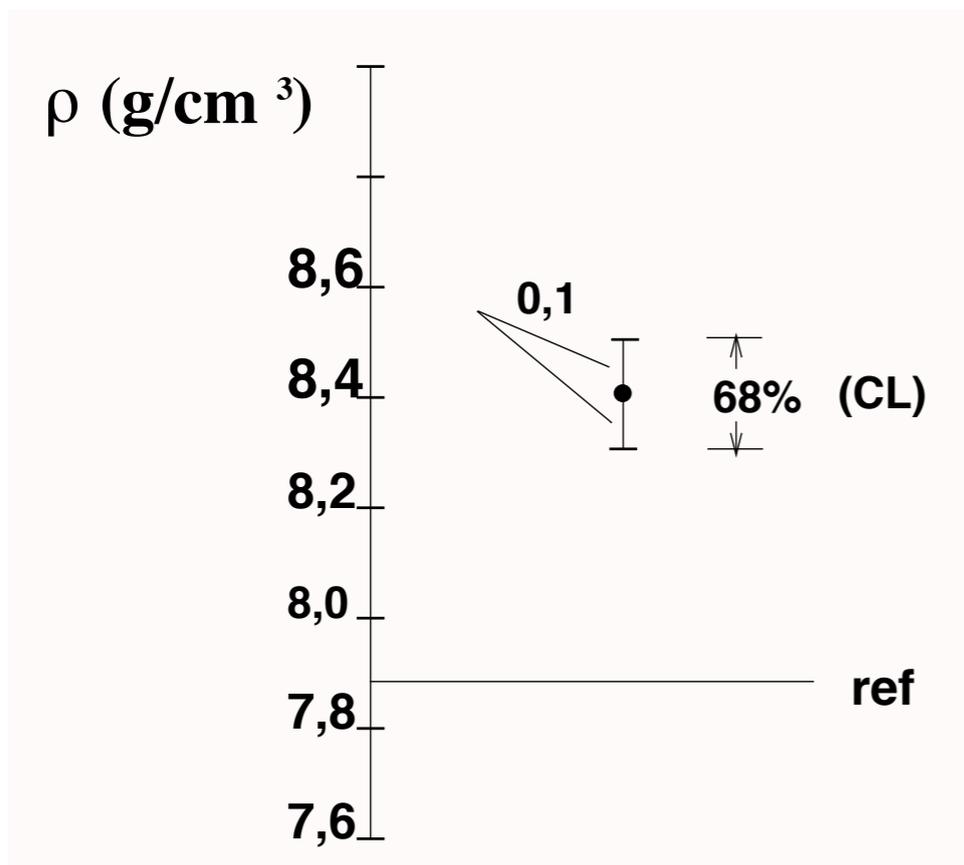
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável ( $< 1\%$ ) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

# Compatibilidade com um valor de referência

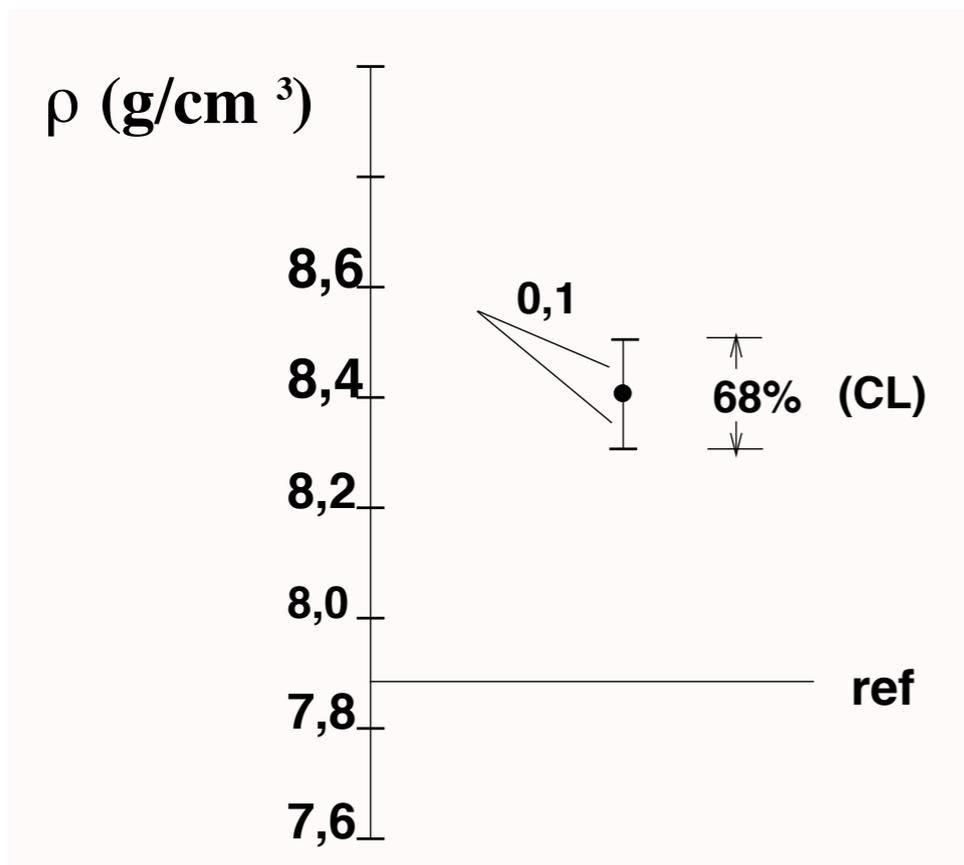
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável ( $< 1\%$ ) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

# Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

# Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Regra prática: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Inconclusivo}$$

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

$$\text{Estimativa 1: } \bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$$

$$\text{Estimativa 2: } \bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$$

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Discrepância:  $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

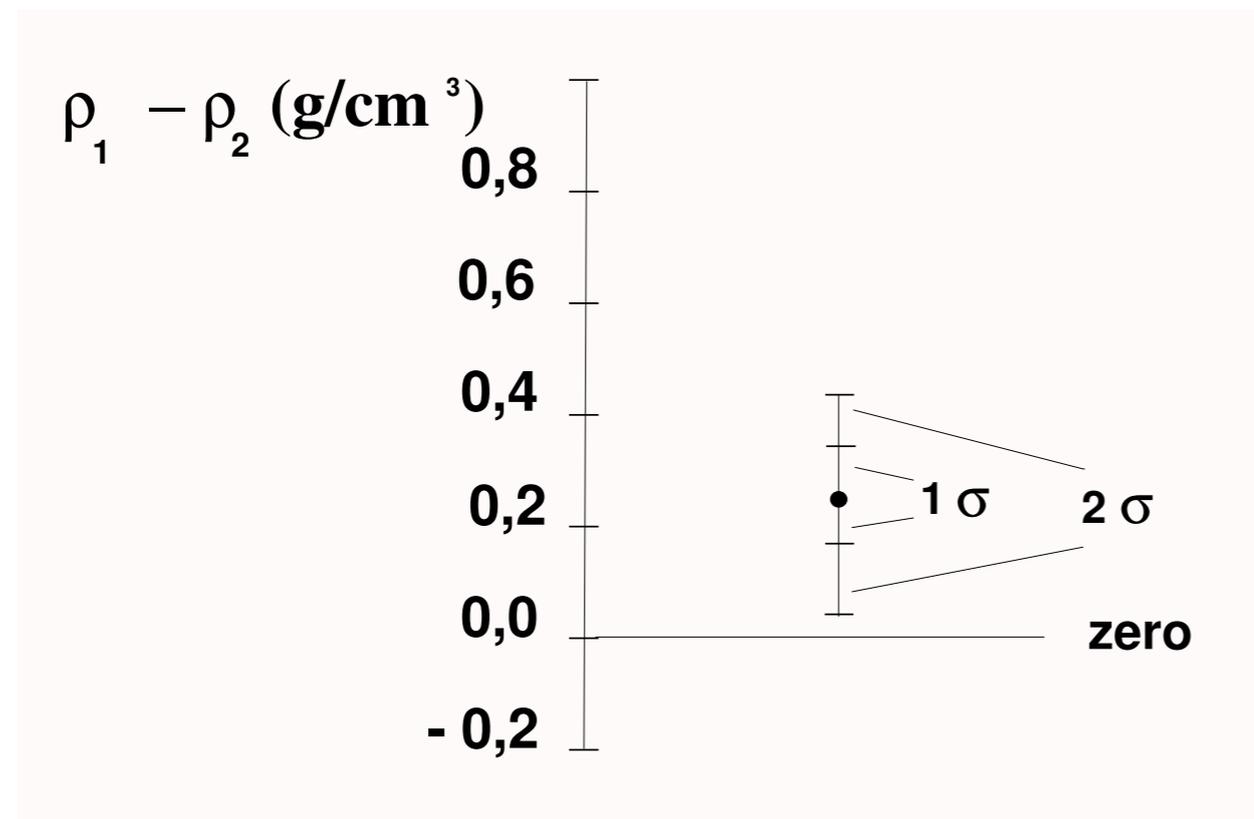
Erro associado:  $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

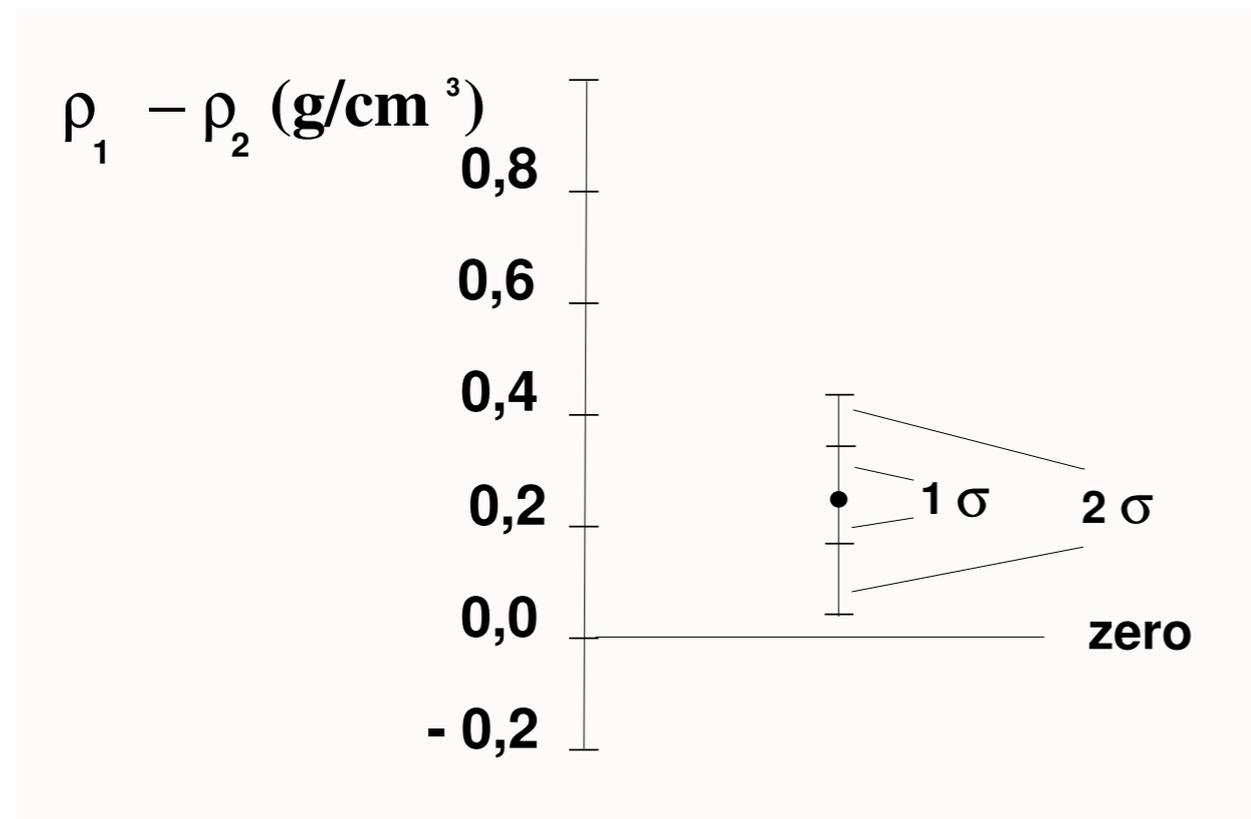


# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



**Discrepância**

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

**Erro associado:**

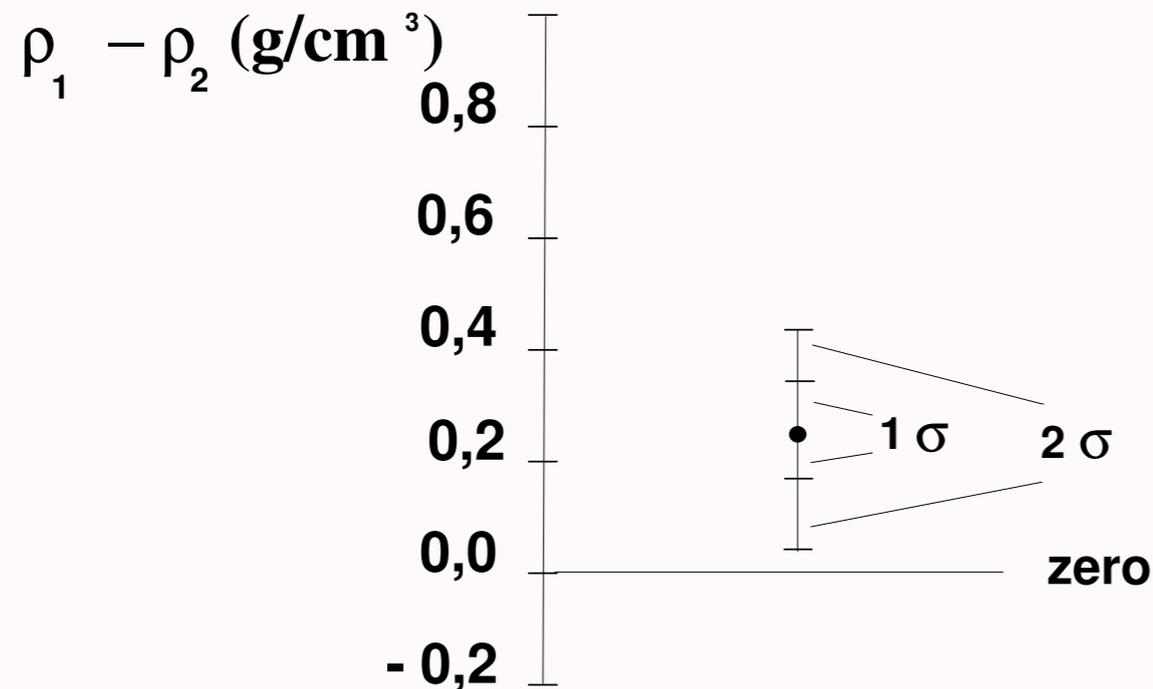
$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



**Discrepância**

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

**Erro associado:**

$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

As estimativas são compatíveis entre si (discrepância  $< 2\sigma$ )

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

$$\Rightarrow \rho = (8,34 \pm 0,09) \text{ g/cm}^3$$