

Física Geral - Laboratório (2014/1)

Aula 3: Estimativas e erros em medidas diretas (I)



Experimentos: medidas diretas

Experimento de medidas diretas de uma grandeza:

- ❑ Aquisição de um conjunto de dados através de medições repetidas e independentes de uma mesma grandeza
- ❑ Medições independentes realizadas nas mesmas condições experimentais, ambientais, etc.
- ❑ Objetivo: Estimativa do valor esperado da grandeza sendo medida

Experimentos: medidas diretas

Experimento de medidas diretas de uma grandeza:

- ❑ Aquisição de um conjunto de dados através de medições repetidas e independentes de uma mesma grandeza
- ❑ Medições independentes realizadas nas mesmas condições experimentais, ambientais, etc.
- ❑ Objetivo: Estimativa do valor esperado da grandeza sendo medida

No processo de medição de uma grandeza, há inevitavelmente incertezas

- ❑ Imperfeições instrumentais, limitações observacionais, condições ambientais, etc.
- ❑ Hipóteses, modelos teóricos
- ❑ Natureza possivelmente aleatória do fenômeno

Valor esperado de uma grandeza

Valor esperado: valor hipotético, μ , de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas indefinidamente

Valor esperado de uma grandeza

Valor esperado: valor hipotético, μ , de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas indefinidamente

É claro que não podemos repetir uma medição infinitamente..

Dessa forma, fazemos uma estimativa para o valor esperado, a partir de um conjunto finito de medidas da grandeza

Chamamos esse conjunto finito de uma amostra de todos os possíveis valores para as medidas, ou população

Resultado de uma medição

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

$$x \pm \epsilon_x (\text{unidade})$$

Estimativa do valor esperado

A partir de medições de uma grandeza, com instrumentos bem calibrados e procedimentos apropriados, e para um grande número de medidas diretas, a média da distribuição de frequência dos dados tende ao valor esperado da grandeza

A distribuição de frequência dos dados é chamada de distribuição amostral

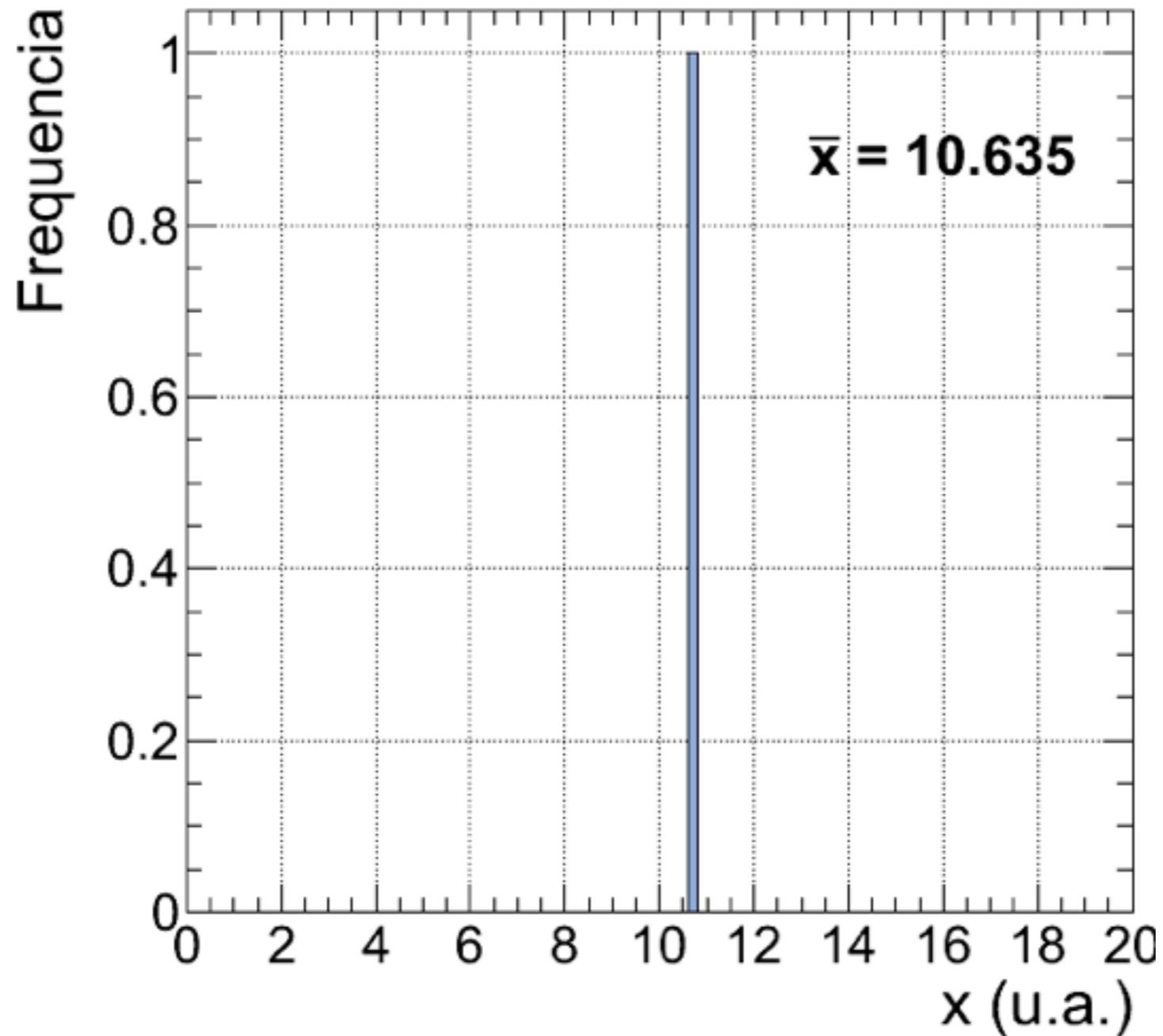
Ou seja, a melhor estimativa para o valor esperado de uma grandeza, x , a partir de uma amostra $\{x_i\}$ de dados, é a média

$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$

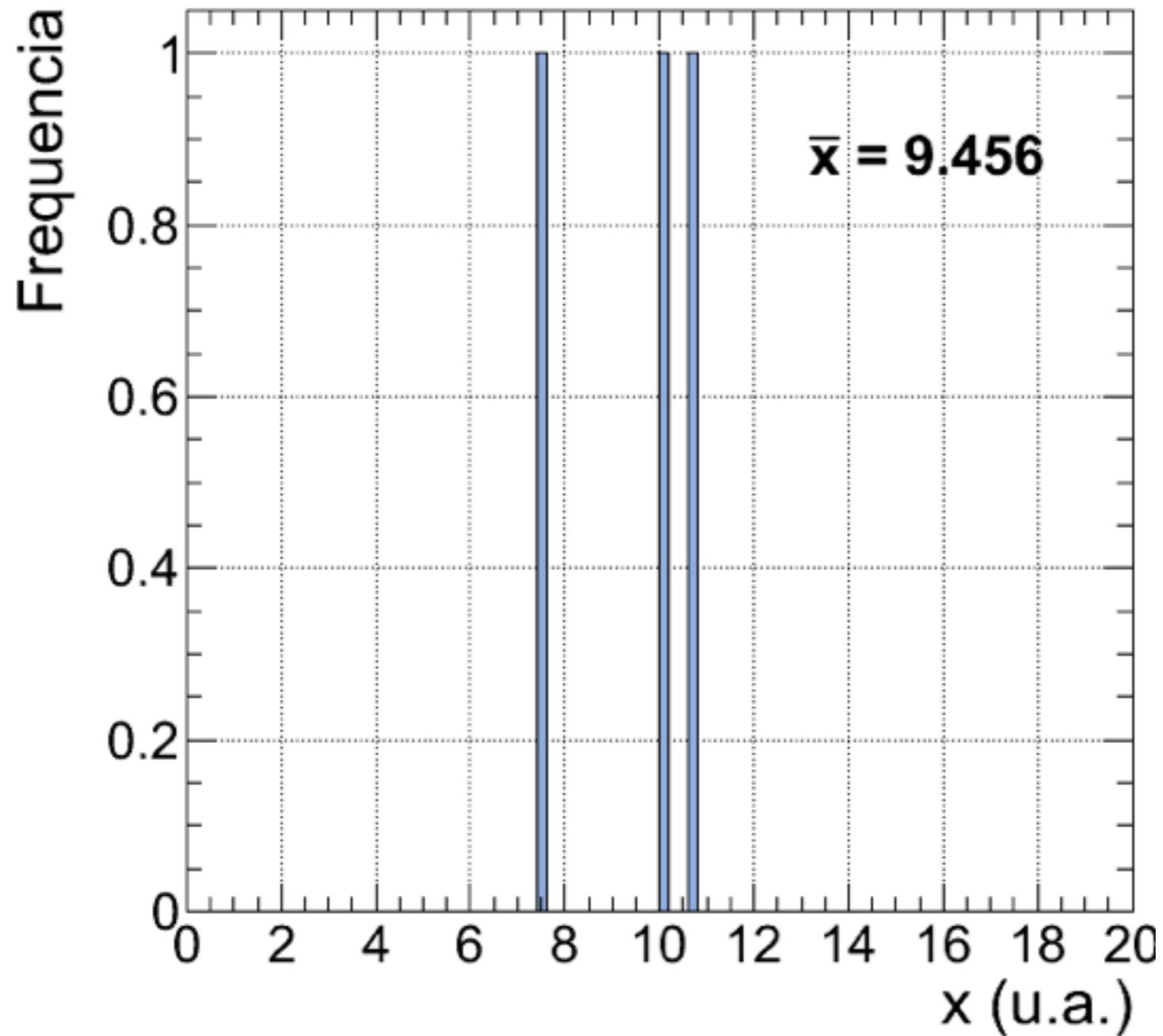
(Podemos pensar no *limite* para um número grande de medidas, ou seja, $N \rightarrow \infty$)

Estimativa do valor esperado

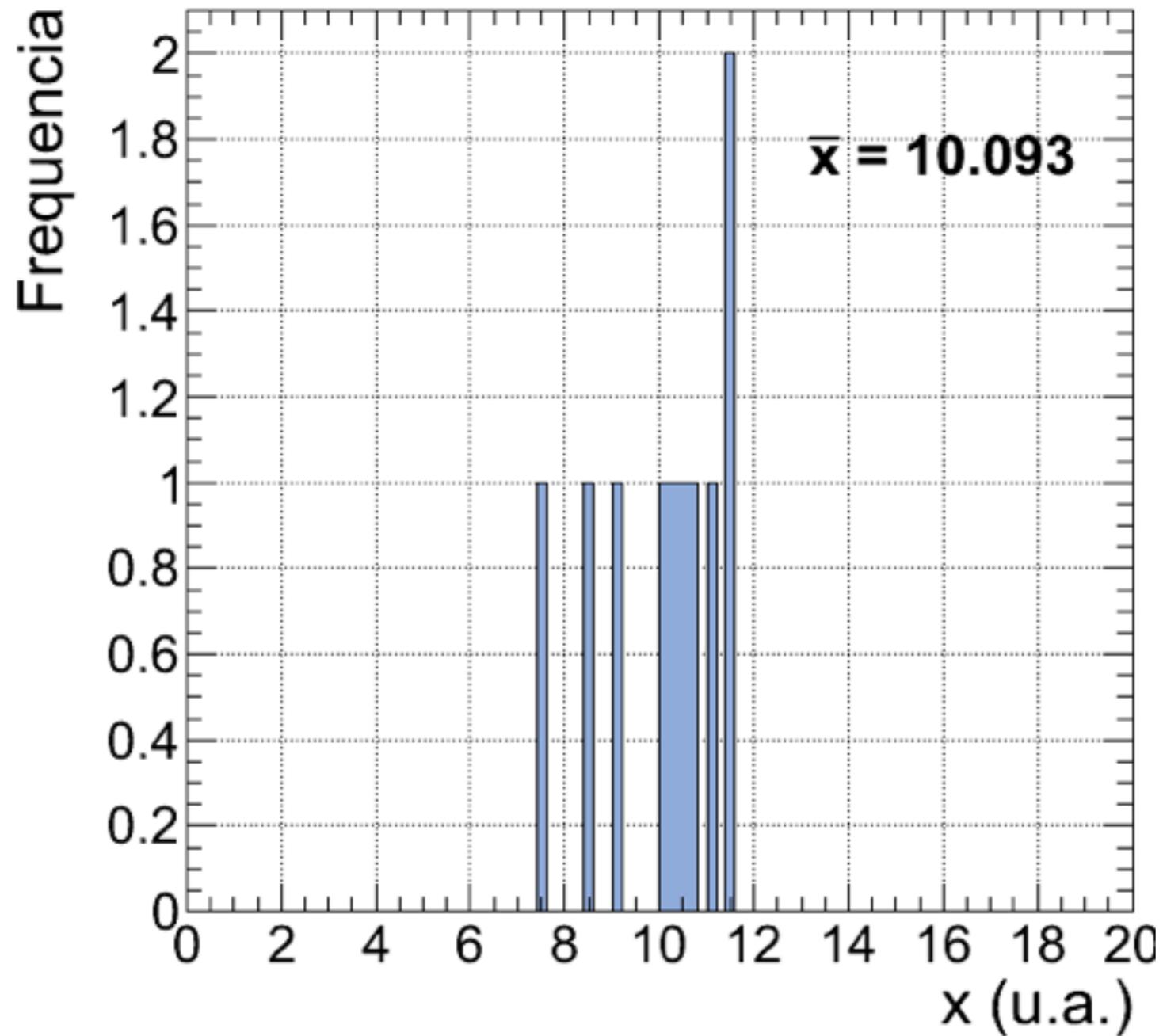
Estimativa do valor esperado



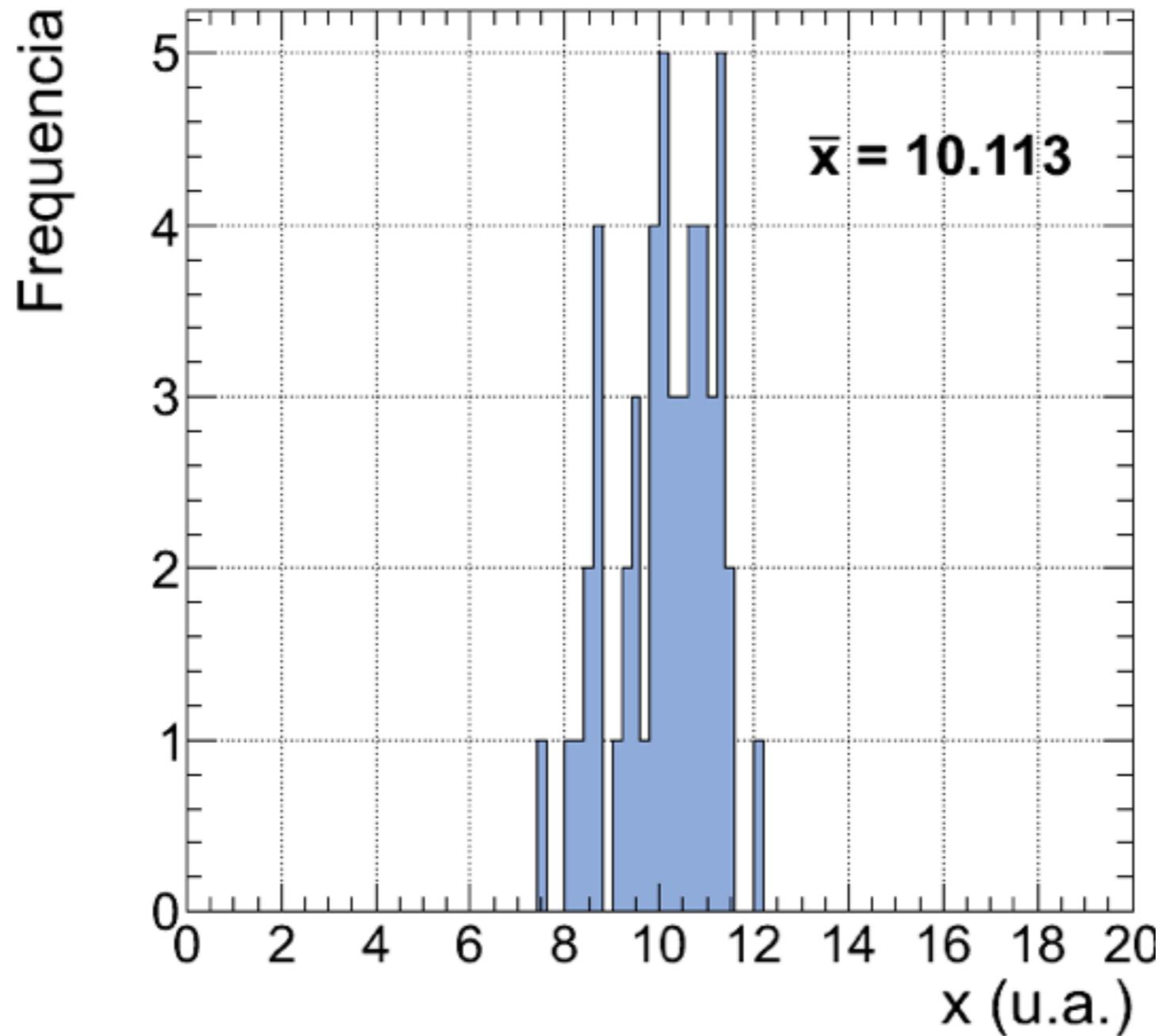
Estimativa do valor esperado



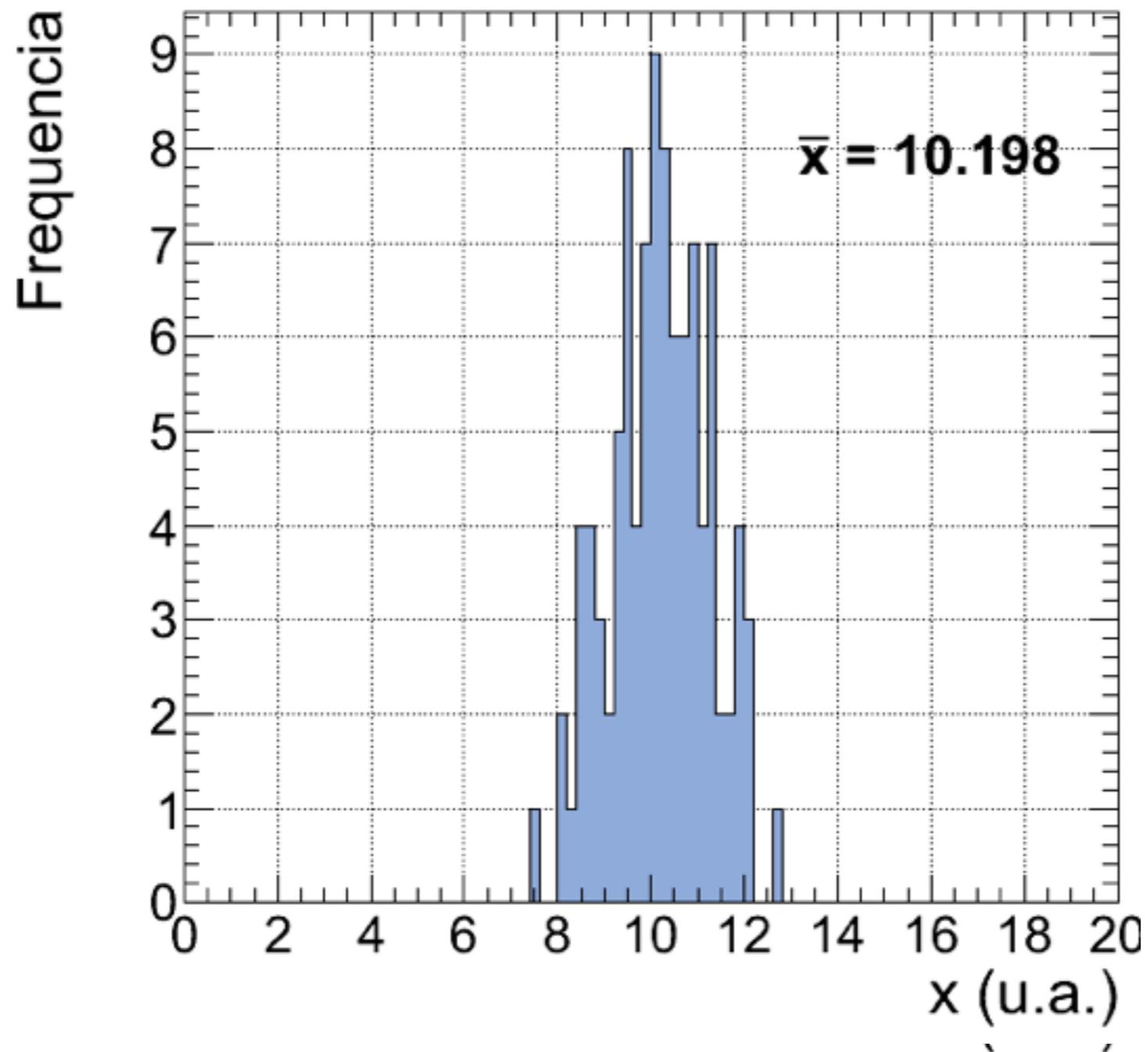
Estimativa do valor esperado



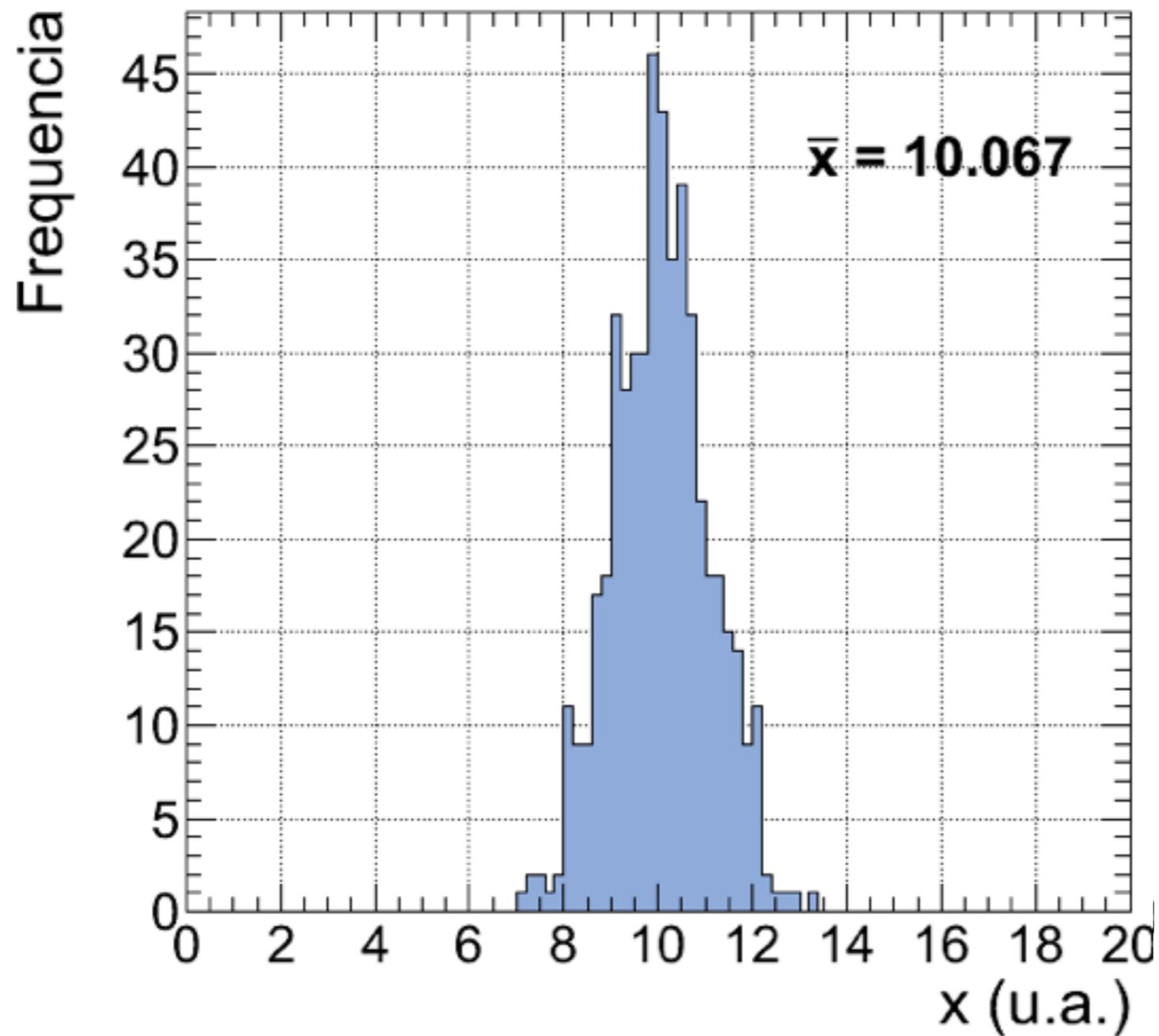
Estimativa do valor esperado



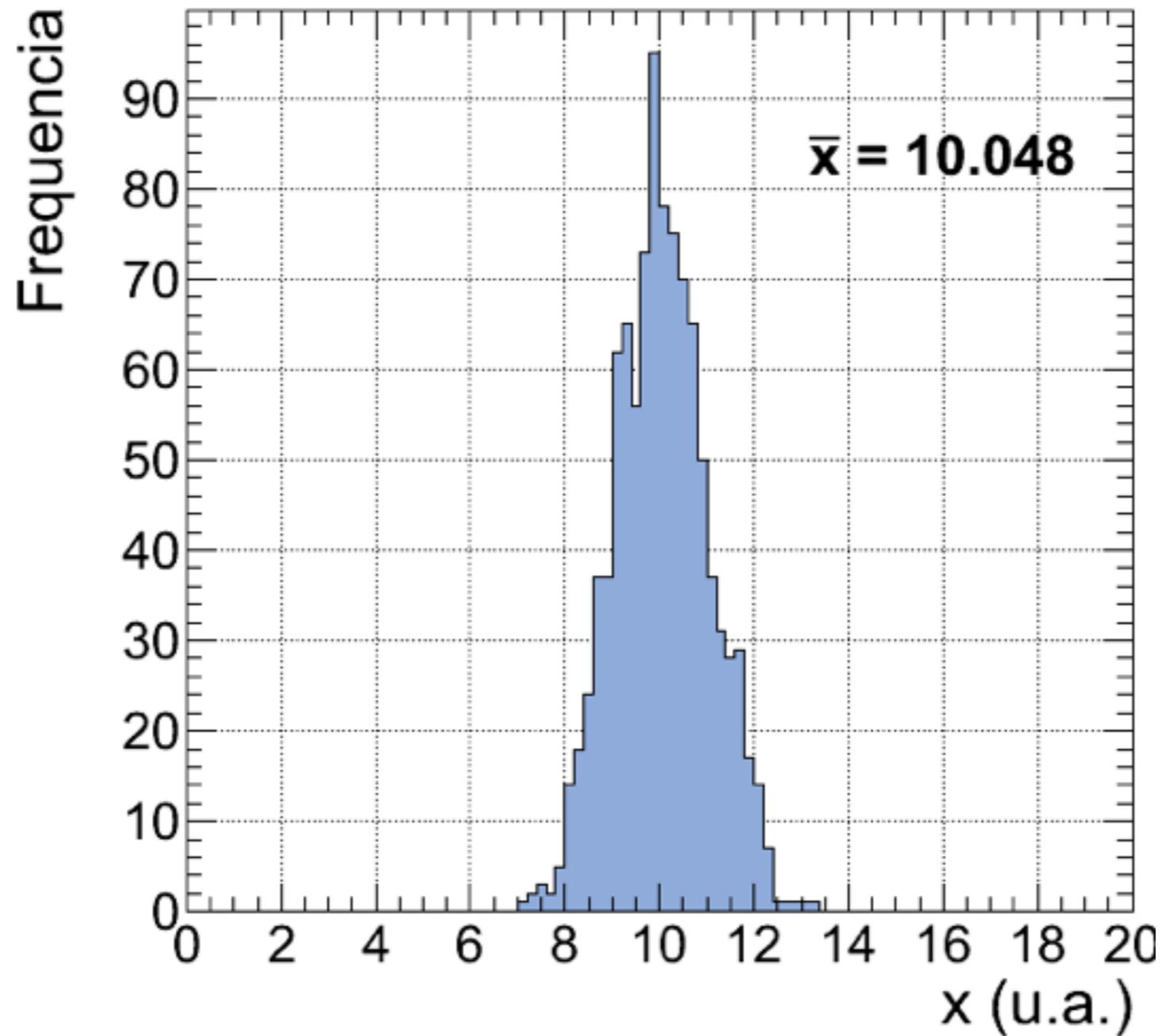
Estimativa do valor esperado



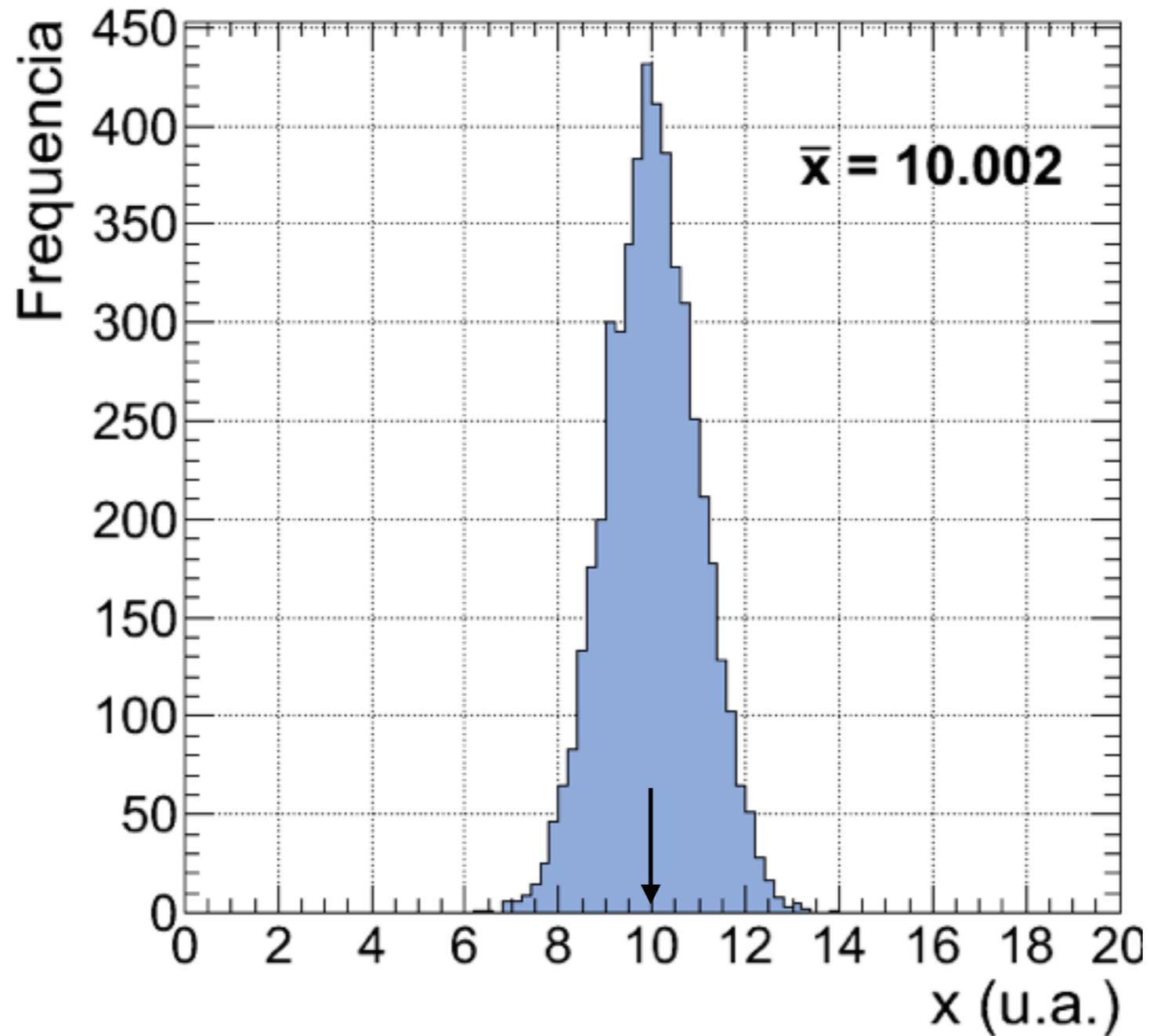
Estimativa do valor esperado



Estimativa do valor esperado



Estimativa do valor esperado



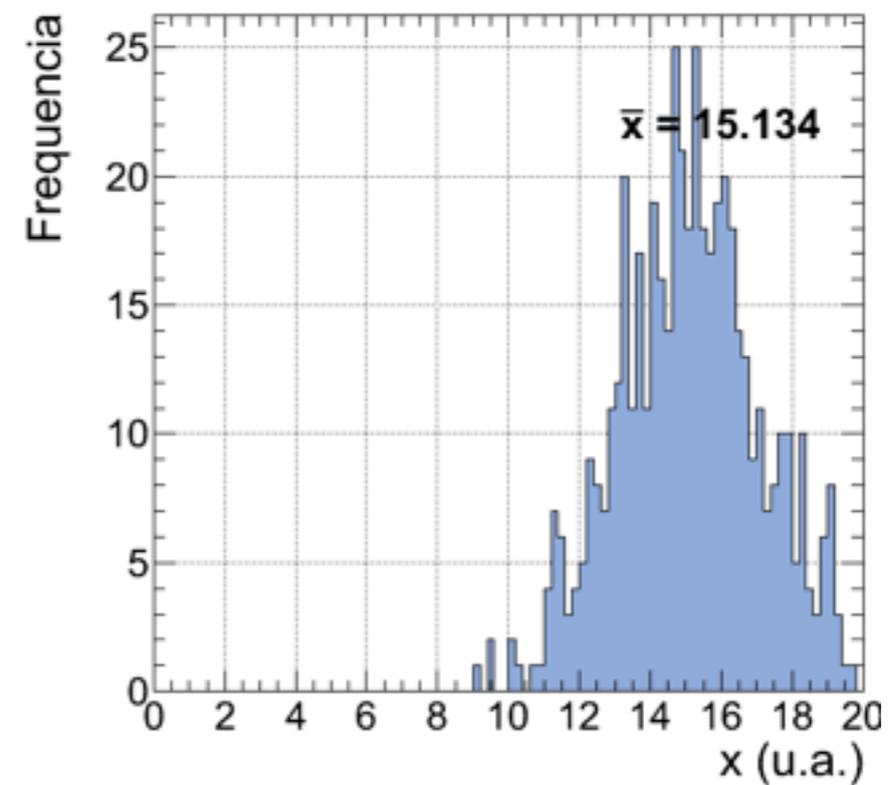
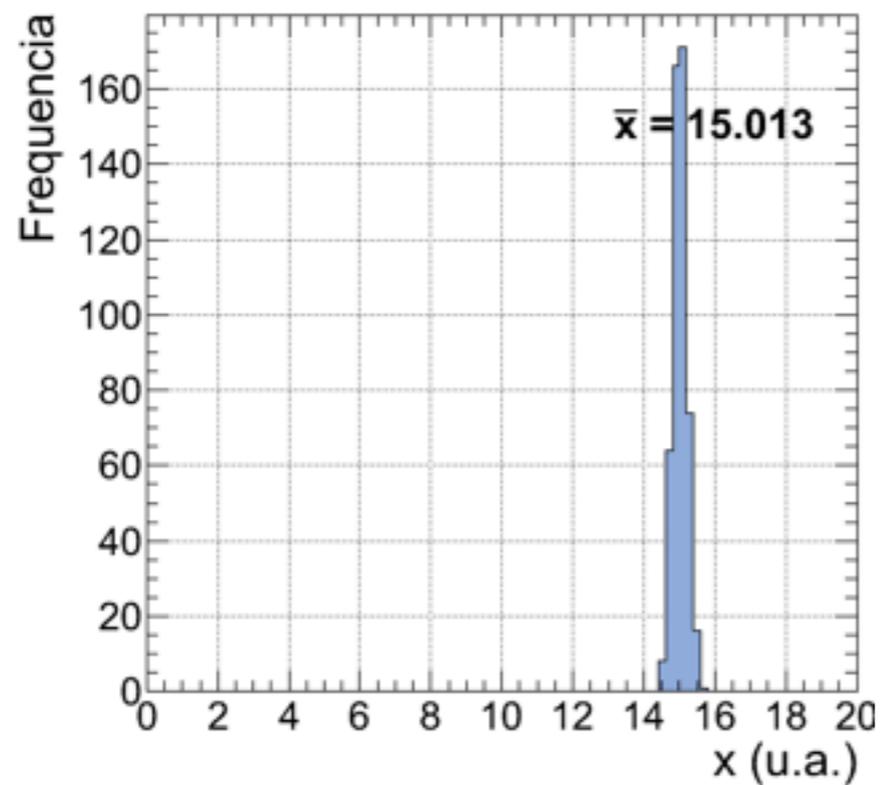
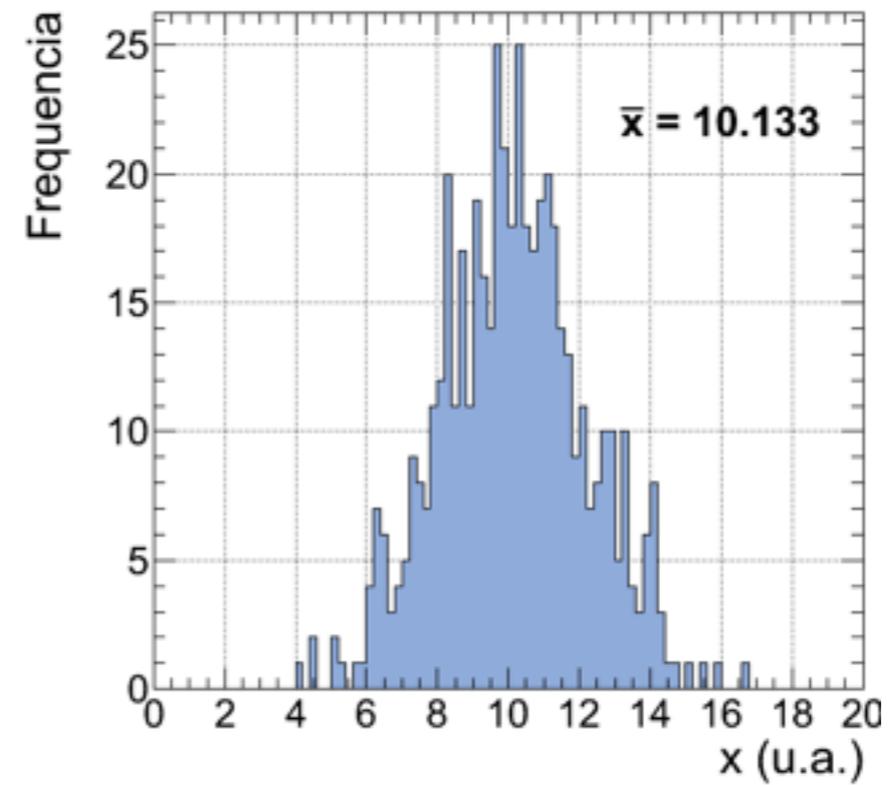
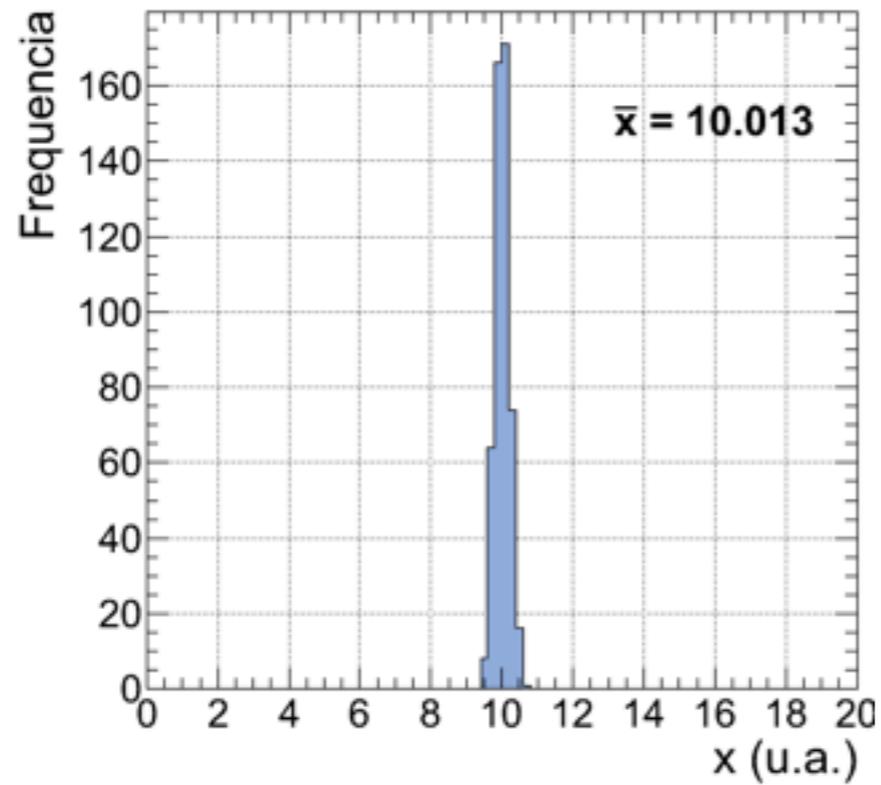
Incertezas aleatórias e sistemáticas

Incertezas aleatórias: devido a flutuações inevitáveis no processo de medição, que provocam a dispersão das medidas em torno da média

Incertezas sistemáticas: desvios em geral regulares, devido a imperfeições instrumentais, observacionais, ou do modelo teórico

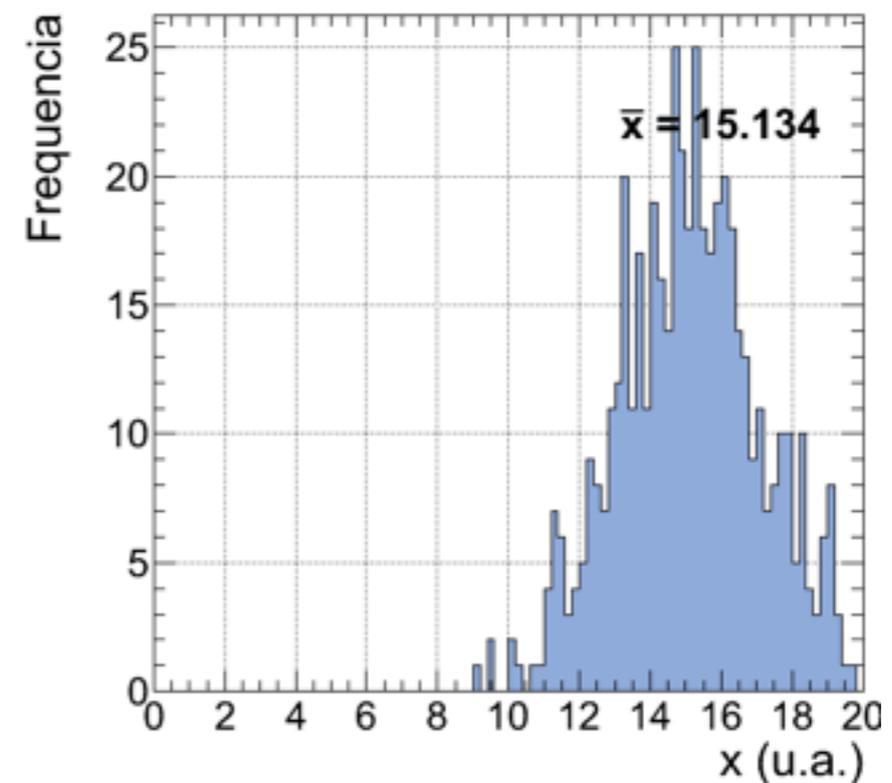
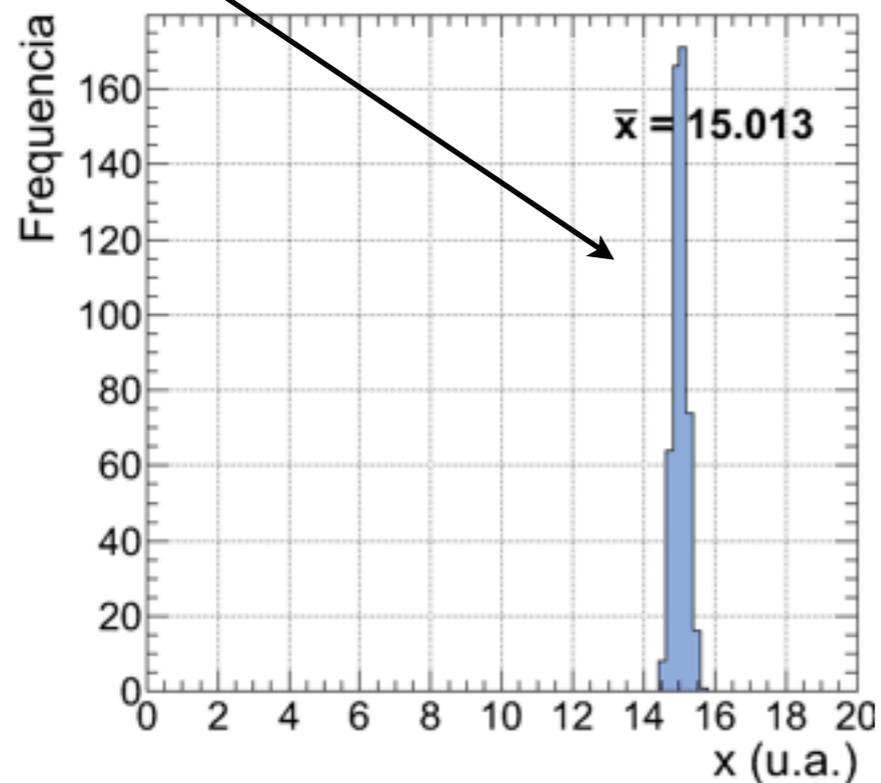
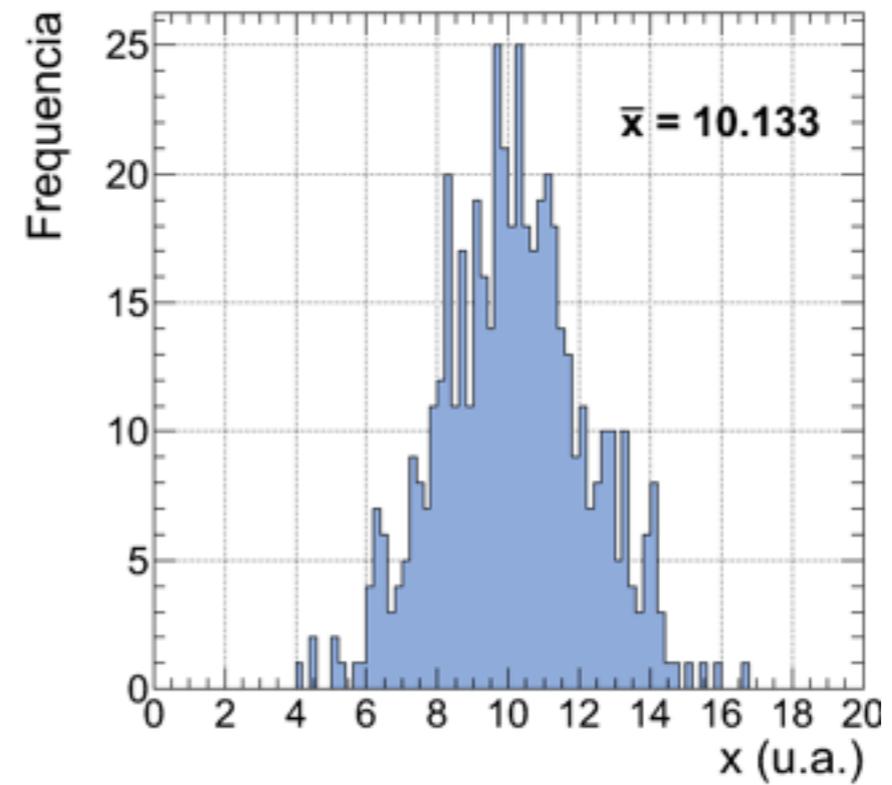
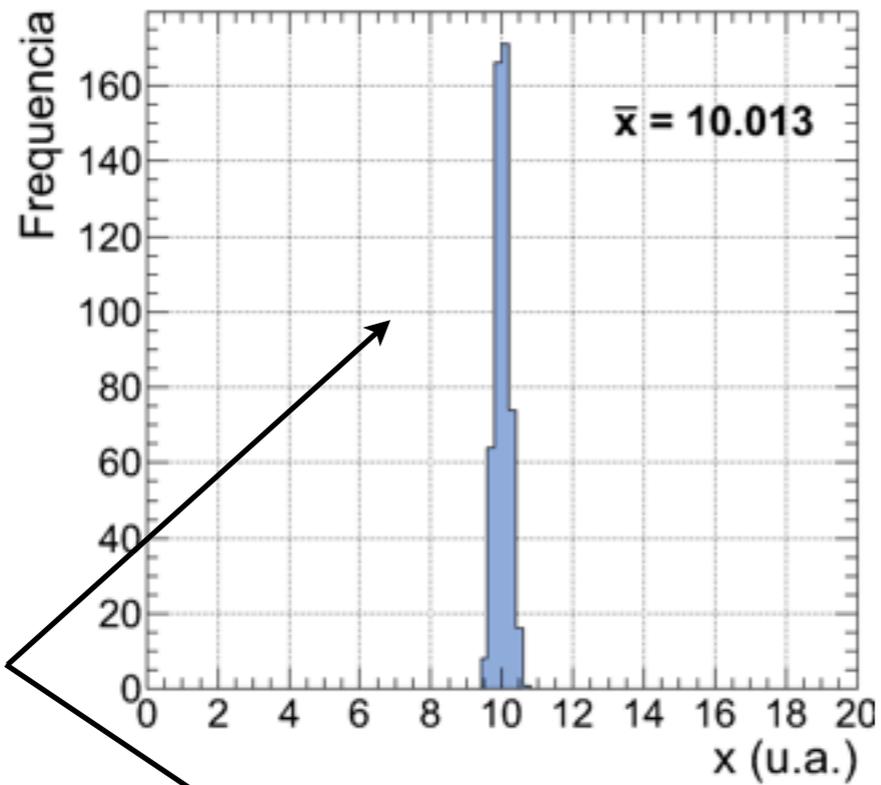
As *incertezas aleatórias* estão associadas à precisão do experimento, enquanto as *incertezas sistemáticas*, com a sua exatidão

Medições: precisão e exatidão

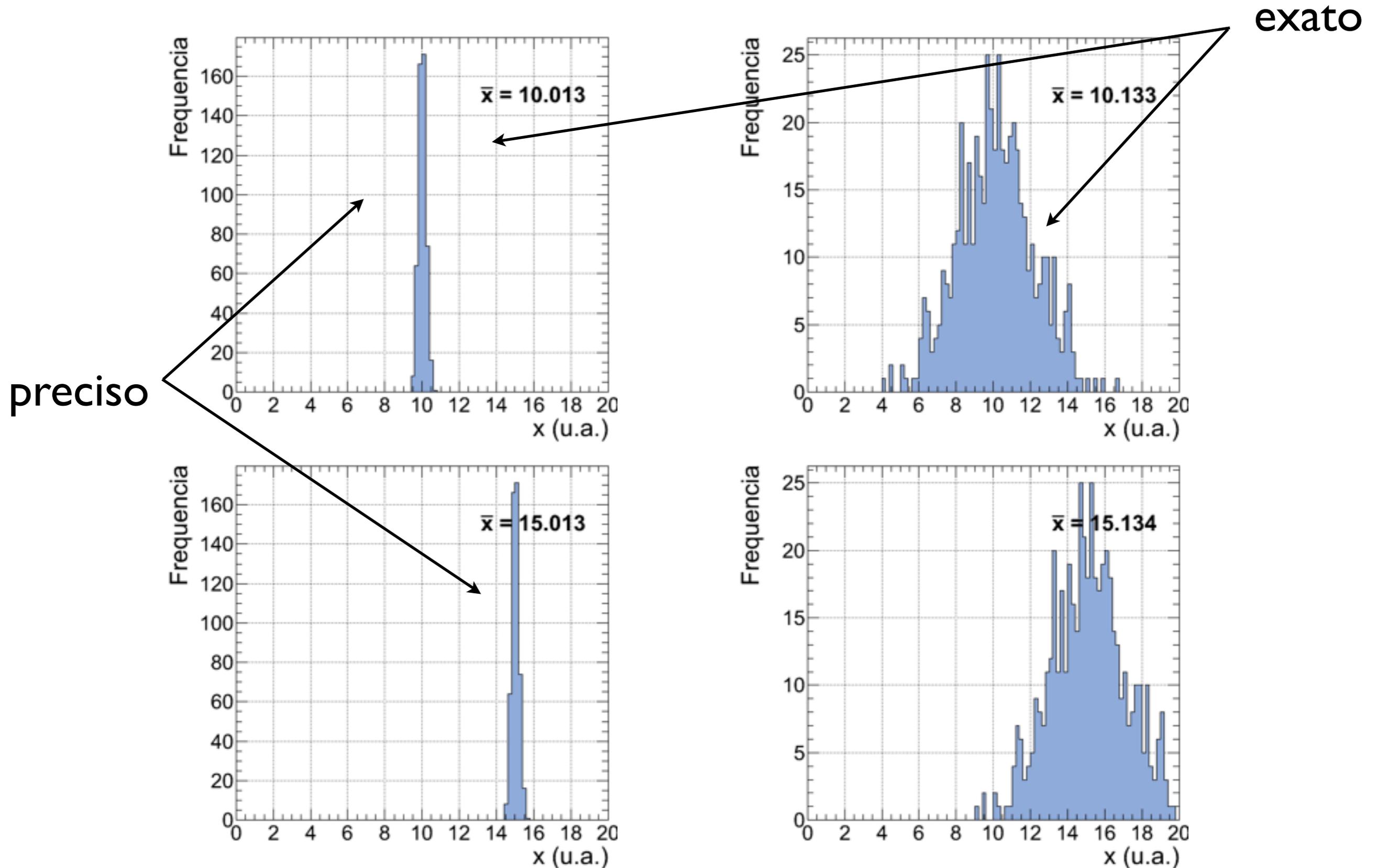


Medições: precisão e exatidão

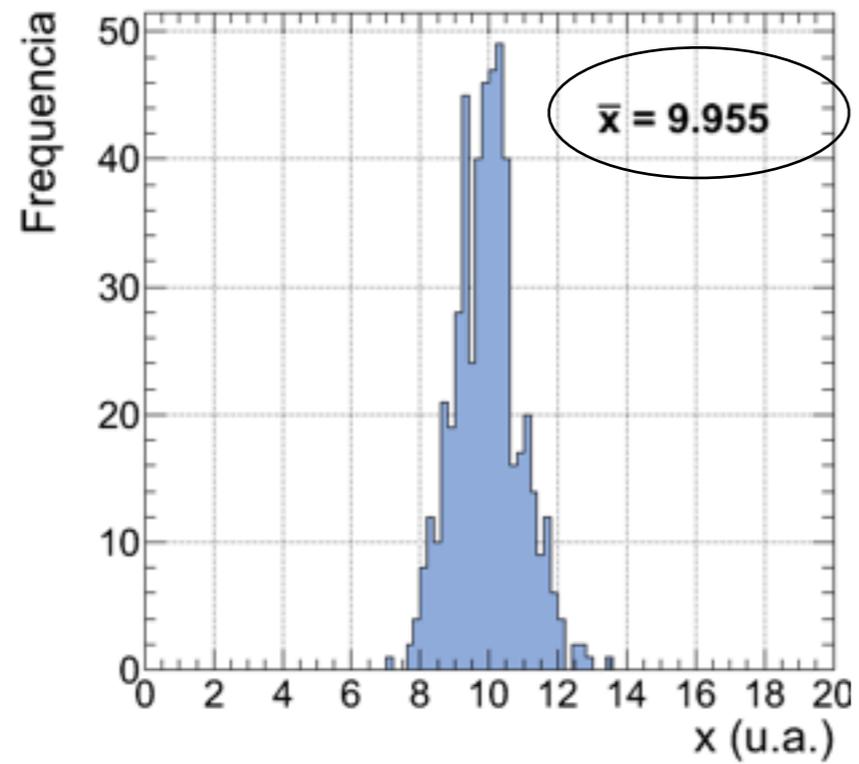
preciso



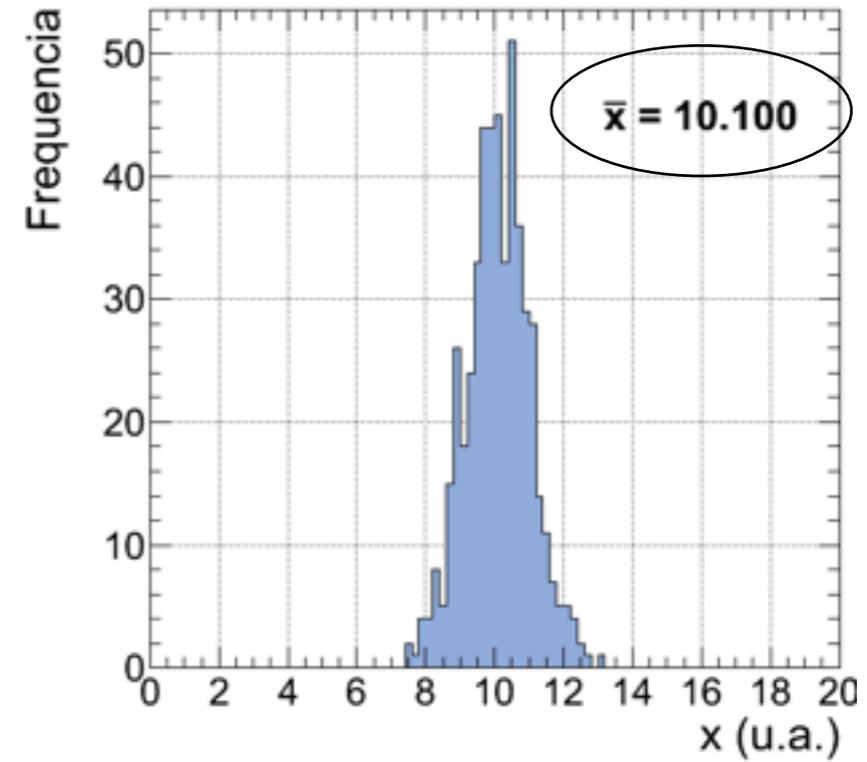
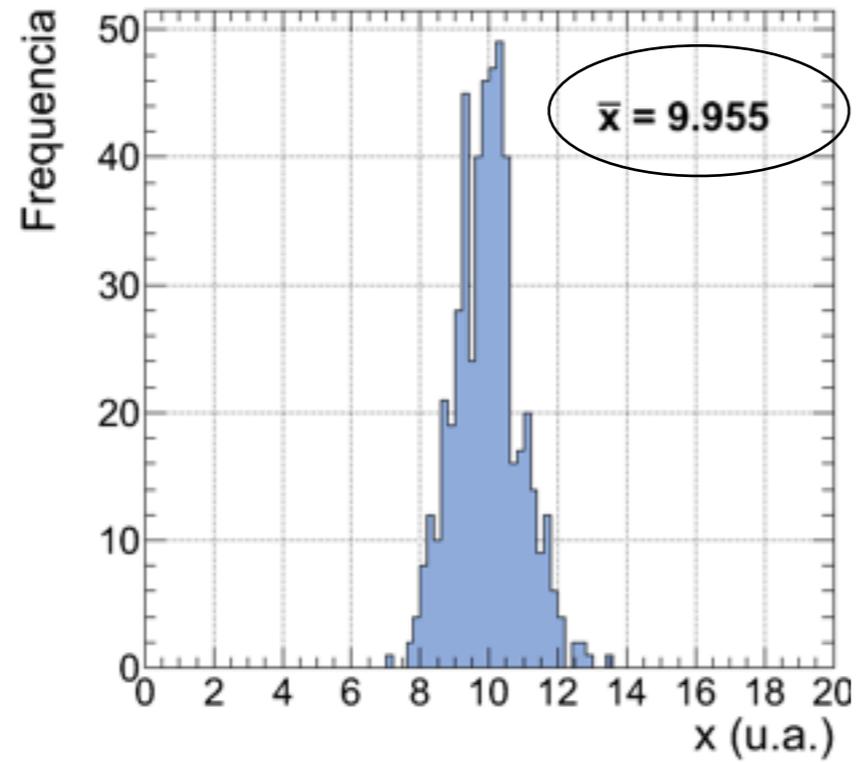
Medições: precisão e exatidão



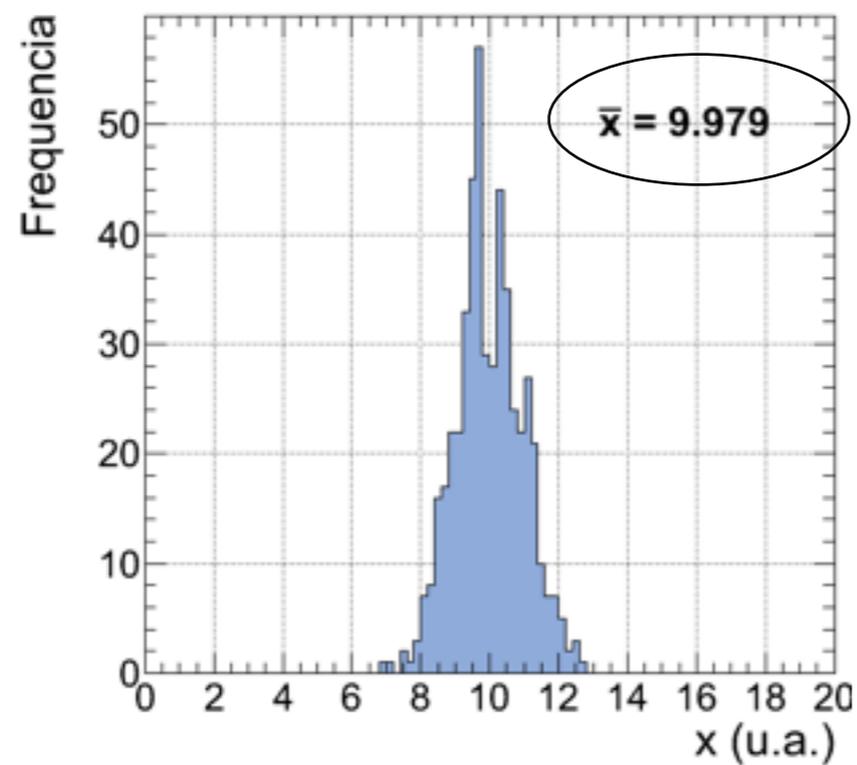
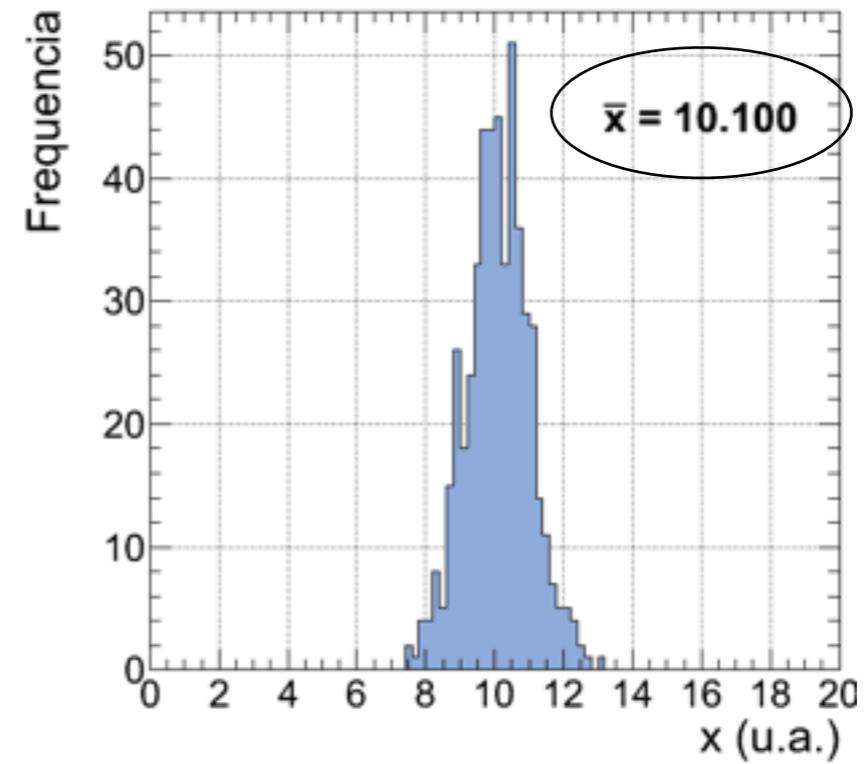
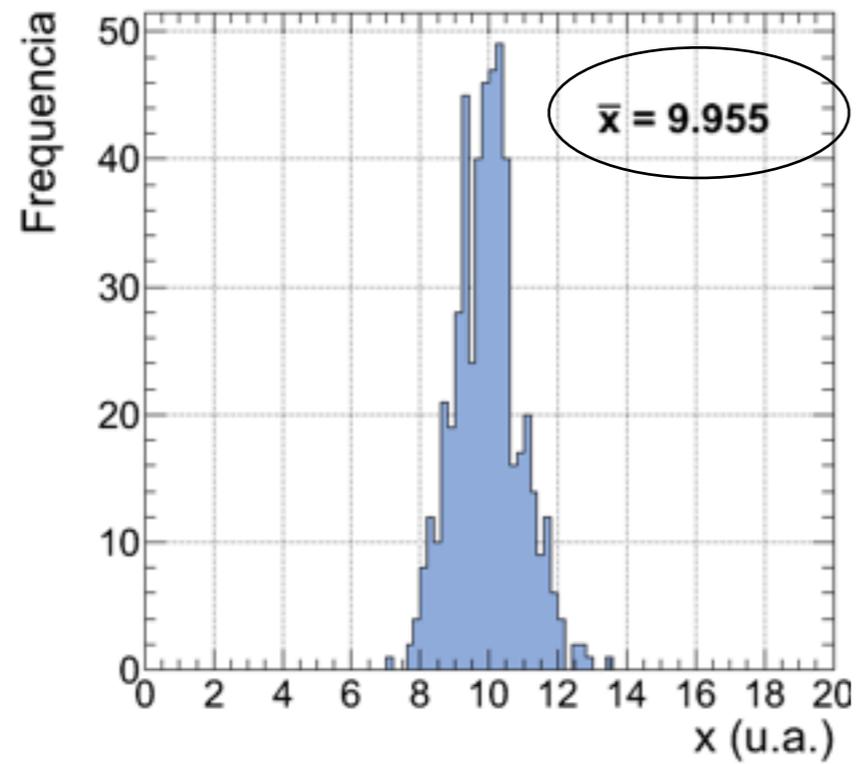
Erro da média



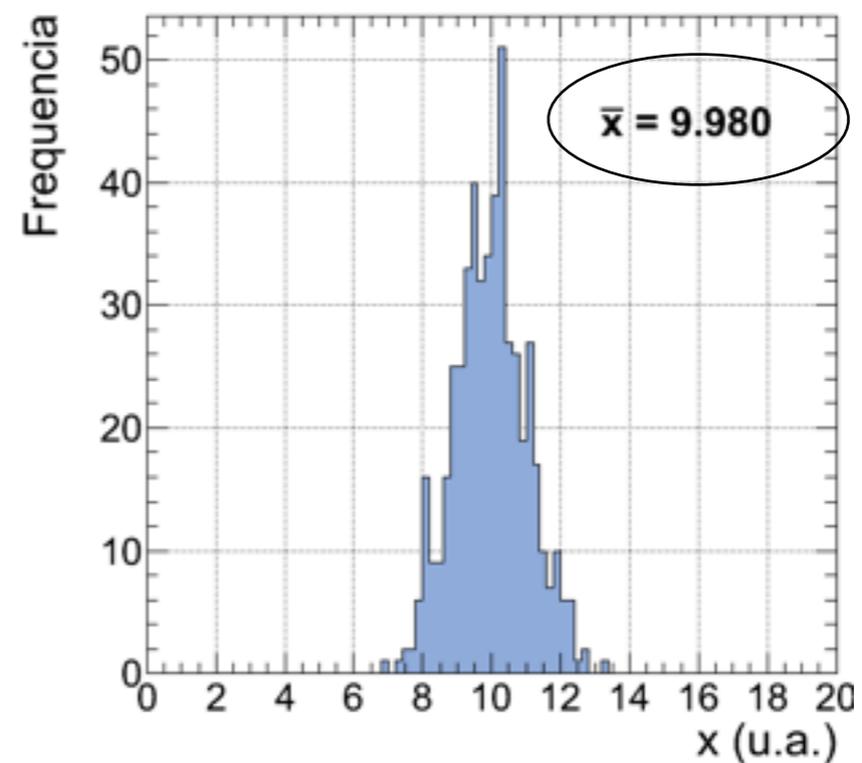
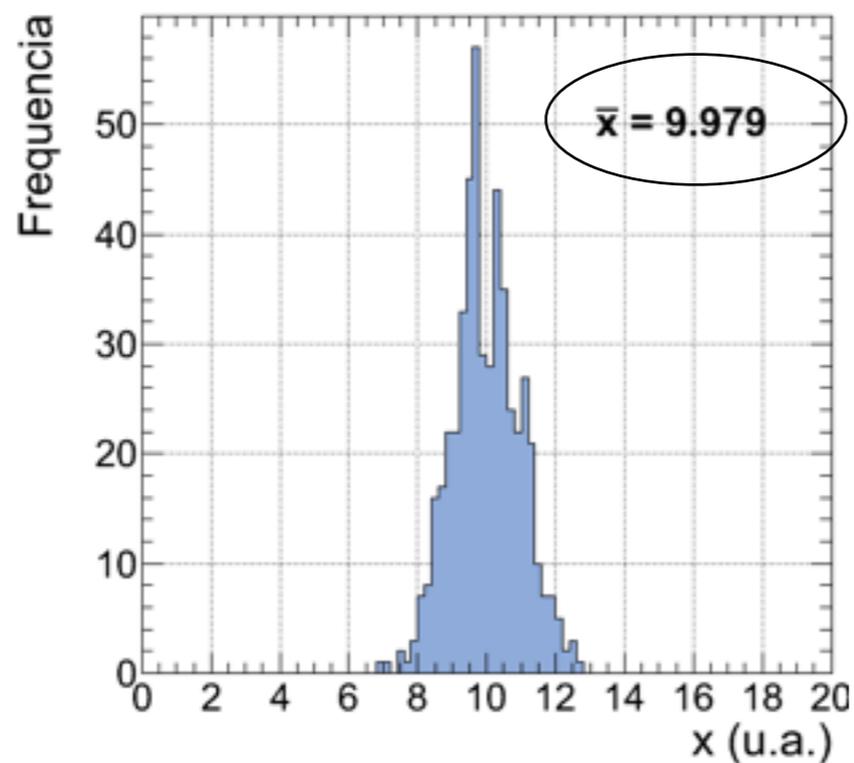
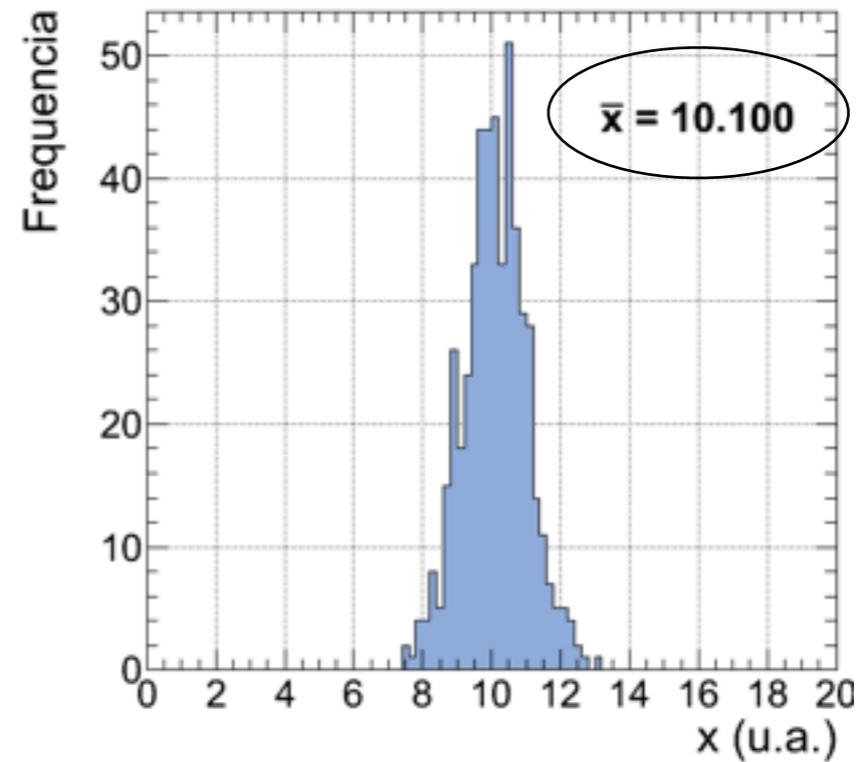
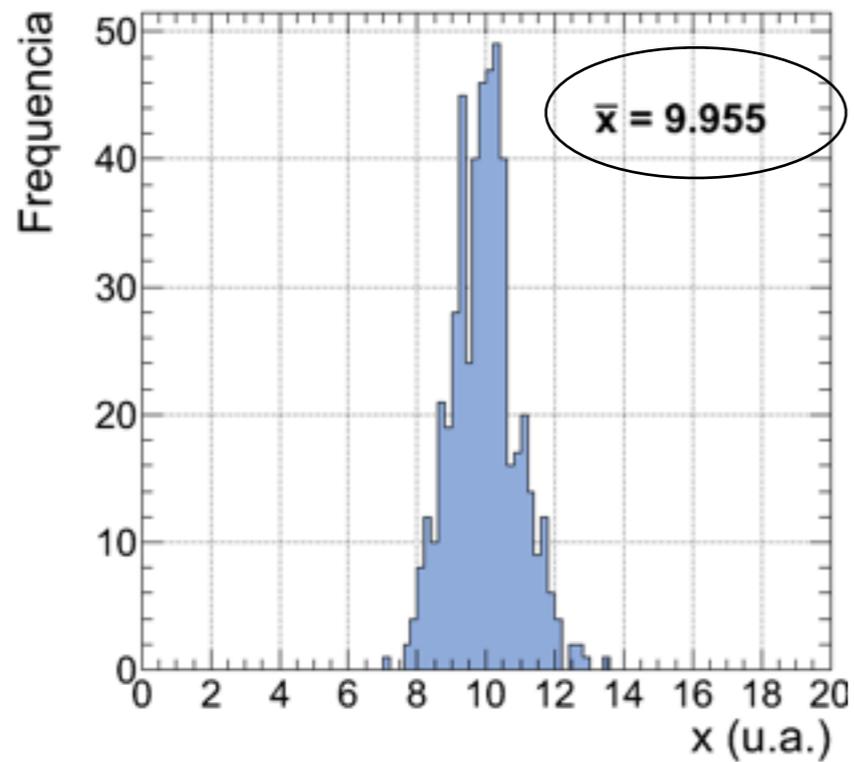
Erro da média



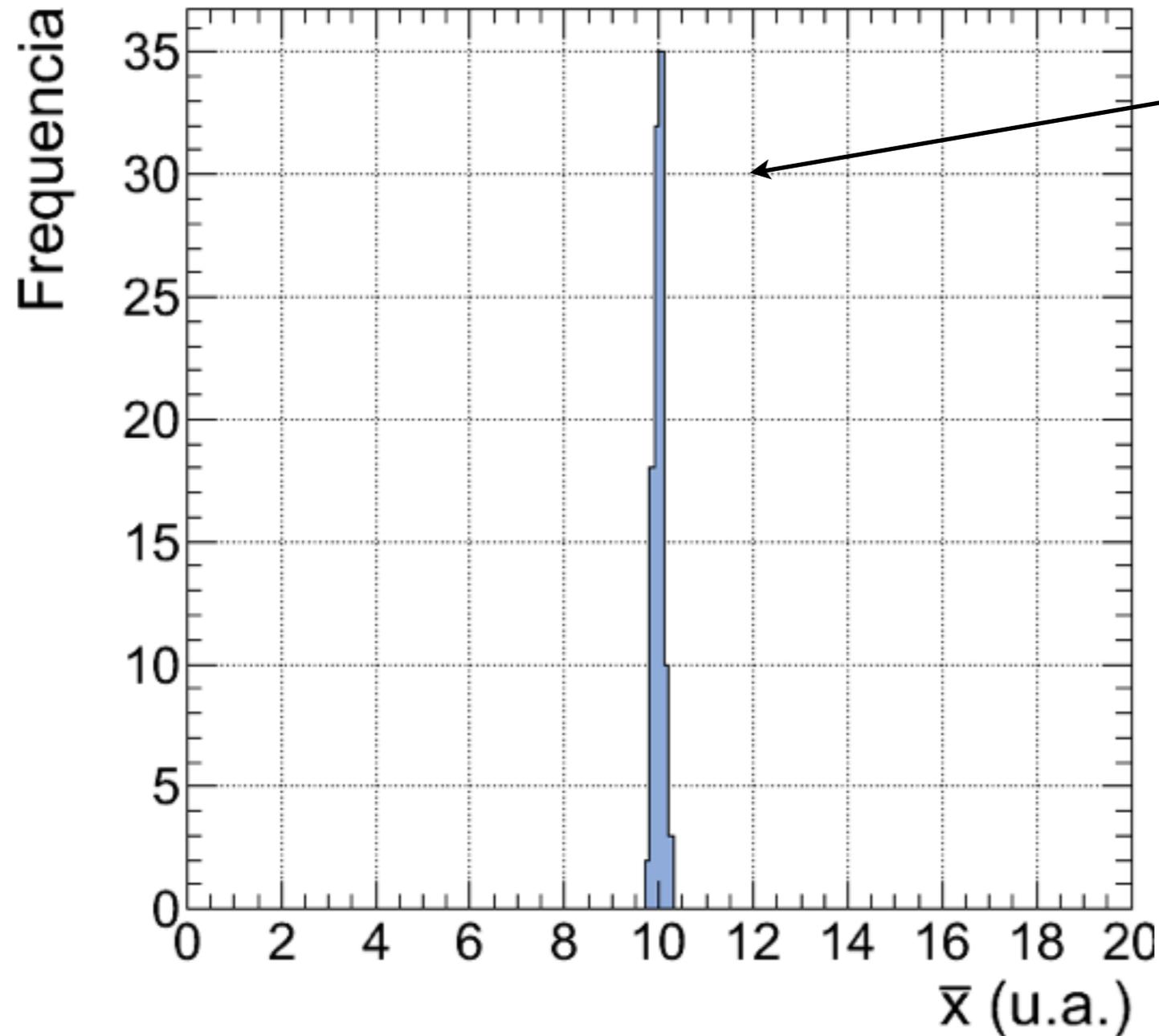
Erro da média



Erro da média



Erro da média



Distribuição das médias de 100 “experimentos”, cada um com 100 medidas

Note que o “erro da média” é menor que o “erro da medida”

Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de N medidas diretas.

Vamos estimar primeiramente o erro de cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_x$$

O erro da média pode ser aproximado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de N medidas diretas.

Vamos estimar primeiramente o erro de cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_x$$

“desvio padrão experimental”
ou “amostral”

desvio padrão

O erro da média pode ser aproximado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de N medidas diretas.

Vamos estimar primeiramente o erro de cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_x$$

“desvio padrão experimental”
ou “amostral”

desvio padrão

O erro da média pode ser aproximado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

O desvio padrão experimental (s_x) será comumente representado igualmente por σ_x

Estimativa do erro da medida e da média

Para um número grande de medidas:

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro da medida e da média

Para um número grande de medidas:

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Quanto maior o número de medidas em um experimento, menor o erro estimado “da média”

Resultado de uma medição:
Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

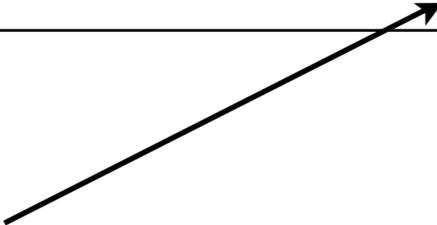
estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

Resultado de uma medição:

Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}



Resultado de uma medição:

Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Resultado de uma medição: Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Note que aqui estamos estimando o que definimos antes como *incertezas aleatórias*. Incertezas aleatórias podem ser reduzidas por repetição (maior número N de medidas).

Incertezas sistemáticas, no entanto, não podem em geral ser reduzidas por mera repetição. Elas dependem do entendimento do instrumento e das técnicas de medição. A partir de um número suficientemente grande de medidas, elas passam a ser *dominantes*.

Resultado de uma medição:

Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Exemplo:

$$\bar{x} = 10,0835 \quad \longrightarrow \quad \bar{x} = 10,08 \pm 0,07(\text{unid.})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0,072$$

Resultado de uma medição:
Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Exemplo:

$$\bar{x} = 10,0835 \quad \longrightarrow \quad \bar{x} = 10,08 \pm 0,07(\text{unid.})$$
$$\sigma_{\bar{x}} = 0,072$$

Número de algarismos significativos
determinado pelo valor do erro

Atividade de aula (Roteiro)

- 1- Realizar a medição dos valores de resistência de 50 resistores iguais
- 2- Representar o conjunto de dados em um histograma e calcular a média e o desvio padrão
- 3- Calcular as estimativas do erro da medida e o erro da média
- 4- Apresente o resultado do conjunto de medidas, com o número adequado de *algarismos significativos*

Multímetro digital

Display digital de “3
1/2” dígitos:

$d_{1/2}$	d_3	d_2	d_1
-----------	-------	-------	-------

Número de
“contagens”: 0 - 1999

Funções:

Medição de tensão contínua (DC - V)

Medição de tensão alternada (AC - V)

Medição de corrente contínua (DC - A)

Medição de resistência (Ω)

Possivelmente: Teste de continuidade,
testes de diodos e transistores,...



Multímetro digital

Função de medida de resistência (a posição pode variar de multímetro para multímetro)

Conectores para pontas de prova



Como ler o código de cores de um resistor



COR	1ª Banda	2ª Banda	3ª Banda	Multiplicador	Tolerância
Preto	0	0	0	1Ω	
Castanho	1	1	1	10Ω	$\pm 1\%$
Vermelho	2	2	2	100Ω	$\pm 2\%$
Laranja	3	3	3	$1K\Omega$	
Amarelo	4	4	4	$10K\Omega$	
Verde	5	5	5	$100K\Omega$	
Azul	6	6	6	$1M\Omega$	
Violeta	7	7	7	$10M\Omega$	
Cinza	8	8	8		
Branco	9	9	9		
Dourado					$\pm 5\%$
Prateado					$\pm 10\%$

Cor	Código
Preto	0
Castanho	1
Vermelho	2
Laranja	3
Amarelo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Cinza	8
Branco	9

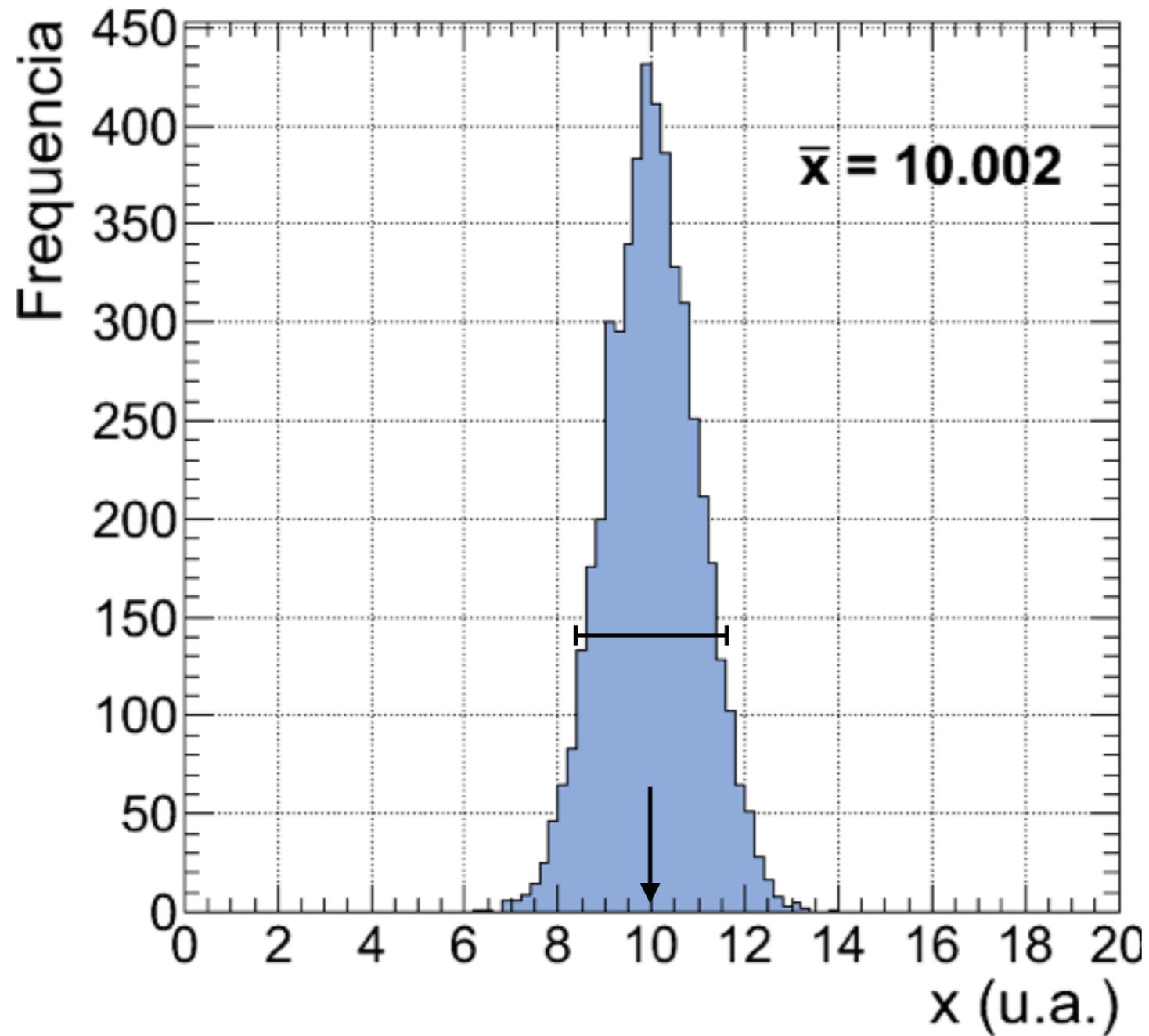
Castanho	$\pm 1\%$
Vermelho	$\pm 2\%$
Dourado	$\pm 5\%$
Prata	$\pm 10\%$



Precisão

Extras

Estimativa do erro da medida



Resumo: parâmetros de posição

i) Média:

Valor médio de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Dados em M classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, \dots, n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_M x_M}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M n_j x_j$$

ii) *Moda*: Valor mais frequente de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$

iii) *Média quadrática*:

$$x_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

iv) *Mediana* (Mesma quantidade de dados abaixo e acima da mediana):

$$N(\text{ímpar}) \rightarrow x_{\text{med}} = x_{(N+1)/2}$$

$$N(\text{par}) \rightarrow x_{\text{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

Parâmetros de dispersão

i) *Amplitude*: Diferença entre os valores máximo e mínimo de uma coleção de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

Parâmetros de dispersão

ii) *Desvio médio*: Média dos módulos dos desvios, em relação à média

$$\overline{|\delta x|} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta x_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| = \frac{|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N}$$

Parâmetros de dispersão

iii) *Variância*: Média dos quadrados dos desvios (δx_i)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

Note que a expressão para a variância pode ser simplificada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Parâmetros de dispersão

iv) *Desvio padrão*: Raiz quadrada da variância, ou média quadrática dos desvios

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$

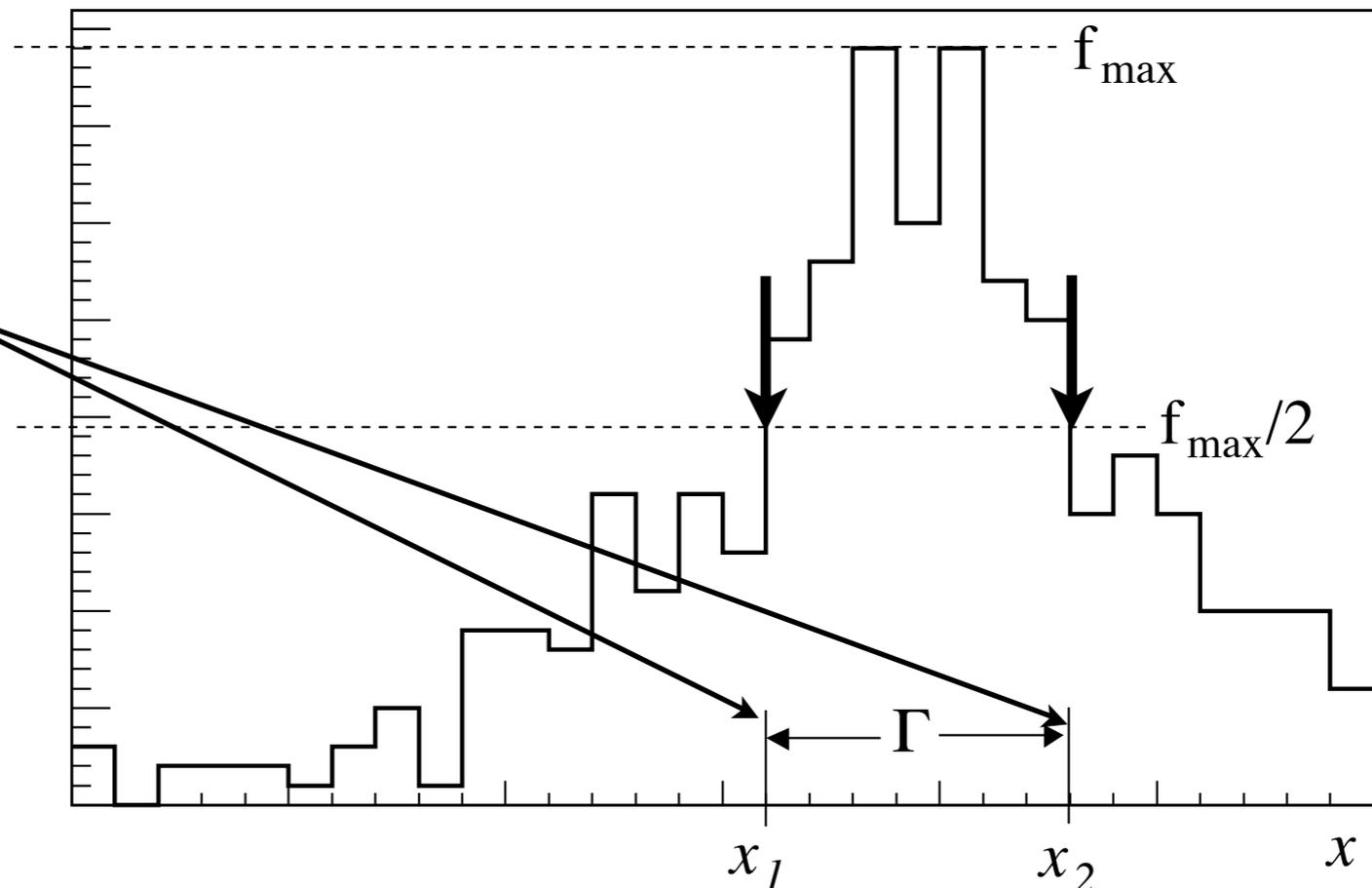

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

Parâmetros de dispersão

v) *Largura a meia altura*: Comprimento do intervalo limitado pelos valores (x_1, x_2) correspondentes à metade da frequência máxima

Símbolo: Γ

$$\Gamma = |x_2 - x_1|$$



Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x}) (y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x}) (y_N - \bar{y})}{N}\end{aligned}$$

Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})}{N}\end{aligned}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})}{N}\end{aligned}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

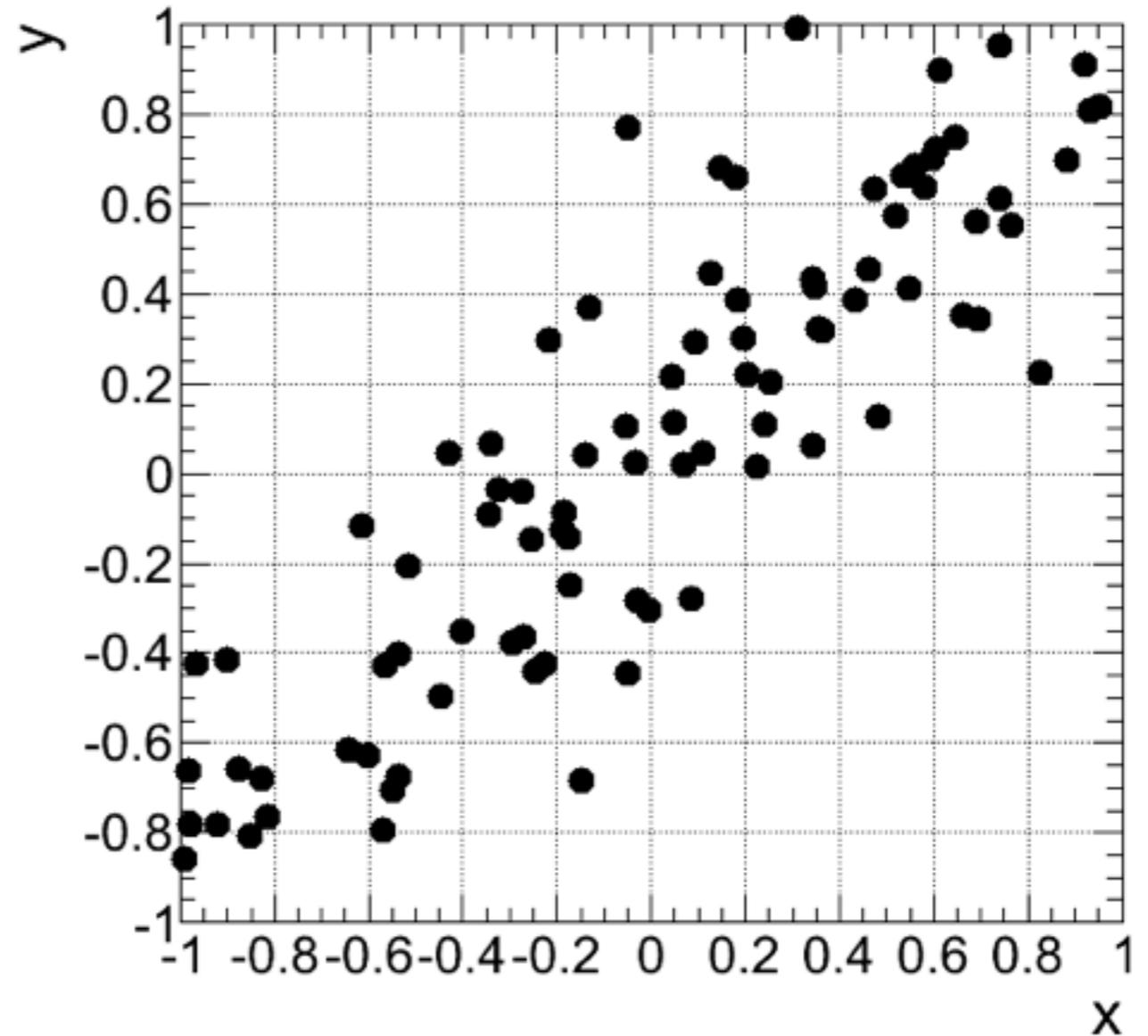
e que não importa a ordem das variáveis:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

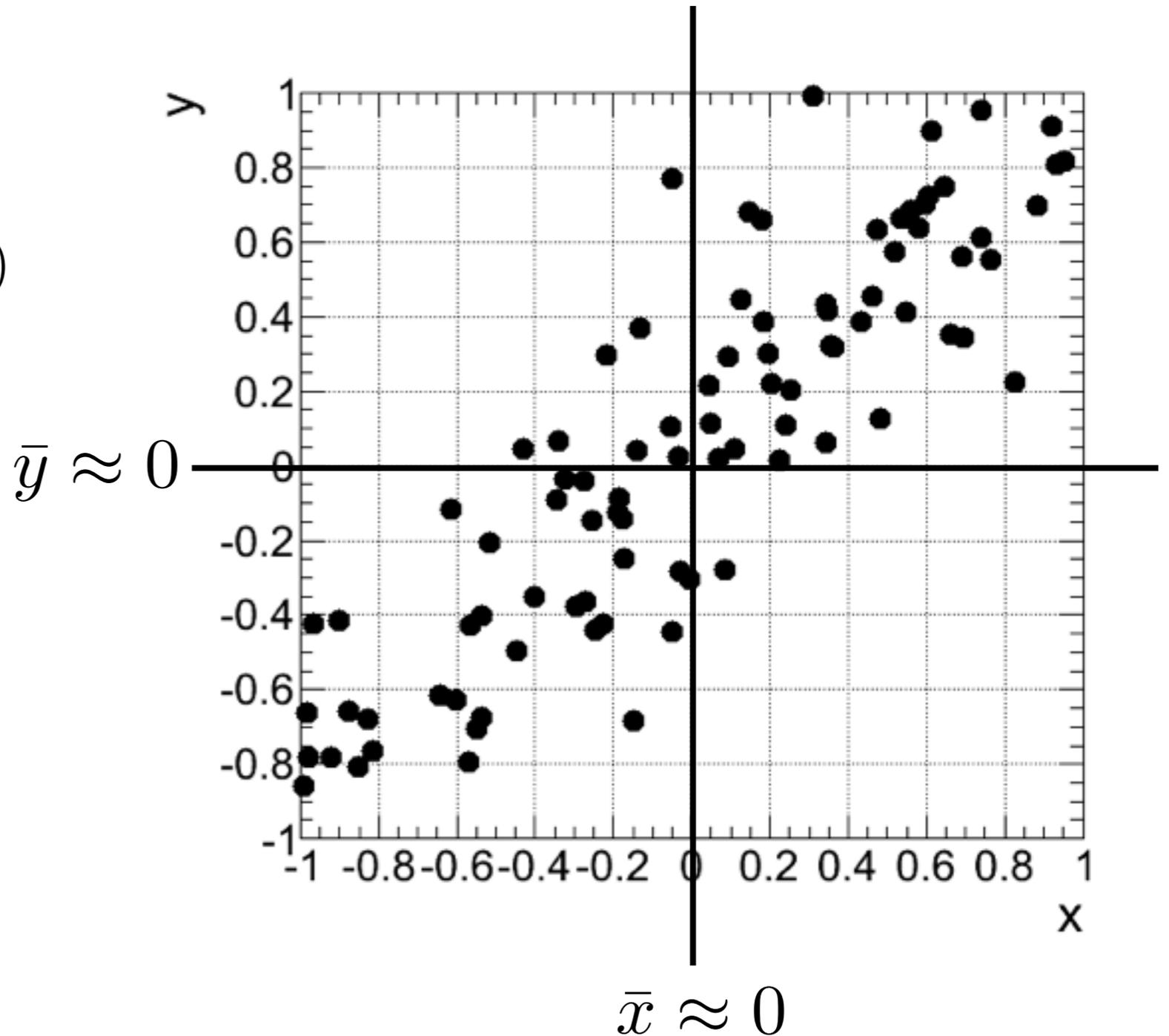
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

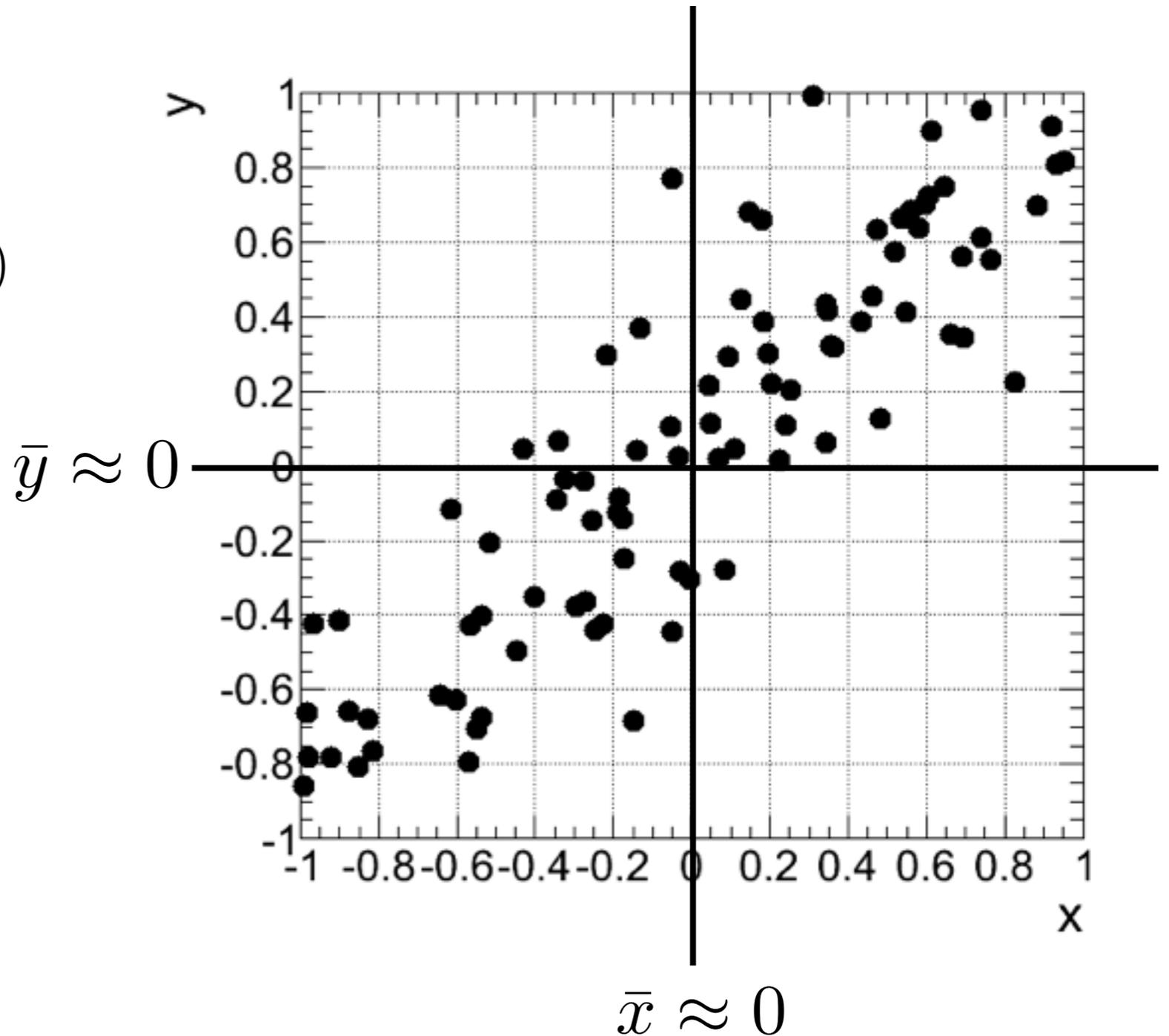


Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

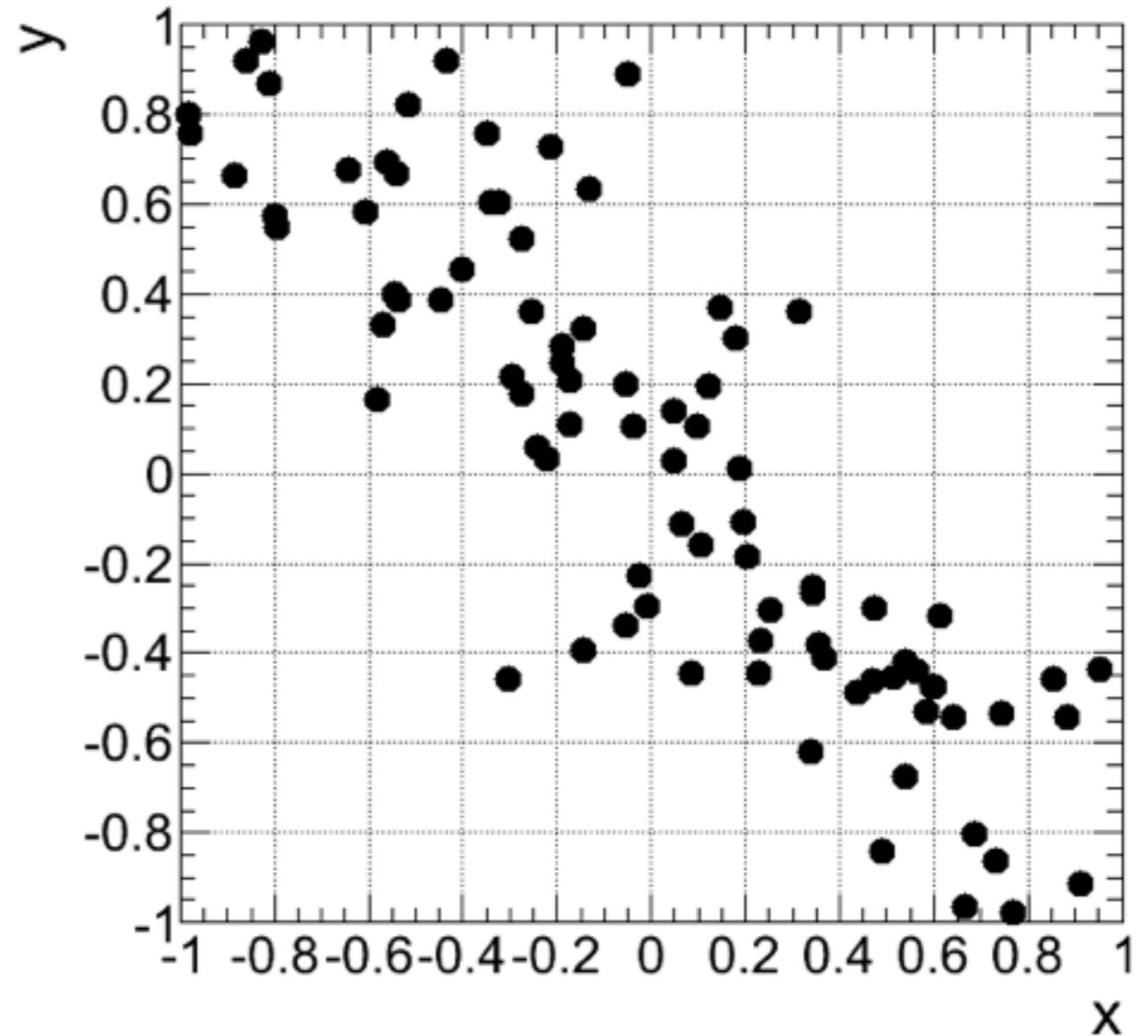
➔ $\sigma_{xy} > 0$



Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

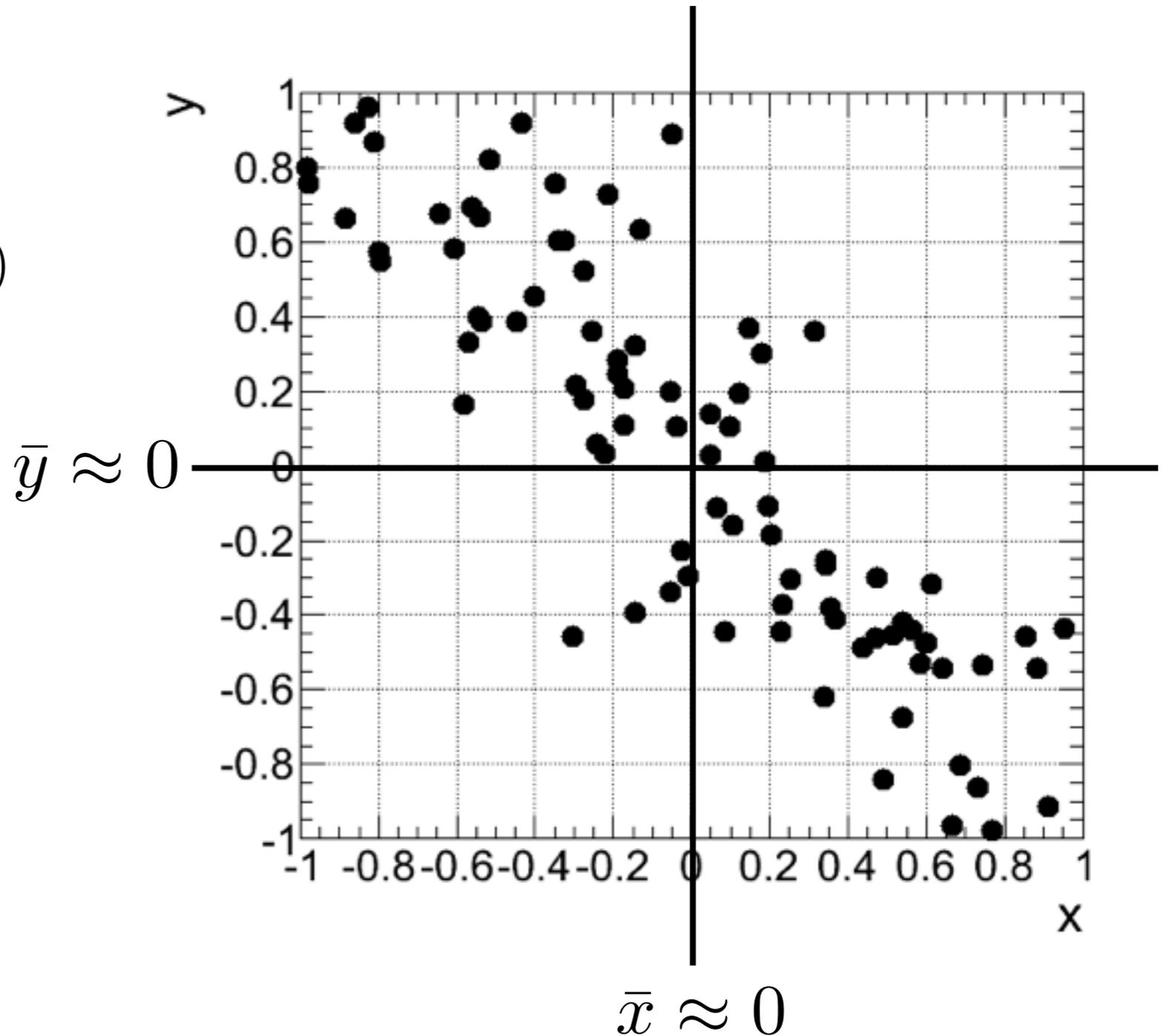
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

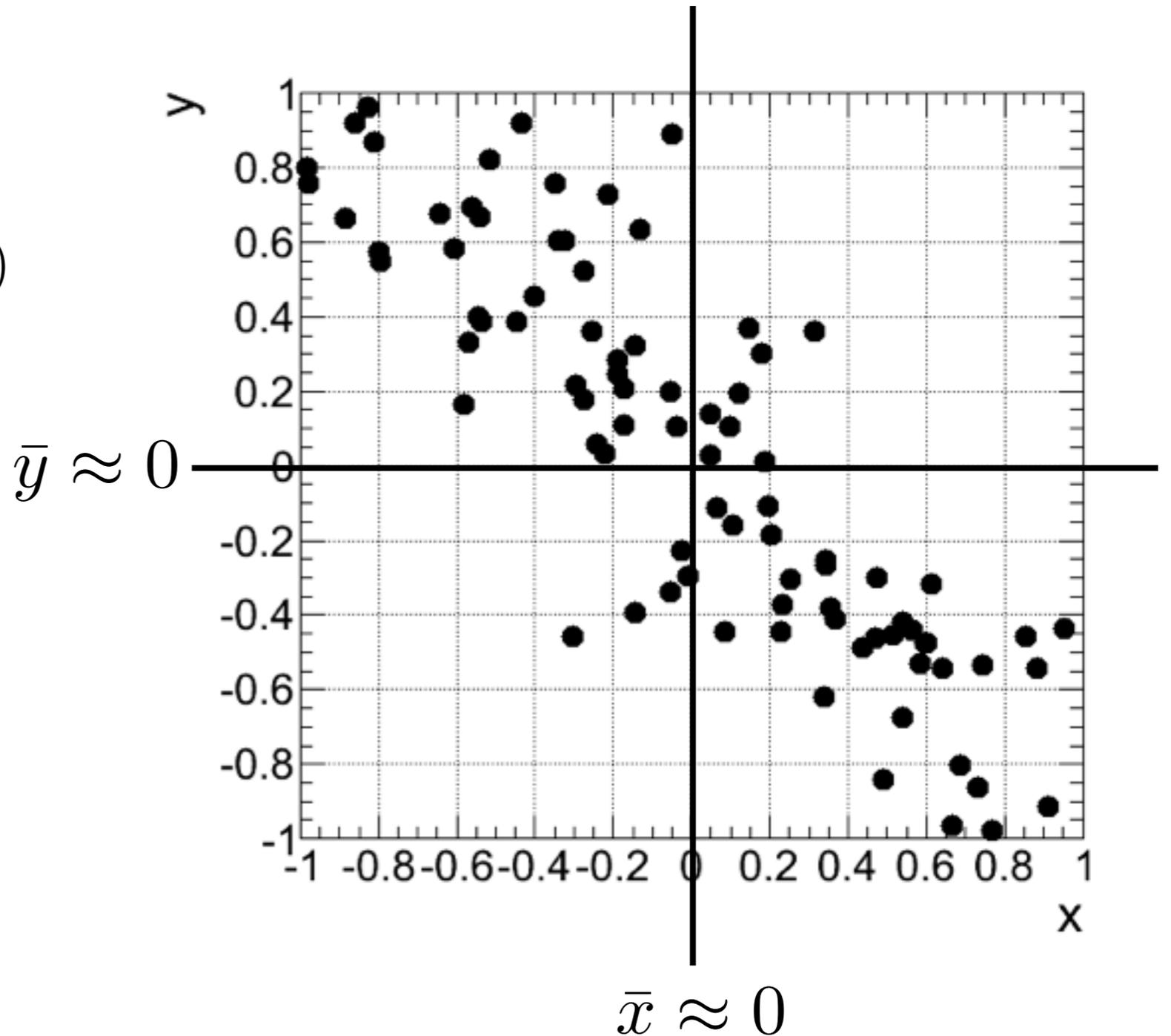


Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

➔ $\sigma_{xy} < 0$



Parâmetros de correlação

i) *Coeficiente de correlação linear de Pearson*: covariância entre duas variáveis, dividida por seus desvios padrão

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq r \leq 1$$

Correlação linear, perfeita e positiva: $r = 1$

Correlação linear, perfeita e negativa: $r = -1$