

Física Geral - Laboratório (2014/1)

Aula 2: Organização e descrição de dados e
parâmetros de dispersão e correlação



Física Geral - Objetivos

Ao final do período, o aluno deverá ser capaz de compreender as principais características do método científico; realizar medições de comprimentos com instrumentos de escala direta; construir tabelas e histogramas; caracterizar, do ponto de vista da estatística descritiva, quaisquer conjuntos de medidas diretas; efetuar as operações básicas com vetores e aplicá-las em problemas que envolvem situações simples de equilíbrio mecânico.

Física Geral - 2013/2

Bibliografia:



“Estimativas e Erros em Experimentos de Física”
(EdUERJ)

- *Organizar e descrever conjuntos genéricos de dados (cap 2.);*
- *Estimar erros em medidas diretas (cap. 3) e indiretas (cap. 4)*
- *Determinar parâmetros físicos a partir de ajustes lineares (cap. 4)*

Resumo: conjuntos de dados

Idades dos estudantes:

{18; 19; 18} (anos)

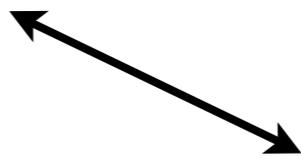
Medidas do comprimento de uma mesa:

{150,3; 152,0; 150,4; 151,8} (cm)

Tipo sanguíneo dos estudantes de FG:

{'O-'; 'A-'; 'O+'}

...



Mesa	Comprimento (cm)
1	150,3
2	152,0
3	150,4
4	151,8

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Para um conjunto de dados (de idades): {10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Para um conjunto de dados (de idades): {10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Escolha 1:

Classe de idades (anos)	Frequências
6	1
7	3
8	3
9	3
10	6
11	1
12	3
13	1
14	2
15	1

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Para um conjunto de dados (de idades): {10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Escolha 1:

Classe de idades (anos)	Frequências
6	1
7	3
8	3
9	3
10	6
11	1
12	3
13	1
14	2
15	1

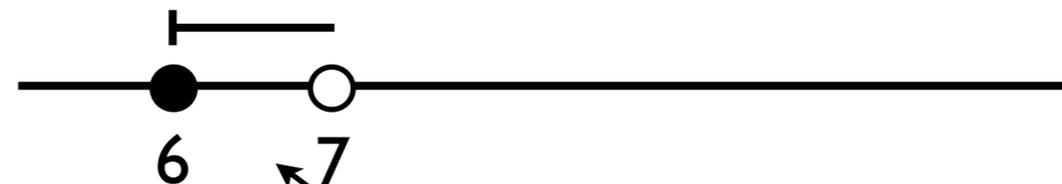


Classe de idades (anos)	Frequências
[6 , 7)	1
[7 , 8)	3
[8 , 9)	3
[9 , 10)	3
[10 , 11)	6
[11 , 12)	1
[12 , 13)	3
[13 , 14)	1
[14 , 15)	2
[15 , 16)	1

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Para um conjunto de dados (de idades): $\{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8\}$ (anos)

Escolha 1:



Classe de idades (anos)	Frequências
6	1
7	3
8	3
9	3
10	6
11	1
12	3
13	1
14	2
15	1

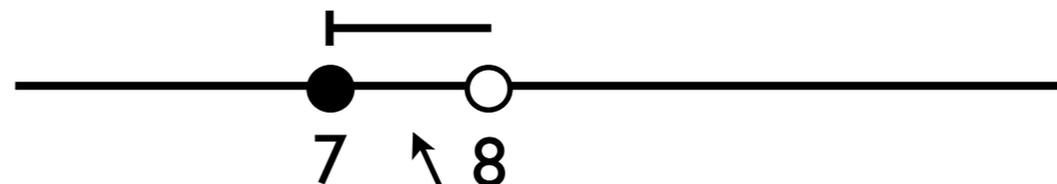


Classe de idades (anos)	Frequências
[6 , 7)	1
[7 , 8)	3
[8 , 9)	3
[9 , 10)	3
[10 , 11)	6
[11 , 12)	1
[12 , 13)	3
[13 , 14)	1
[14 , 15)	2
[15 , 16)	1

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Para um conjunto de dados (de idades): $\{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8\}$ (anos)

Escolha 1:



Classe de idades (anos)	Frequências
6	1
7	3
8	3
9	3
10	6
11	1
12	3
13	1
14	2
15	1



Classe de idades (anos)	Frequências
[6 , 7)	1
[7 , 8)	3
[8 , 9)	3
[9 , 10)	3
[10 , 11)	6
[11 , 12)	1
[12 , 13)	3
[13 , 14)	1
[14 , 15)	2
[15 , 16)	1

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

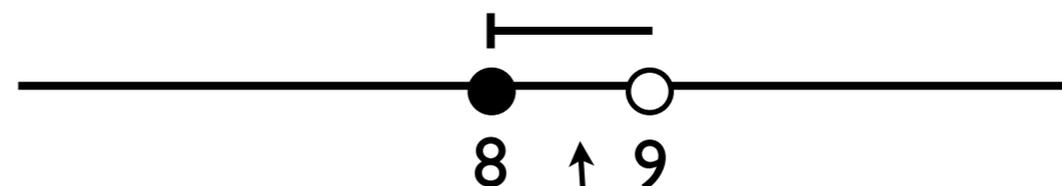
Para um conjunto de dados (de idades): $\{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8\}$ (anos)

Escolha 1:

Classe de idades (anos)	Frequências
6	1
7	3
8	3
9	3
10	6
11	1
12	3
13	1
14	2
15	1



Classe de idades (anos)	Frequências
$[6, 7)$	1
$[7, 8)$	3
$[8, 9)$	3
$[9, 10)$	3
$[10, 11)$	6
$[11, 12)$	1
$[12, 13)$	3
$[13, 14)$	1
$[14, 15)$	2
$[15, 16)$	1



Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Para um conjunto de dados (de idades): $\{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8\}$ (anos)

Escolha 1:

Classe de idades (anos)	Frequências
[6 , 7)	1
[7 , 8)	3
[8 , 9)	3
[9 , 10)	3
[10 , 11)	6
[11 , 12)	1
[12 , 13)	3
[13 , 14)	1
[14 , 15)	2
[15 , 16)	1

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Para um conjunto de dados (de idades): {10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Escolha 1:

Classe de idades (anos)	Frequências
[6 , 7)	1
[7 , 8)	3
[8 , 9)	3
[9 , 10)	3
[10 , 11)	6
[11 , 12)	1
[12 , 13)	3
[13 , 14)	1
[14 , 15)	2
[15 , 16)	1

Escolha 2:

Classe de idades (anos)	Frequência
[6 , 8)	4
[8 , 10)	6
[10 , 12)	7
[12 , 14)	4
[14 , 16)	3

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Conjunto de idades:

{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

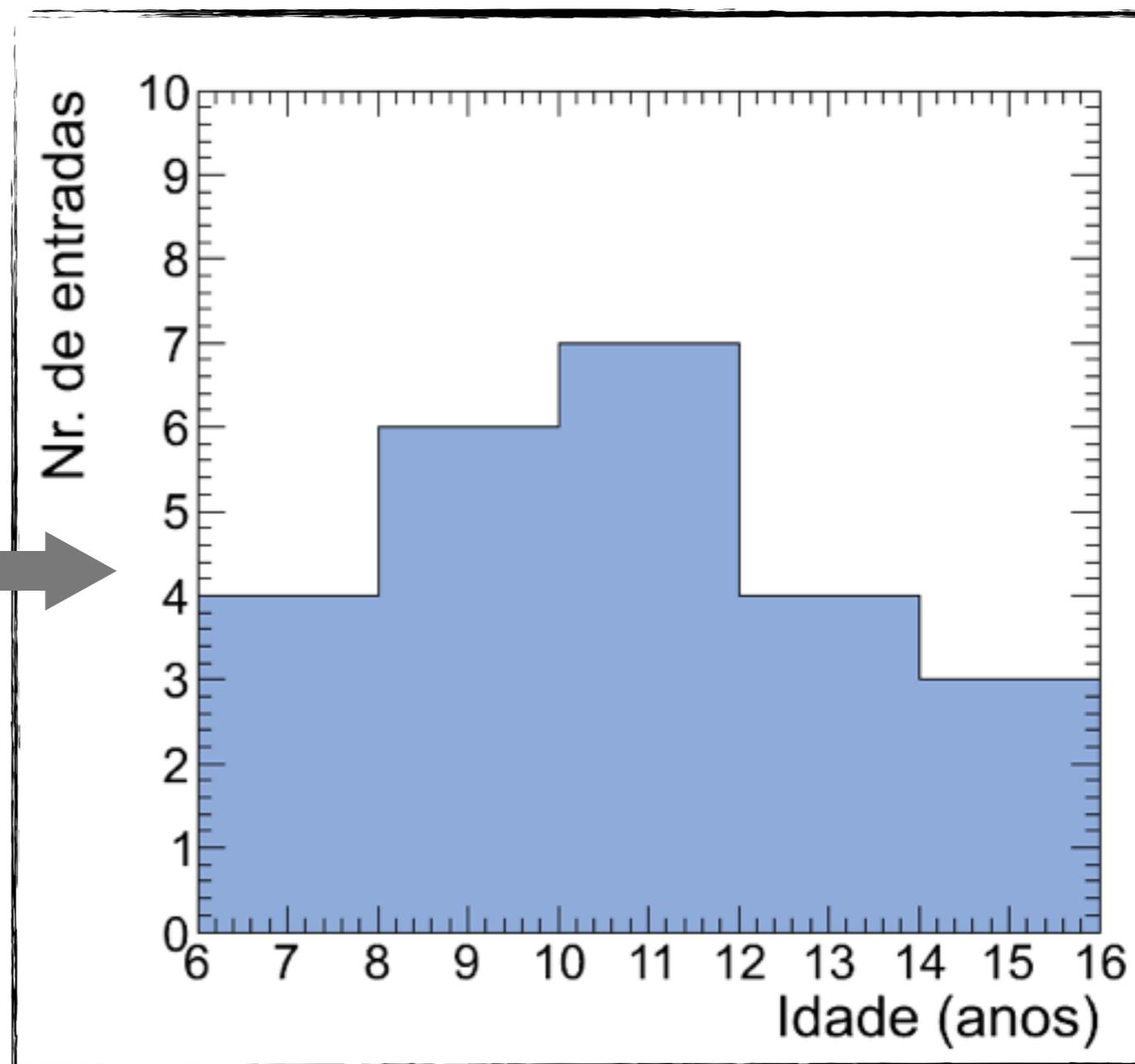
Classe de idades (anos)	Frequência
[6 , 8)	4
[8 , 10)	6
[10 , 12)	7
[12 , 14)	4
[14 , 16)	3

Resumo: organizando conjuntos de dados em Histogramas

Conjunto de idades:

{10, 7, 10, 11, 10, 15, 8, 12, 14, 9, 6, 8, 7, 14, 10, 10, 7, 12, 12, 9, 13, 10, 9, 8} (anos)

Classe de idades (anos)	Frequência
[6 , 8)	4
[8 , 10)	6
[10 , 12)	7
[12 , 14)	4
[14 , 16)	3



Resumo: parâmetros de posição

i) Média:

Valor médio de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Dados em M classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, \dots, n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_M x_M}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M n_j x_j$$

ii) *Moda*: Valor mais frequente de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$

iii) *Média quadrática*:

$$x_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

iv) *Mediana* (Mesma quantidade de dados abaixo e acima da mediana):

$$N(\text{ímpar}) \rightarrow x_{\text{med}} = x_{(N+1)/2}$$
$$N(\text{par}) \rightarrow x_{\text{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

Resumo: parâmetros de dispersão

Resumo: parâmetros de dispersão

i) *Amplitude*: Diferença entre os valores máximo e mínimo de uma coleção de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

Resumo: parâmetros de dispersão

i) *Amplitude*: Diferença entre os valores máximo e mínimo de uma coleção de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

ii) *Desvio médio*: Média dos módulos dos desvios, em relação à média

$$\overline{|\delta x|} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta x_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| = \frac{|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N}$$

Resumo: parâmetros de dispersão

i) *Amplitude*: Diferença entre os valores máximo e mínimo de uma coleção de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

ii) *Desvio médio*: Média dos módulos dos desvios, em relação à média

$$\overline{|\delta x|} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta x_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| = \frac{|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N}$$

iii) *Variância*: Média dos quadrados dos desvios (δx_i)

Note que a expressão para a variância pode ser simplificada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Resumo: parâmetros de dispersão

iv) *Desvio padrão*: Raiz quadrada da variância,
ou média quadrática dos desvios

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$



$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

Resumo: parâmetros de dispersão

iv) *Desvio padrão*: Raiz quadrada da variância, ou média quadrática dos desvios

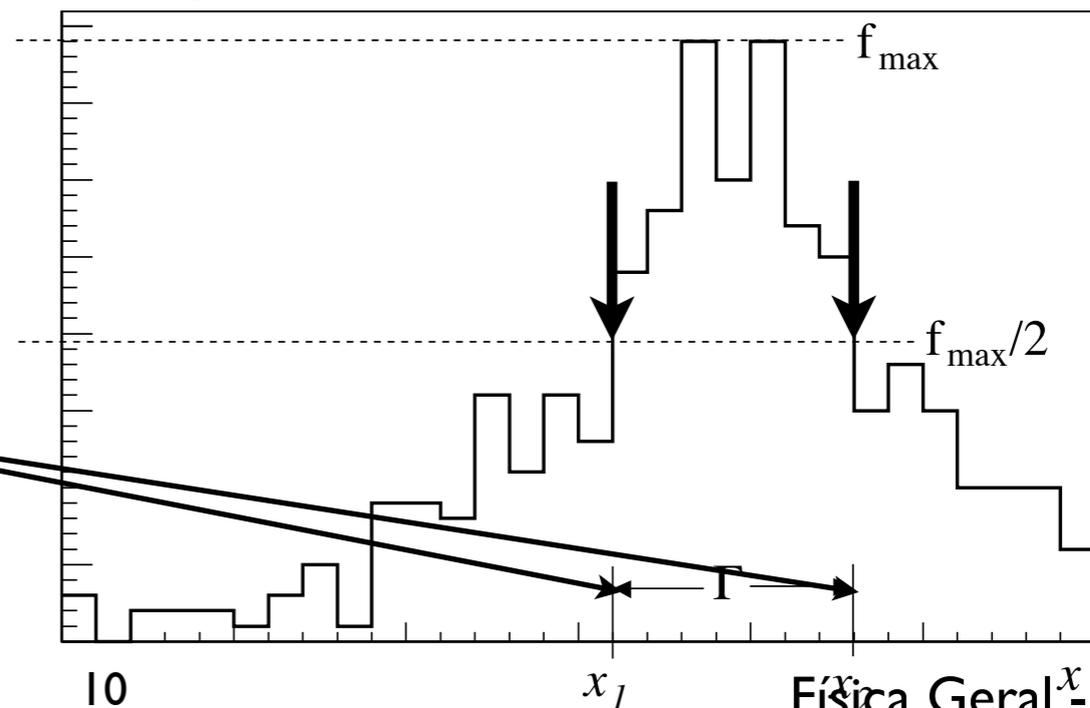
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$

→
$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

v) *Largura a meia altura*: Comprimento do intervalo limitado pelos valores (x_1, x_2) correspondentes à metade da frequência máxima

Símbolo: Γ

$$\Gamma = |x_2 - x_1|$$



Atividade de aula

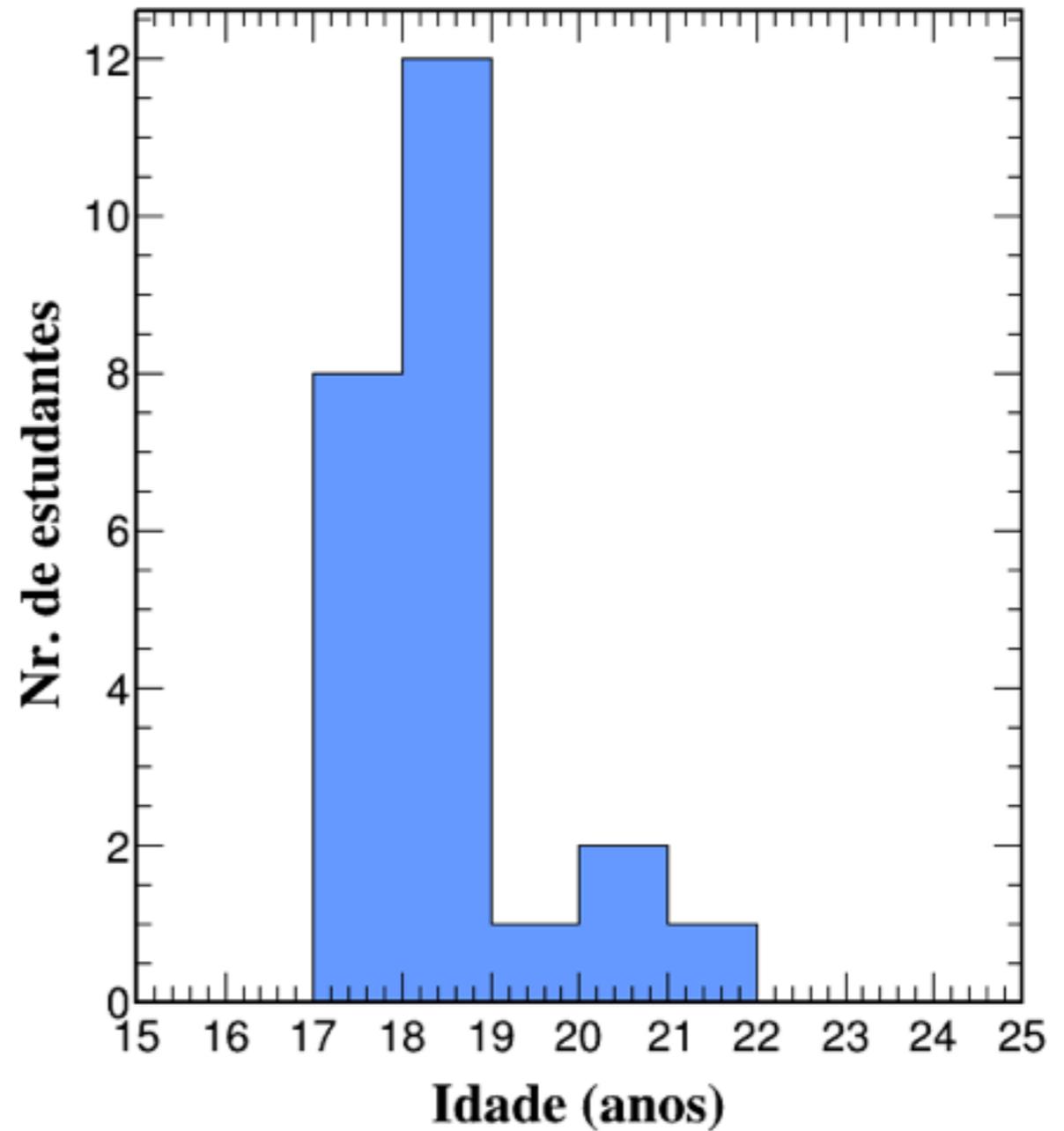
- 1- Obtenha as coleções de dados das idades, massas e alturas de todos os estudantes da turma de Física Geral
- 2- Construa uma tabela com os dados ordenados
- 3- Defina as classes de agrupamento (intervalos) dos dados relativos a cada atributo (idade, massa, altura)
- 4- Construa tabelas com as frequências de cada classe de agrupamento e para cada atributo
- 5- Em um papel milimetrado, construa os histogramas para a partir das tabelas de frequências
- 6- Compute o valor máximo, o valor mínimo, a média, a moda, a média quadrática e a mediana para cada coleção de dados

Atividade - Aula I

Estudante	Idade (anos)	Massa (Kg)	Altura (cm)
1	18	51	175
2	17	78	173
3	18	73	181
4	18	120	181
5	18	62	168
6	21	78	178
7	17	70	158
8	20	65	168
9	19	115	183
10	18	50	160
11	17	62	176
12	17	55	173
13	17	75	181
14	18	58	174
15	18	73	178
16	18	66	174
17	18	65	180
18	17	48	159
19	18	64	173
20	18	75	180
21	18	72	173
22	20	53	162
23	17	76	184
24	17	68	175

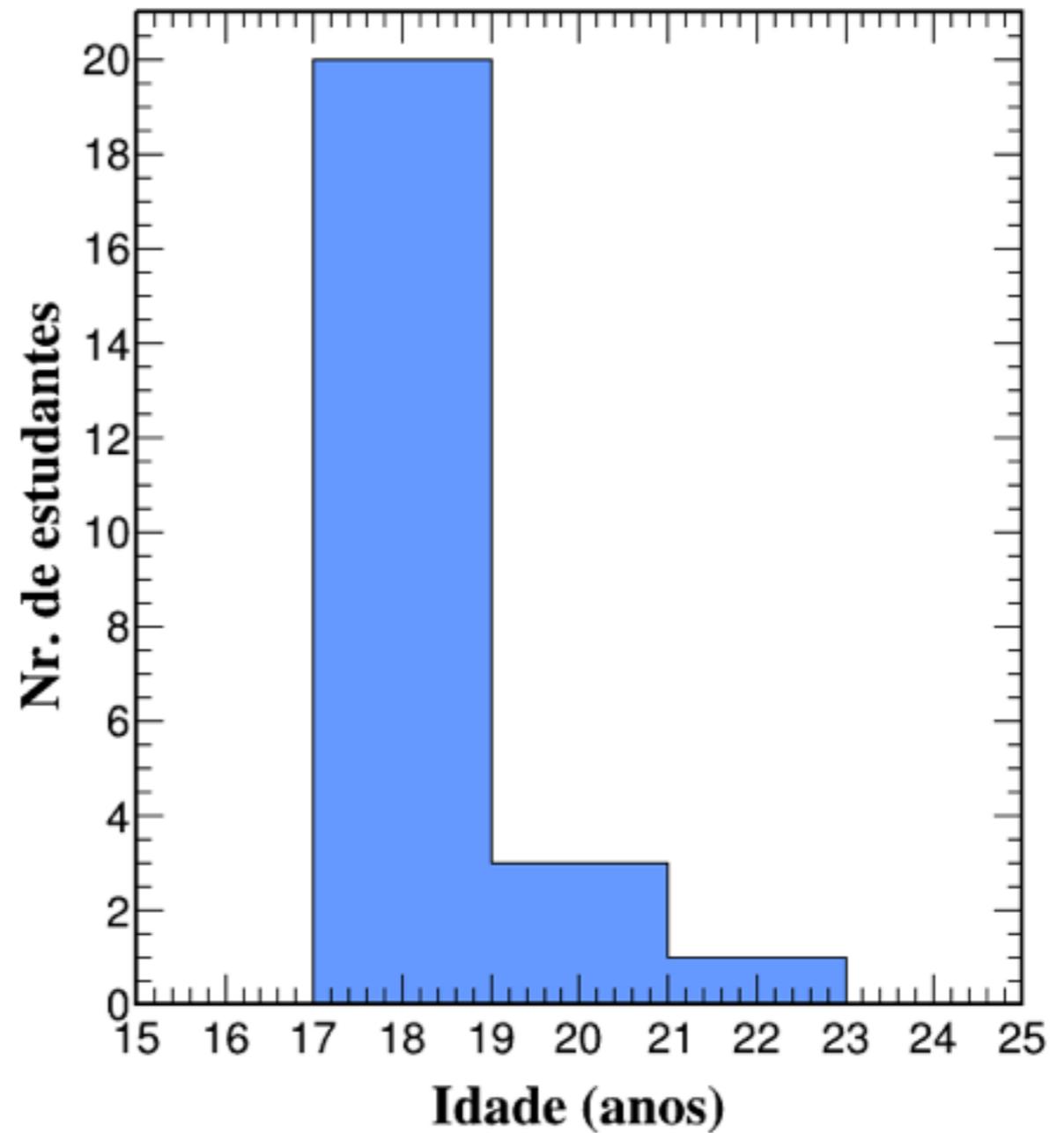
Atividade - Aula 1

Estudante	Idade (anos)
2	17
7	17
11	17
12	17
13	17
18	17
23	17
24	17
1	18
3	18
4	18
5	18
10	18
14	18
15	18
16	18
17	18
19	18
20	18
21	18
9	19
8	20
22	20
6	21



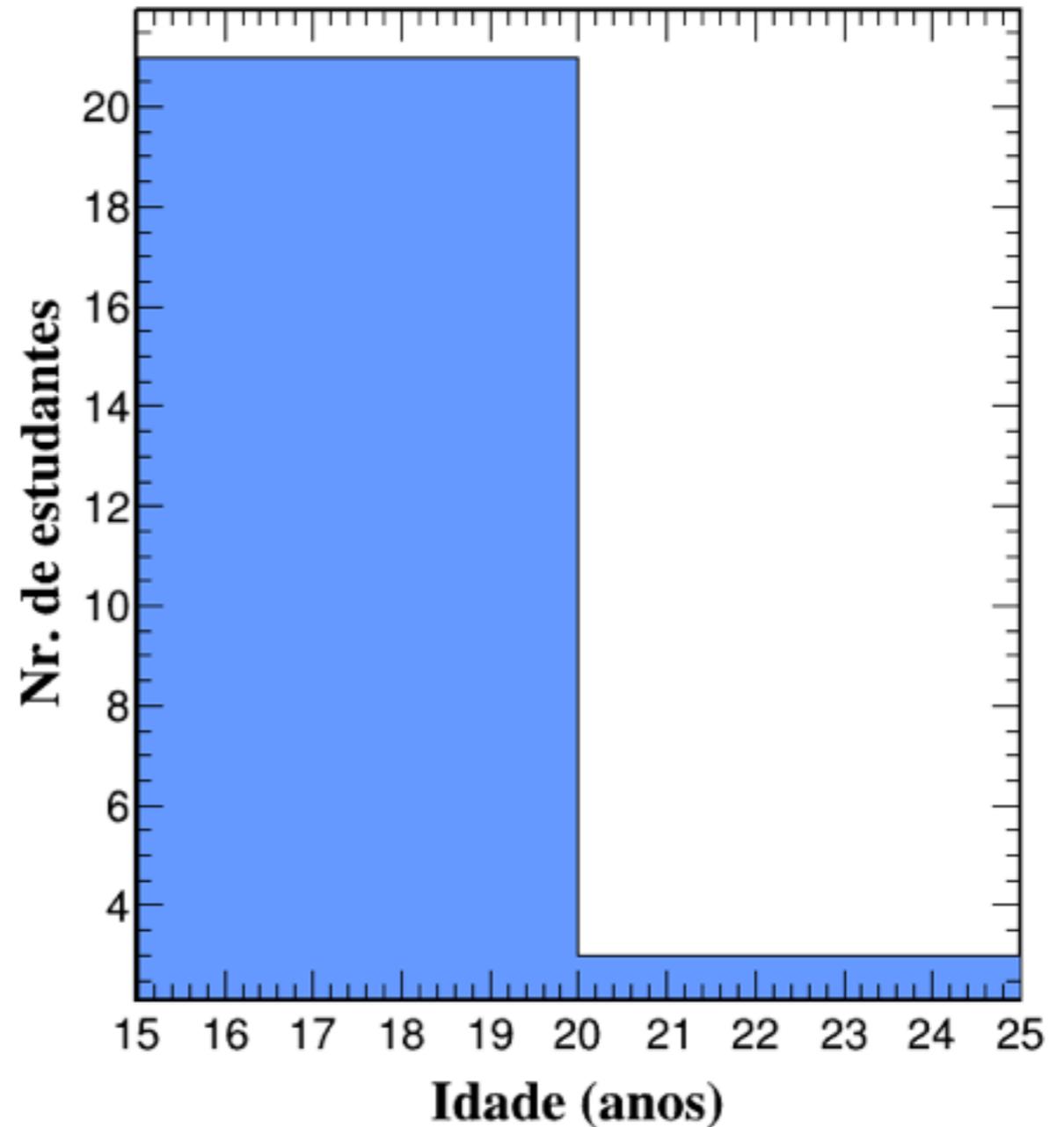
Atividade - Aula 1

Estudante	Idade (anos)
2	17
7	17
11	17
12	17
13	17
18	17
23	17
24	17
1	18
3	18
4	18
5	18
10	18
14	18
15	18
16	18
17	18
19	18
20	18
21	18
9	19
8	20
22	20
6	21



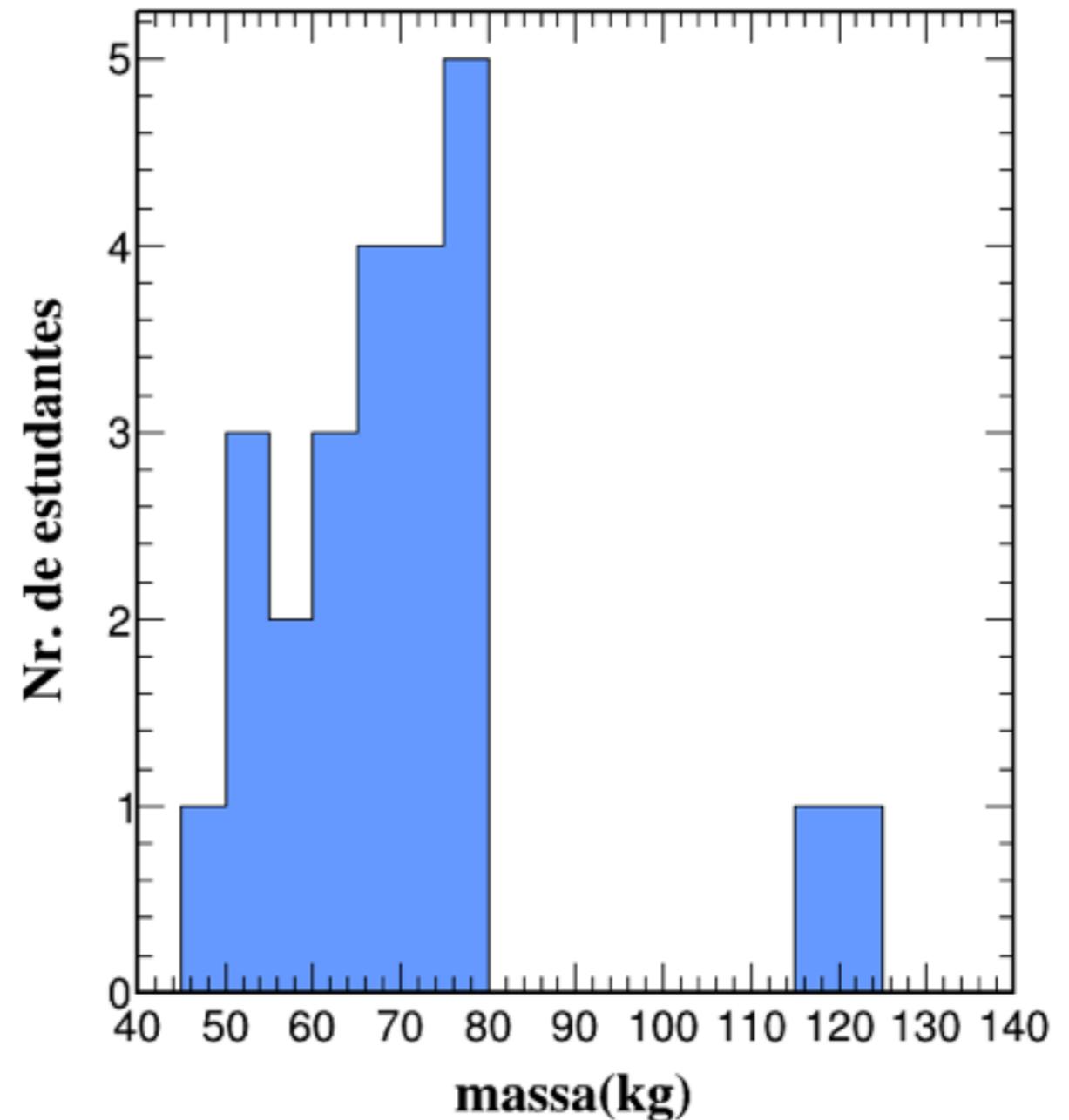
Atividade - Aula 1

Estudante	Idade (anos)
2	17
7	17
11	17
12	17
13	17
18	17
23	17
24	17
1	18
3	18
4	18
5	18
10	18
14	18
15	18
16	18
17	18
19	18
20	18
21	18
9	19
8	20
22	20
6	21



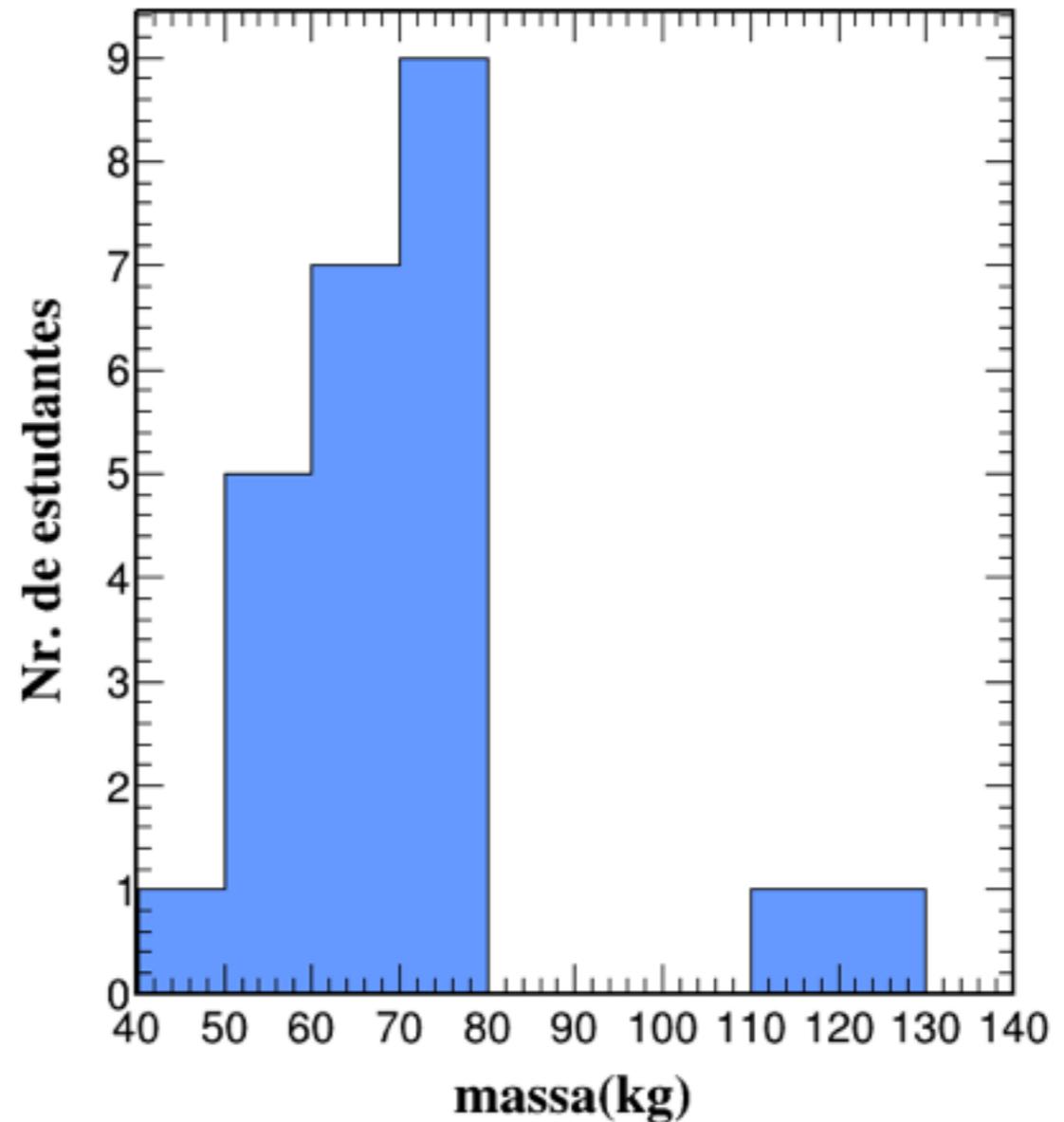
Atividade - Aula 1

Estudante	Massa (Kg)
18	48
10	50
1	51
22	53
12	55
14	58
5	62
11	62
19	64
8	65
17	65
16	66
24	68
7	70
21	72
3	73
15	73
13	75
20	75
23	76
2	78
6	78
9	115
4	120



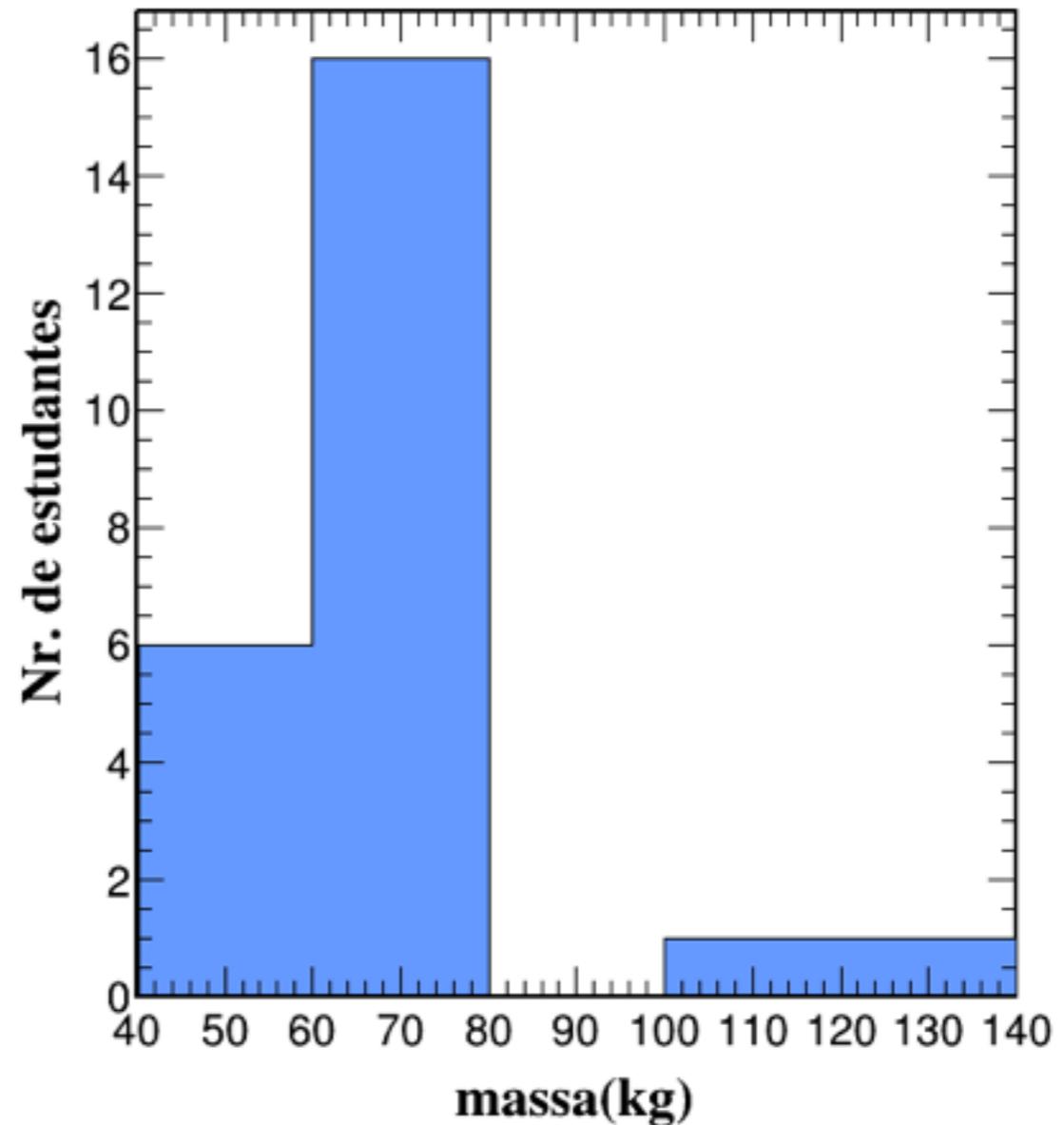
Atividade - Aula 1

Estudante	Massa (Kg)
18	48
10	50
1	51
22	53
12	55
14	58
5	62
11	62
19	64
8	65
17	65
16	66
24	68
7	70
21	72
3	73
15	73
13	75
20	75
23	76
2	78
6	78
9	115
4	120



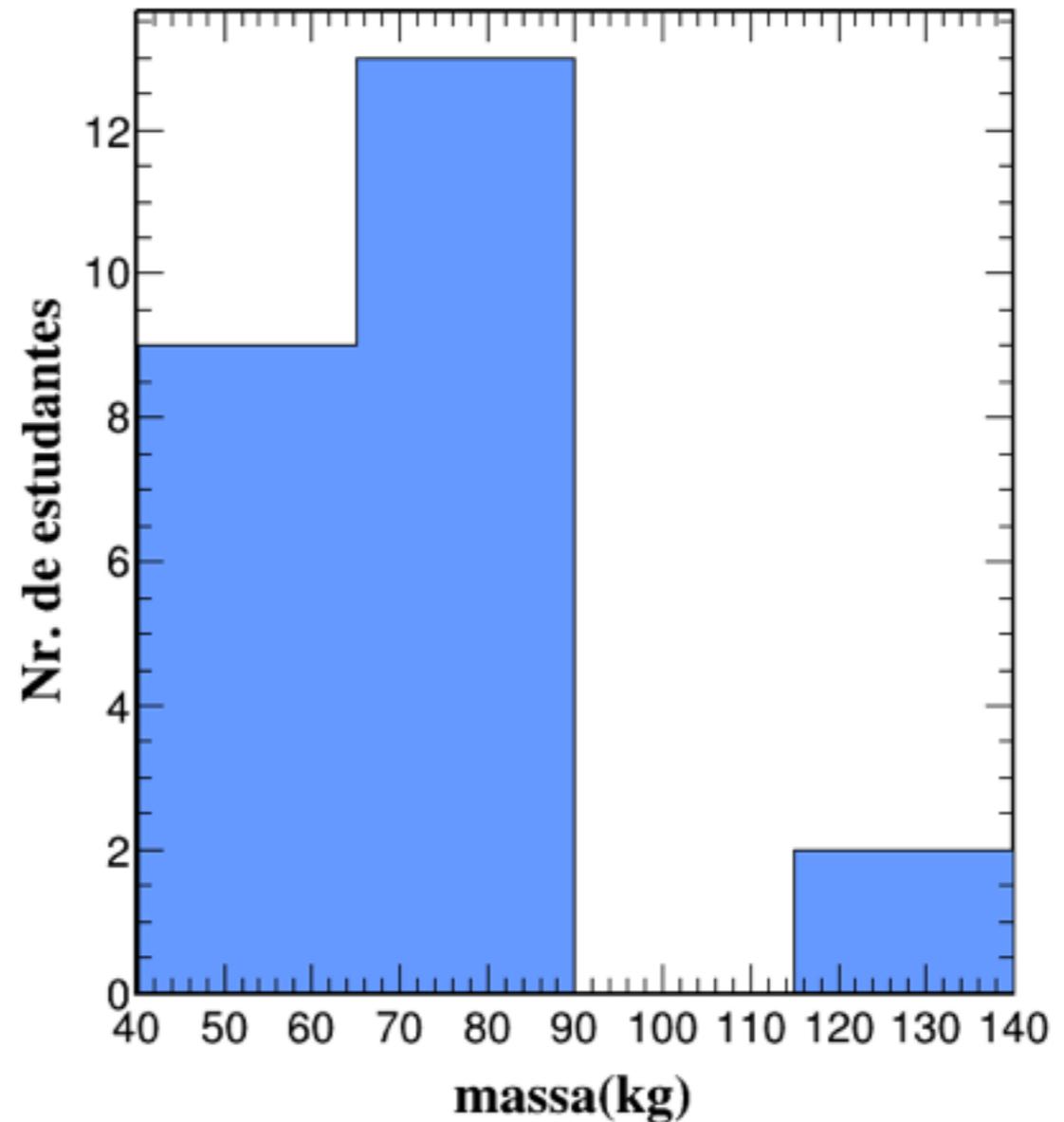
Atividade - Aula 1

Estudante	Massa (Kg)
18	48
10	50
1	51
22	53
12	55
14	58
5	62
11	62
19	64
8	65
17	65
16	66
24	68
7	70
21	72
3	73
15	73
13	75
20	75
23	76
2	78
6	78
9	115
4	120



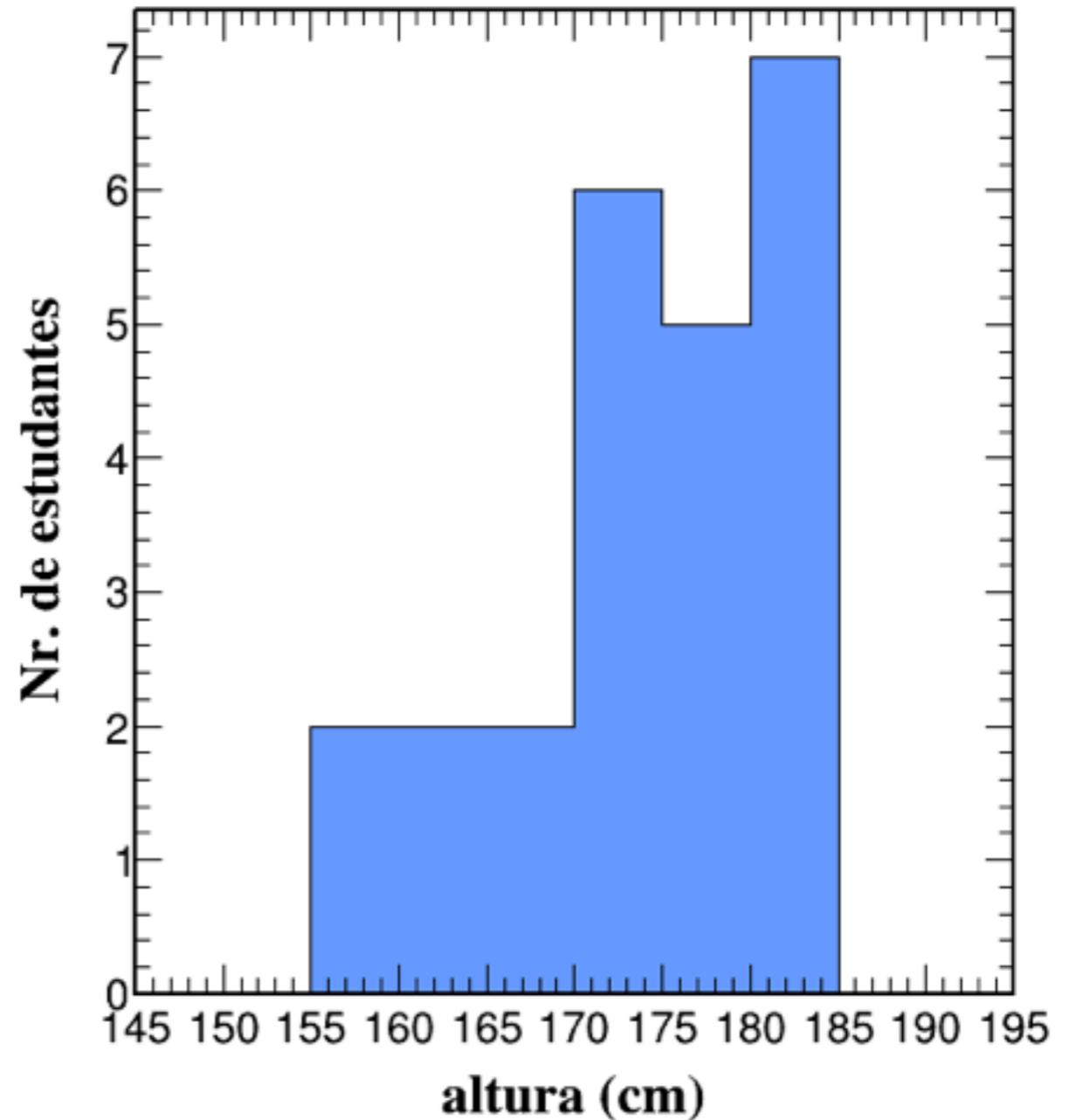
Atividade - Aula 1

Estudante	Massa (Kg)
18	48
10	50
1	51
22	53
12	55
14	58
5	62
11	62
19	64
8	65
17	65
16	66
24	68
7	70
21	72
3	73
15	73
13	75
20	75
23	76
2	78
6	78
9	115
4	120



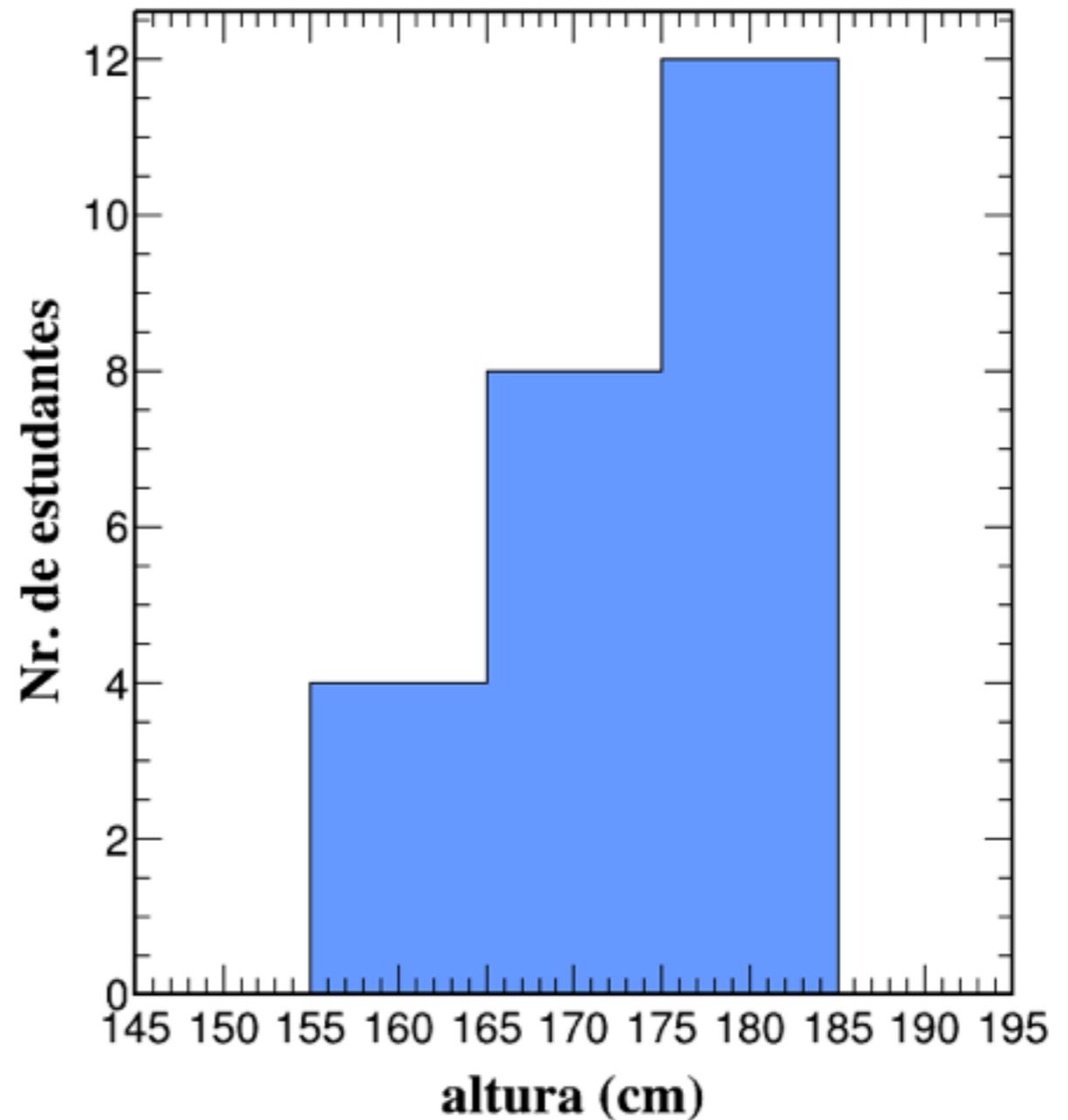
Atividade - Aula 1

Estudante	Altura (cm)
7	158
18	159
10	160
22	162
5	168
8	168
2	173
12	173
19	173
21	173
14	174
16	174
1	175
24	175
11	176
6	178
15	178
17	180
20	180
3	181
4	181
13	181
9	183
23	184



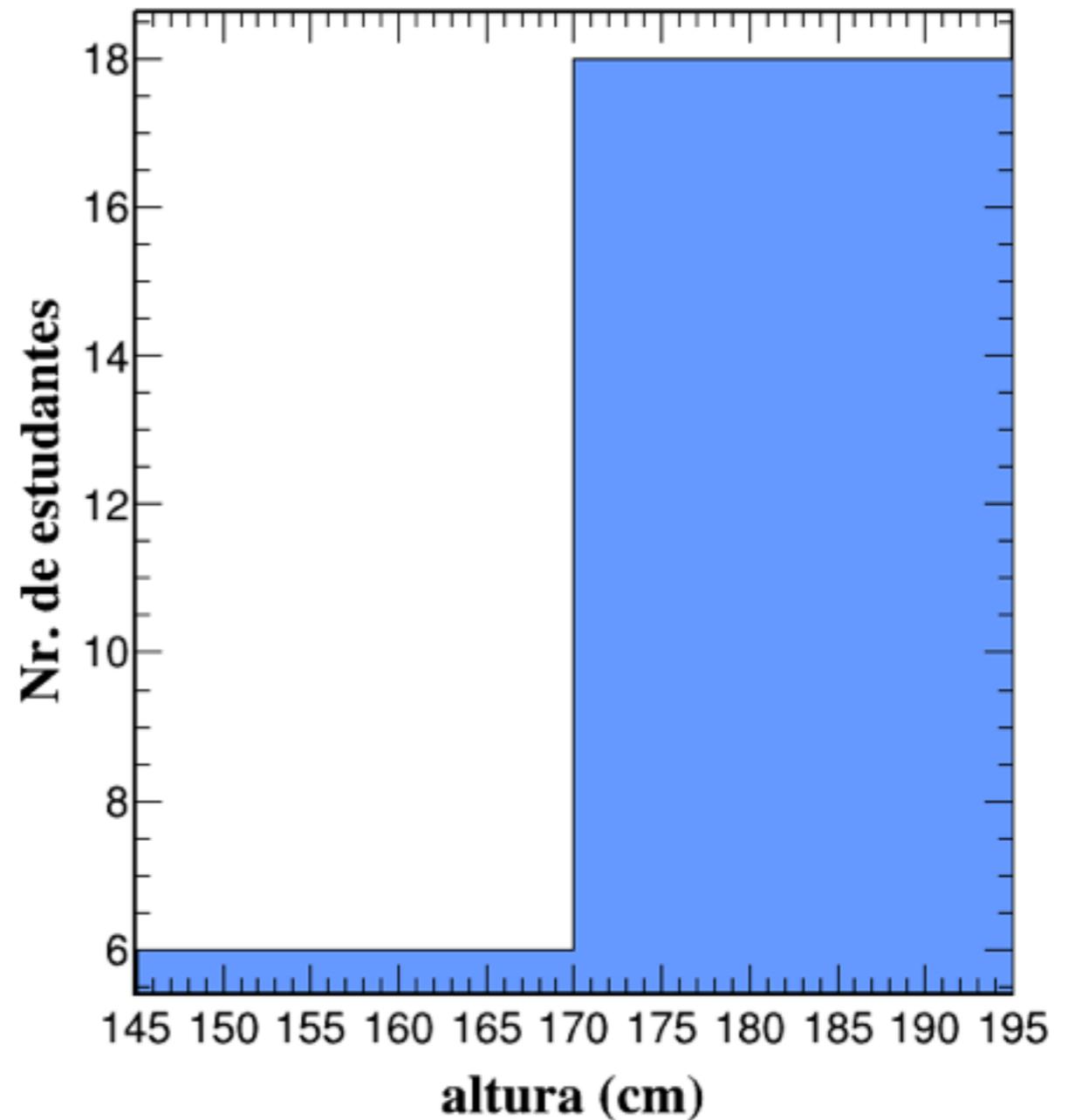
Atividade - Aula 1

Estudante	Altura (cm)
7	158
18	159
10	160
22	162
5	168
8	168
2	173
12	173
19	173
21	173
14	174
16	174
1	175
24	175
11	176
6	178
15	178
17	180
20	180
3	181
4	181
13	181
9	183
23	184



Atividade - Aula 1

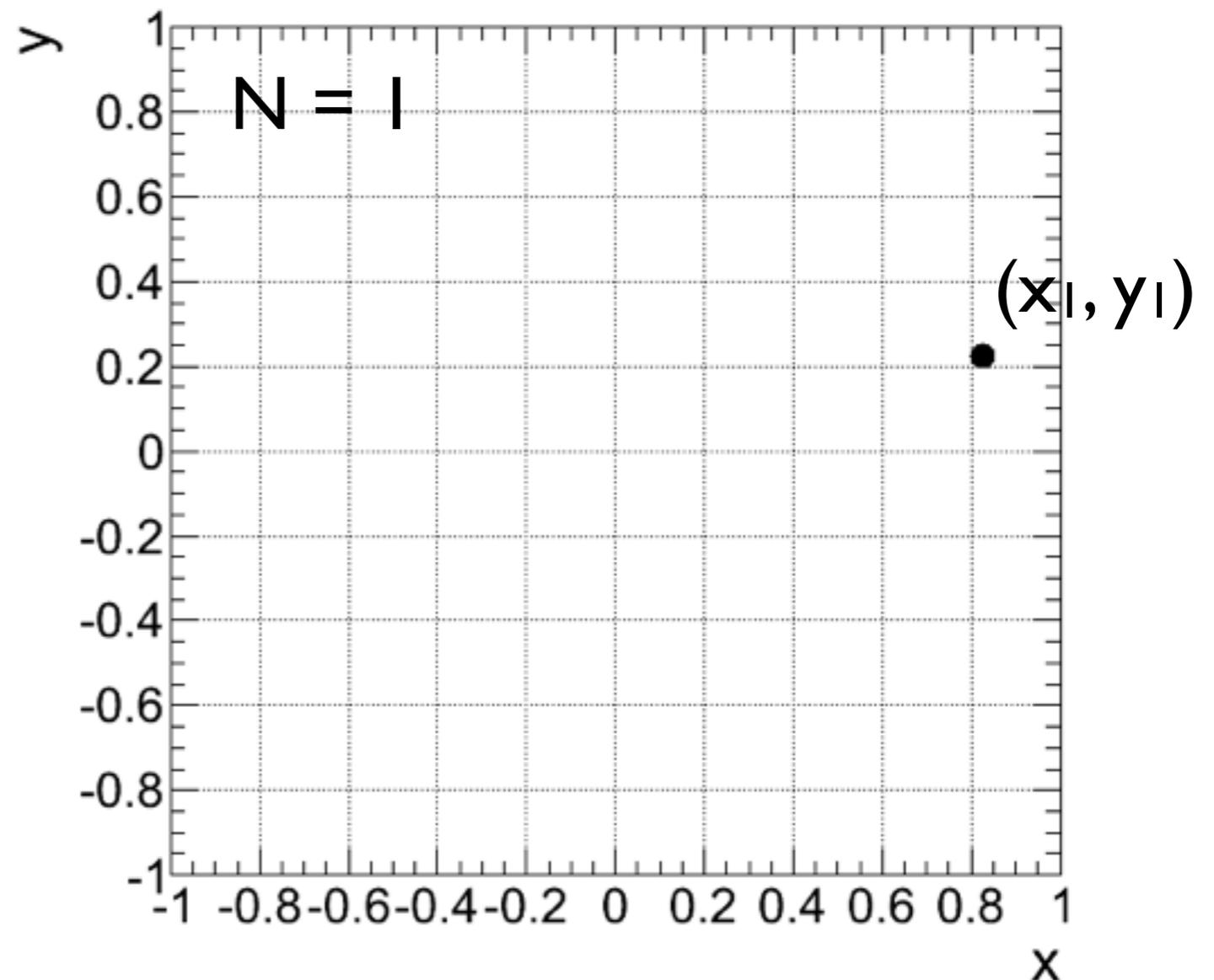
Estudante	Altura (cm)
7	158
18	159
10	160
22	162
5	168
8	168
2	173
12	173
19	173
21	173
14	174
16	174
1	175
24	175
11	176
6	178
15	178
17	180
20	180
3	181
4	181
13	181
9	183
23	184



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

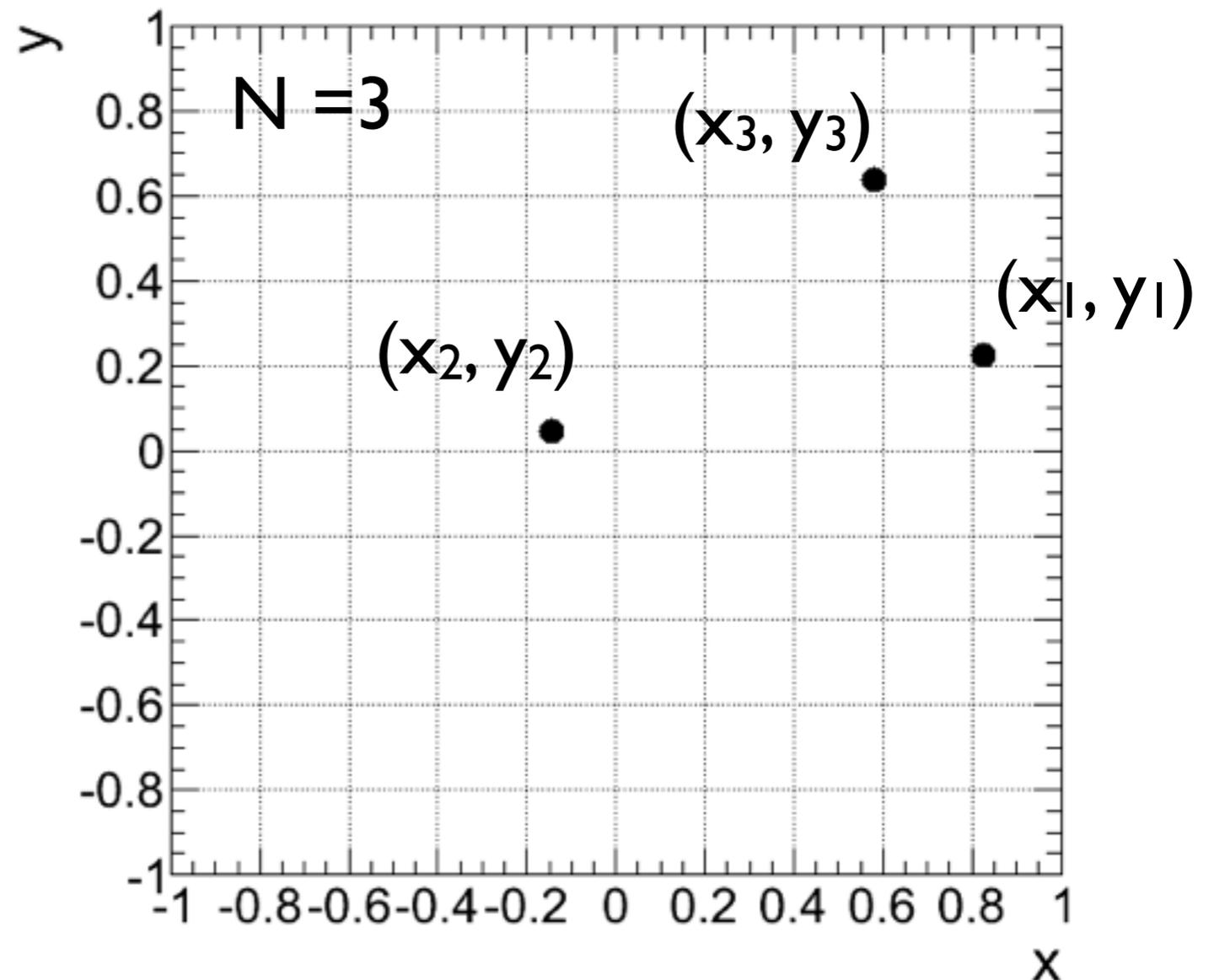
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

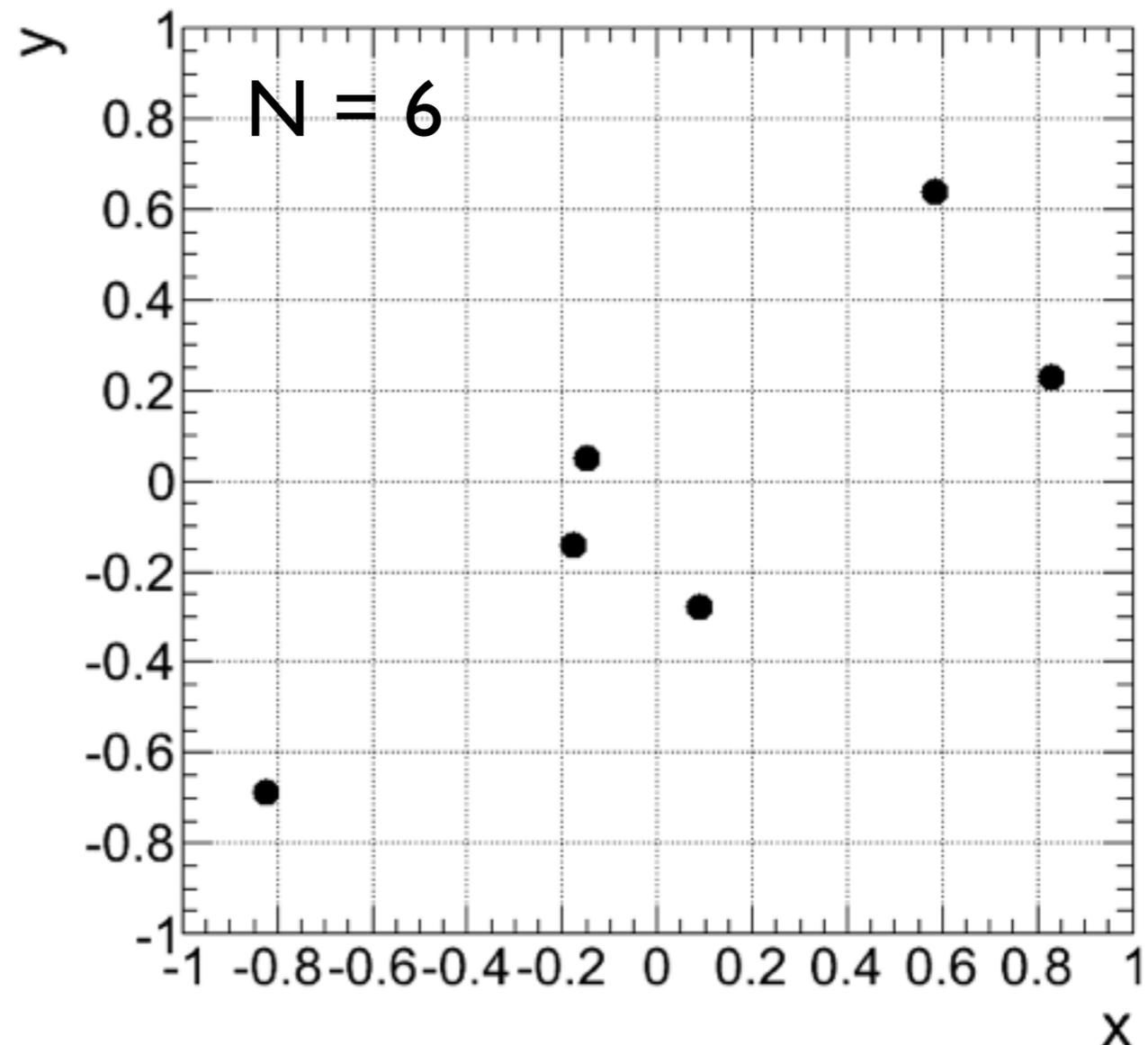
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

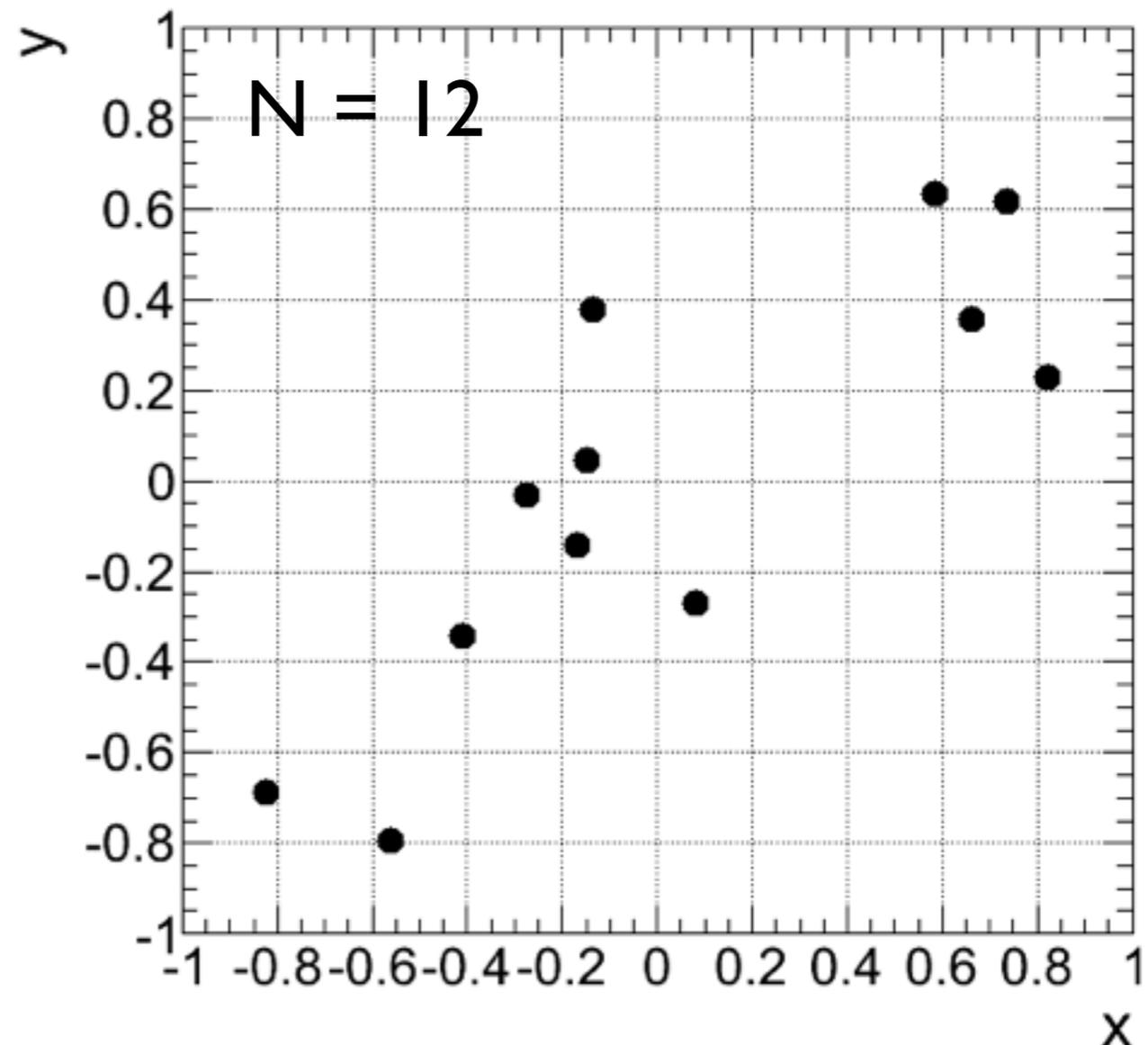
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

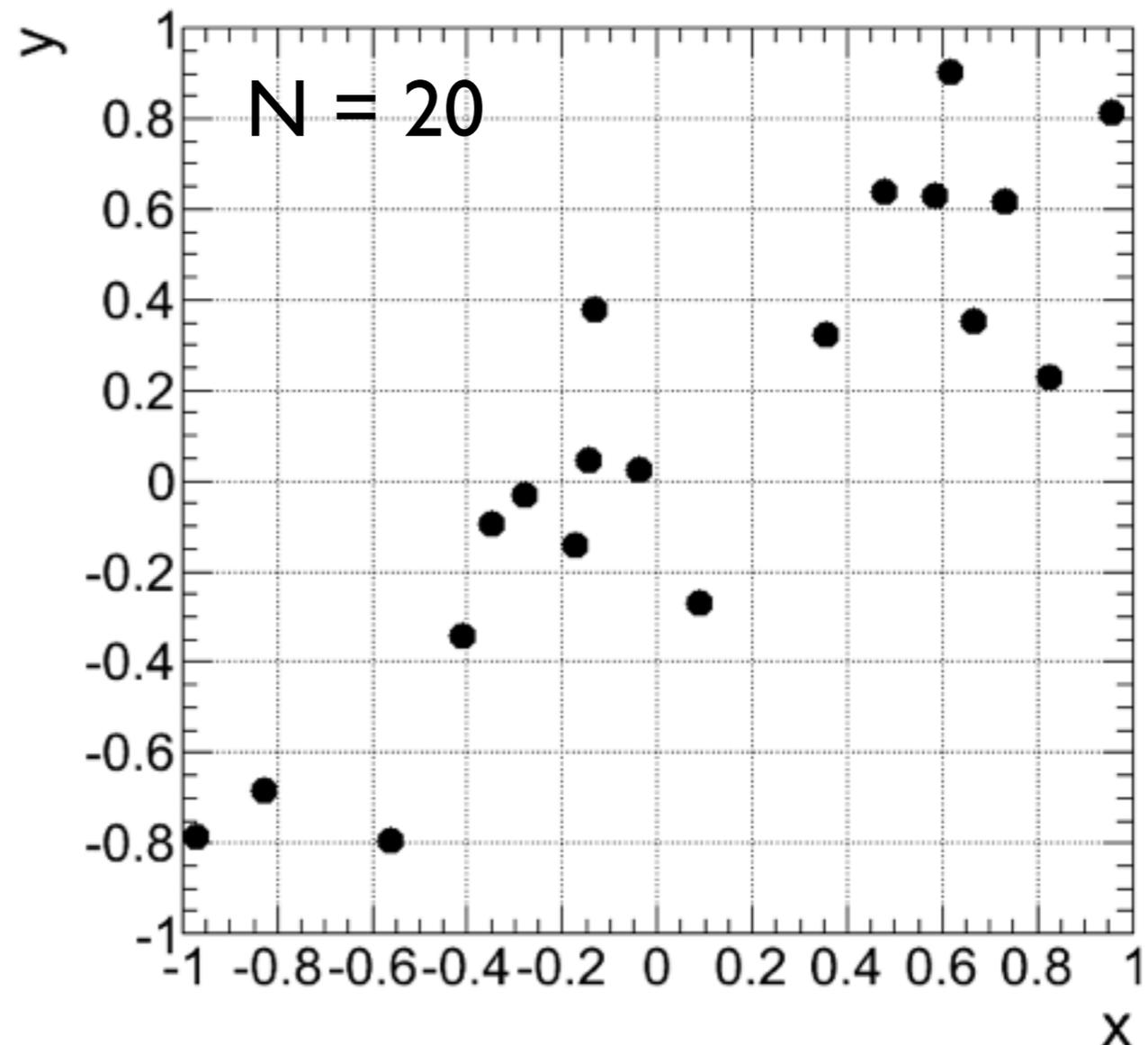
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

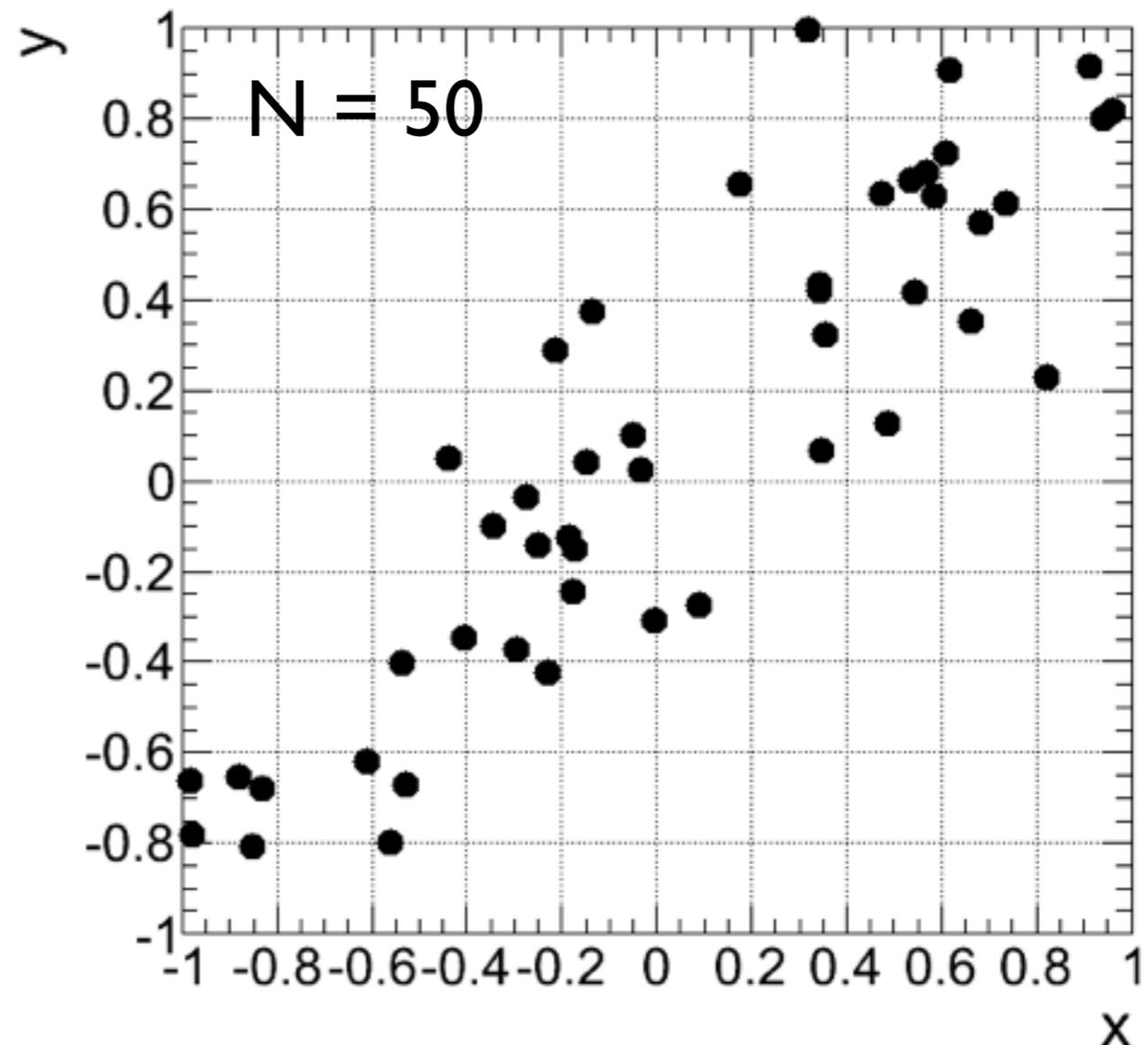
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

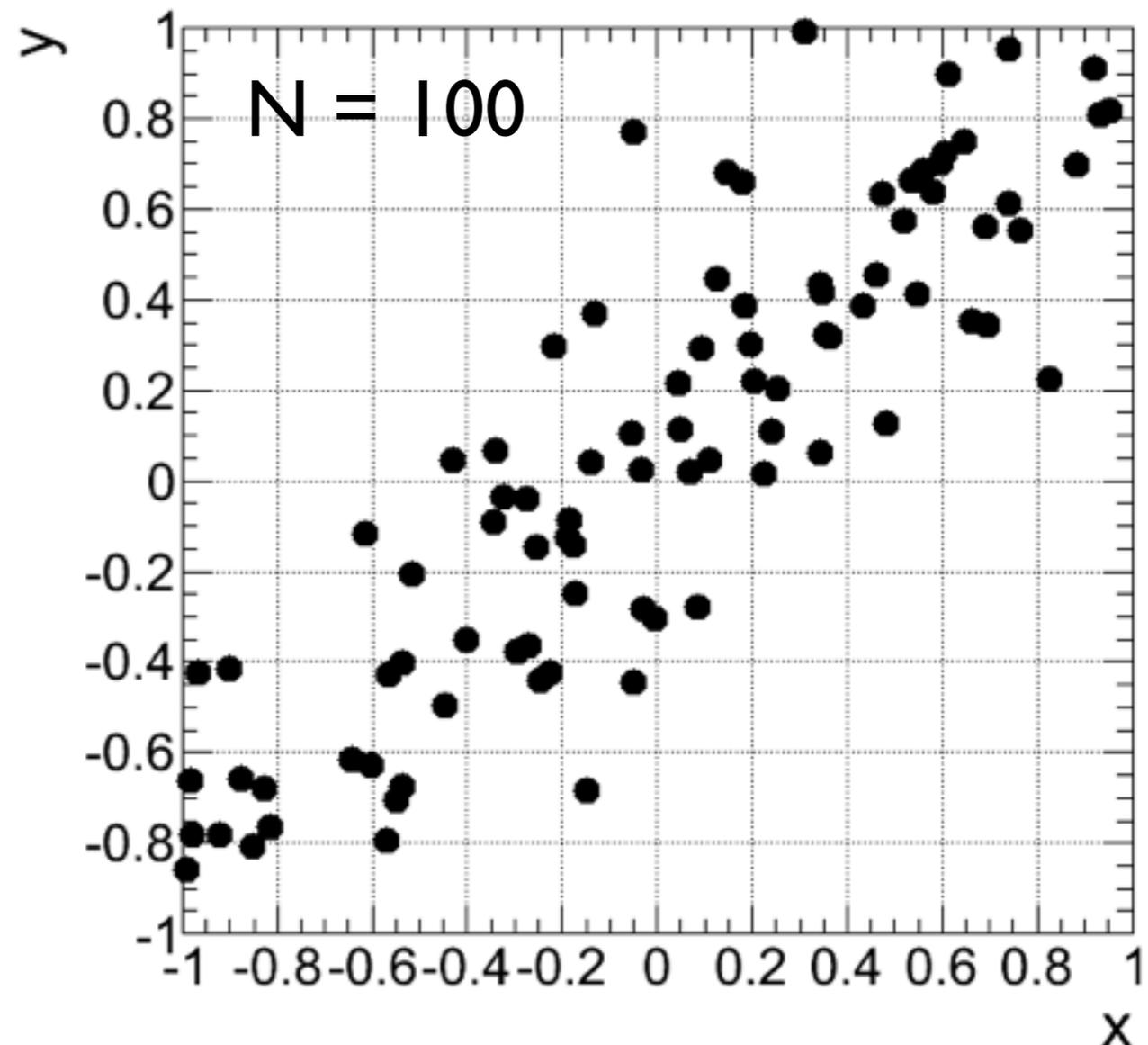
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

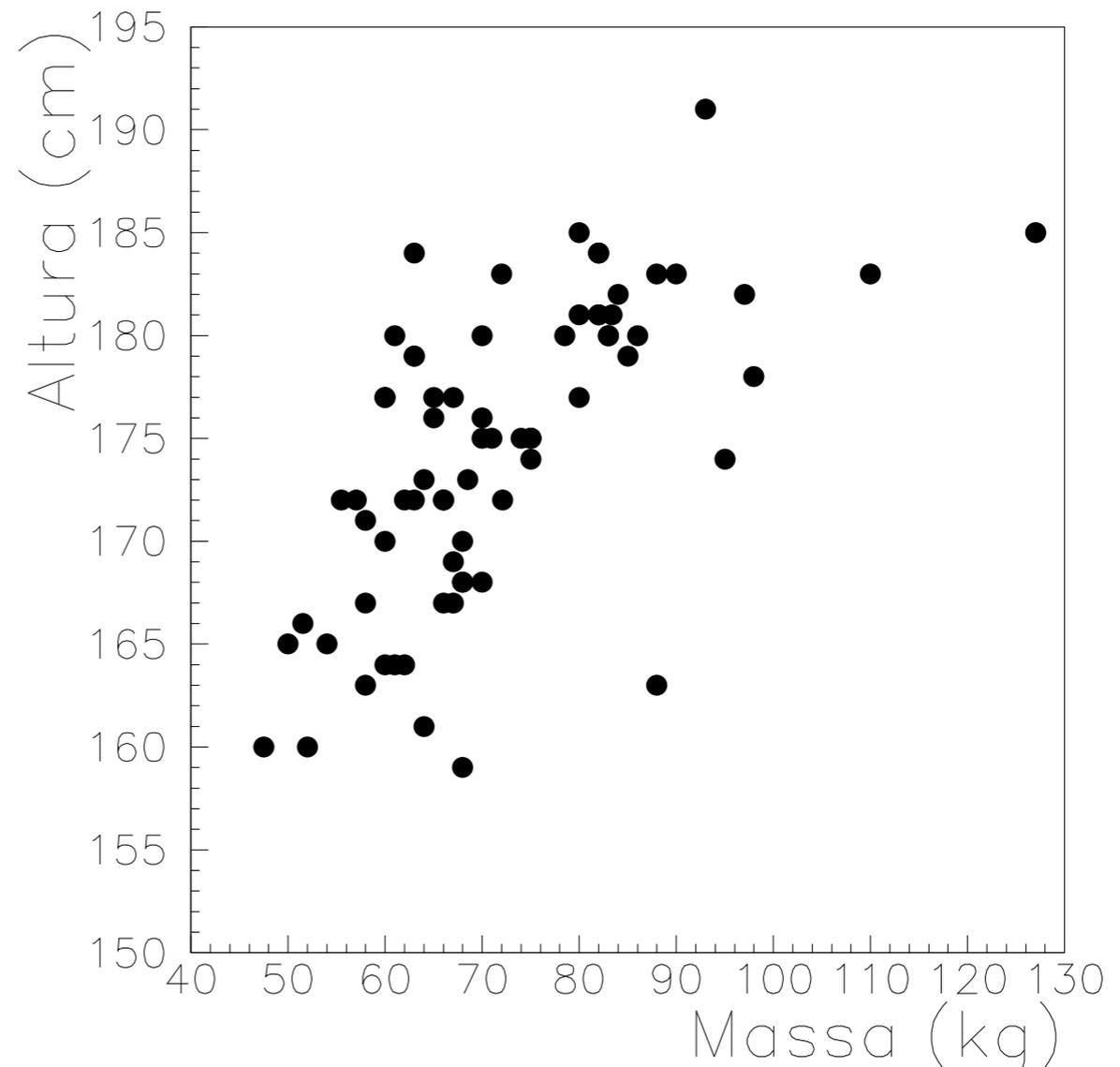
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x, y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

Outro exemplo: dados de altura e massa de uma lista de estudantes:



Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x}) (y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x}) (y_N - \bar{y})}{N}\end{aligned}$$

Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})}{N}\end{aligned}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})}{N}\end{aligned}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

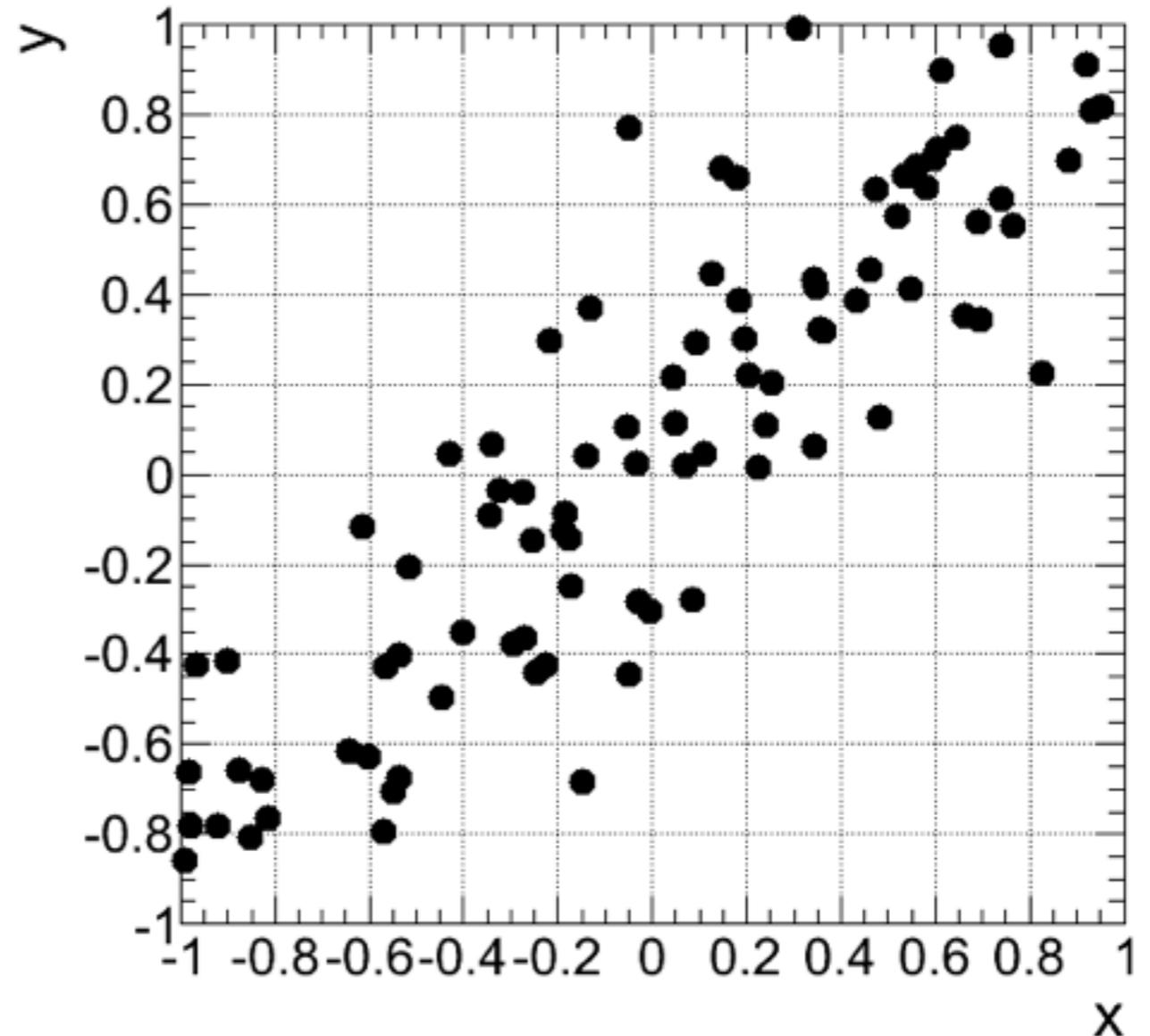
e que não importa a ordem das variáveis:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

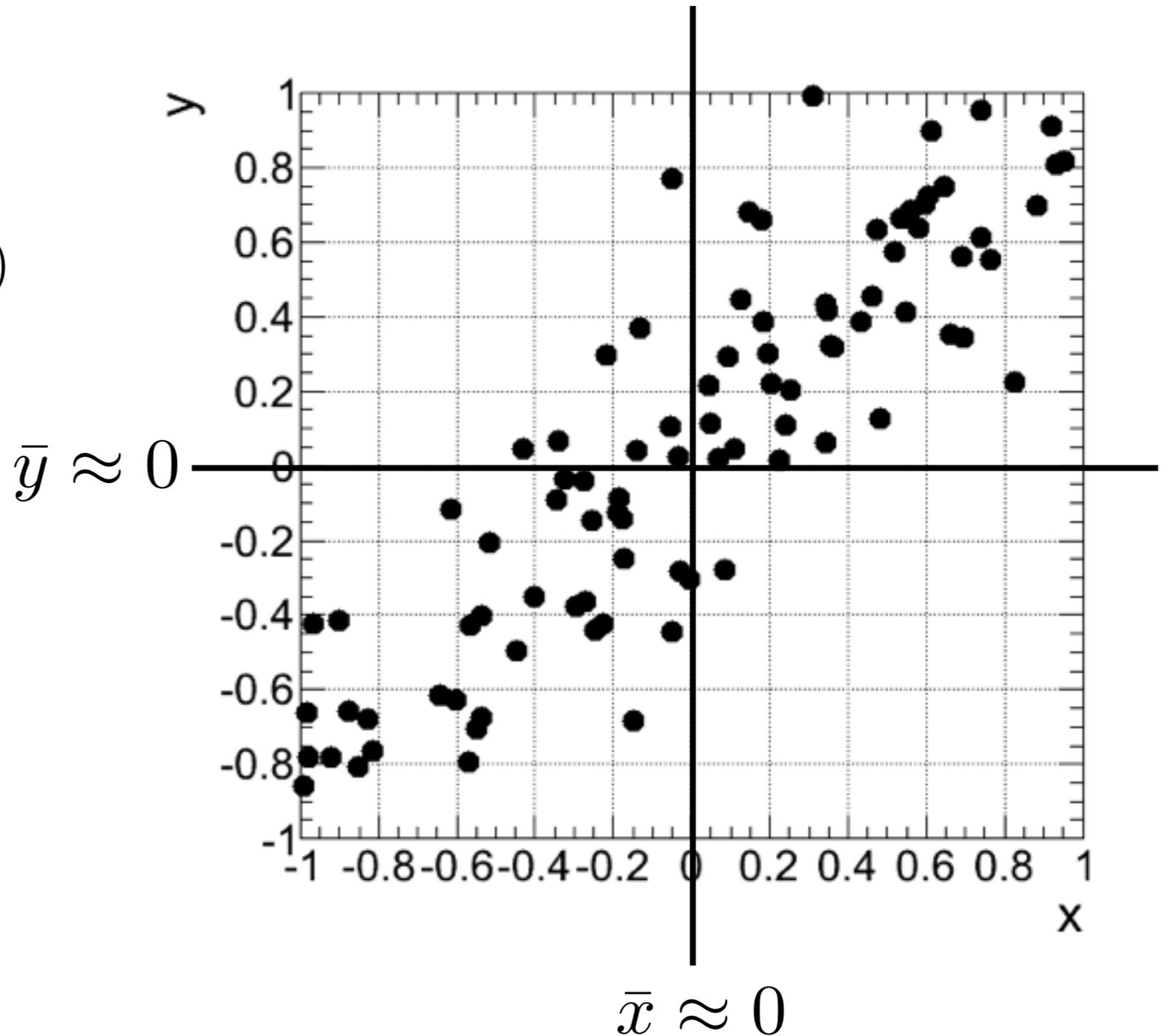
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

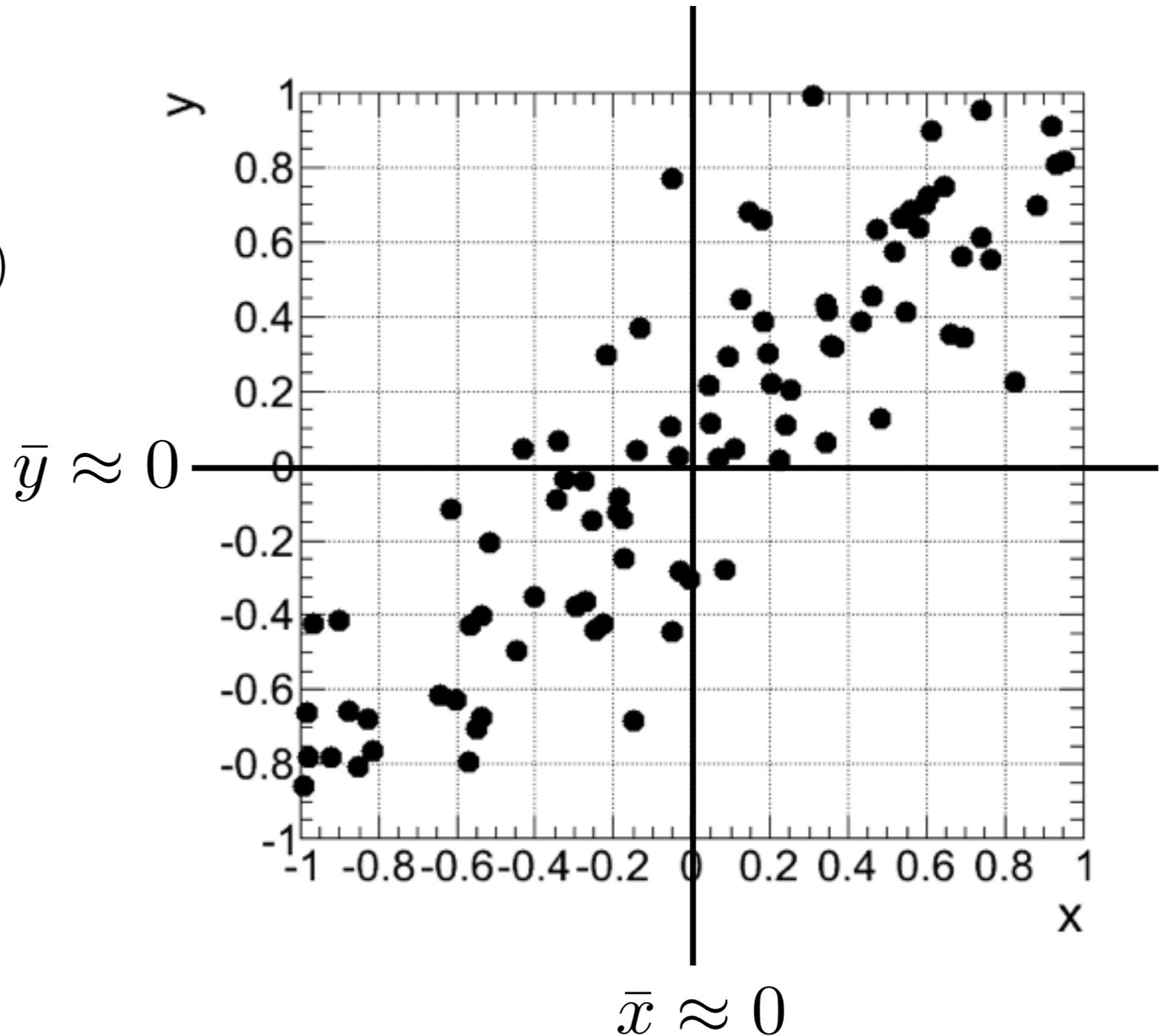


Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

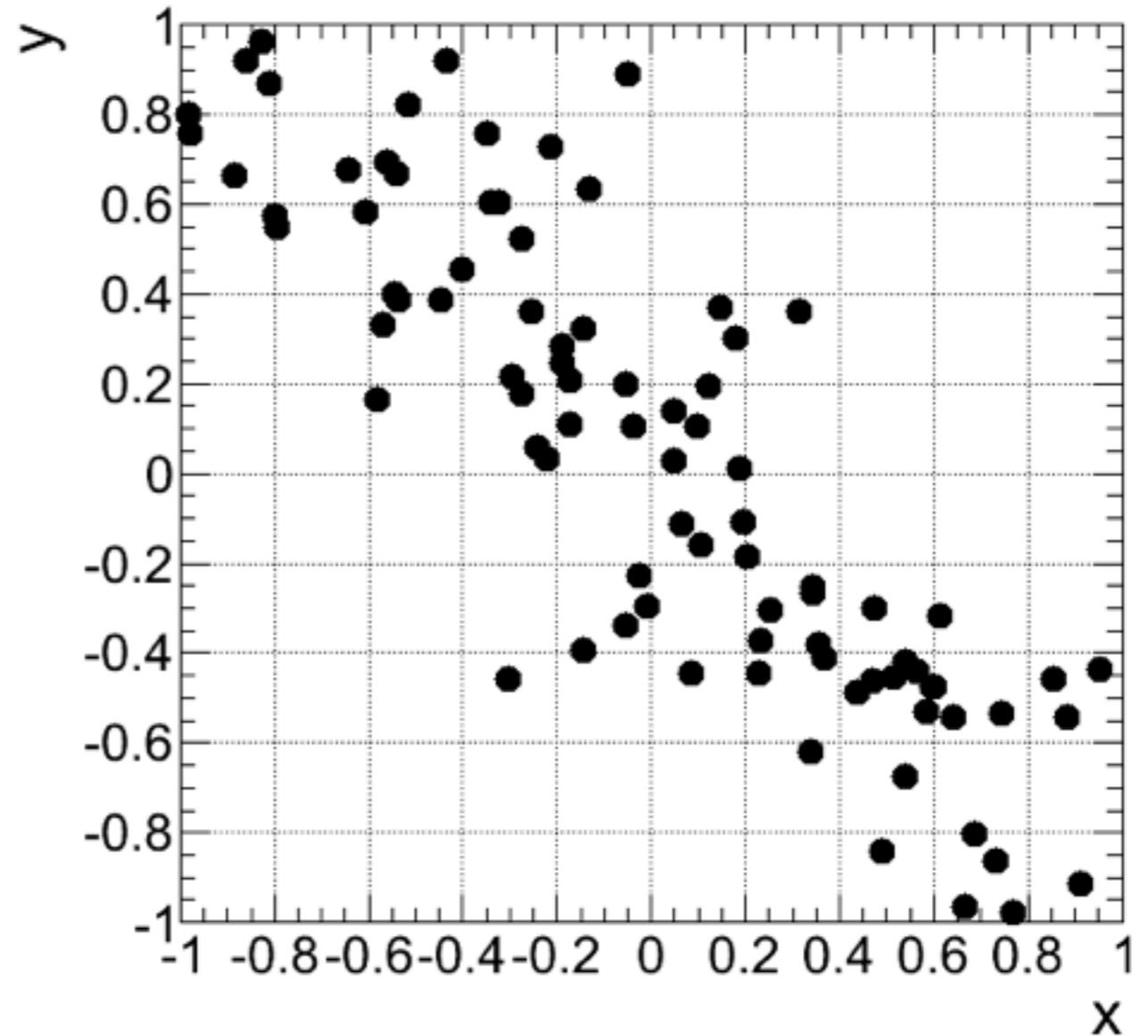
➔ $\sigma_{xy} > 0$



Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

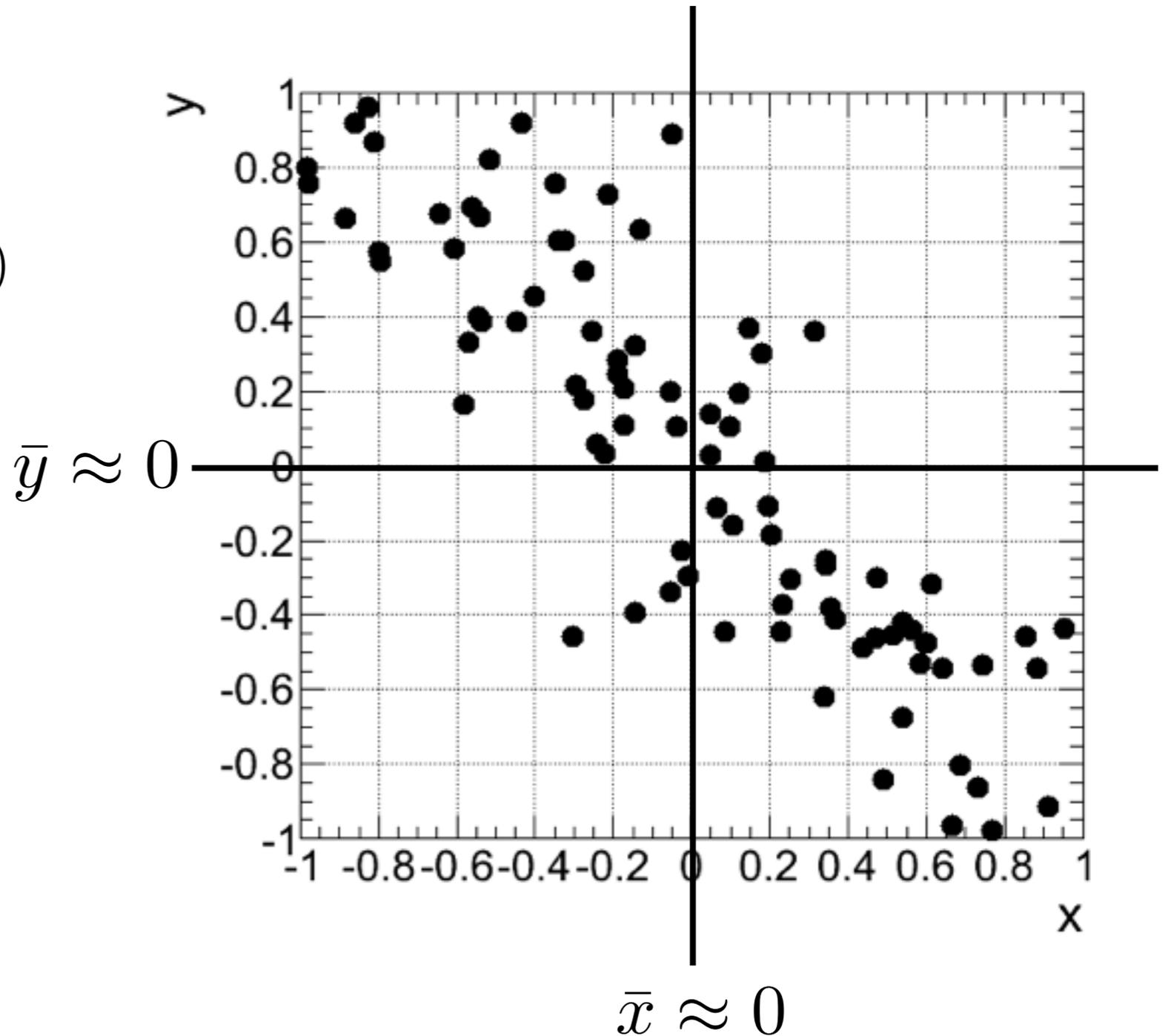
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

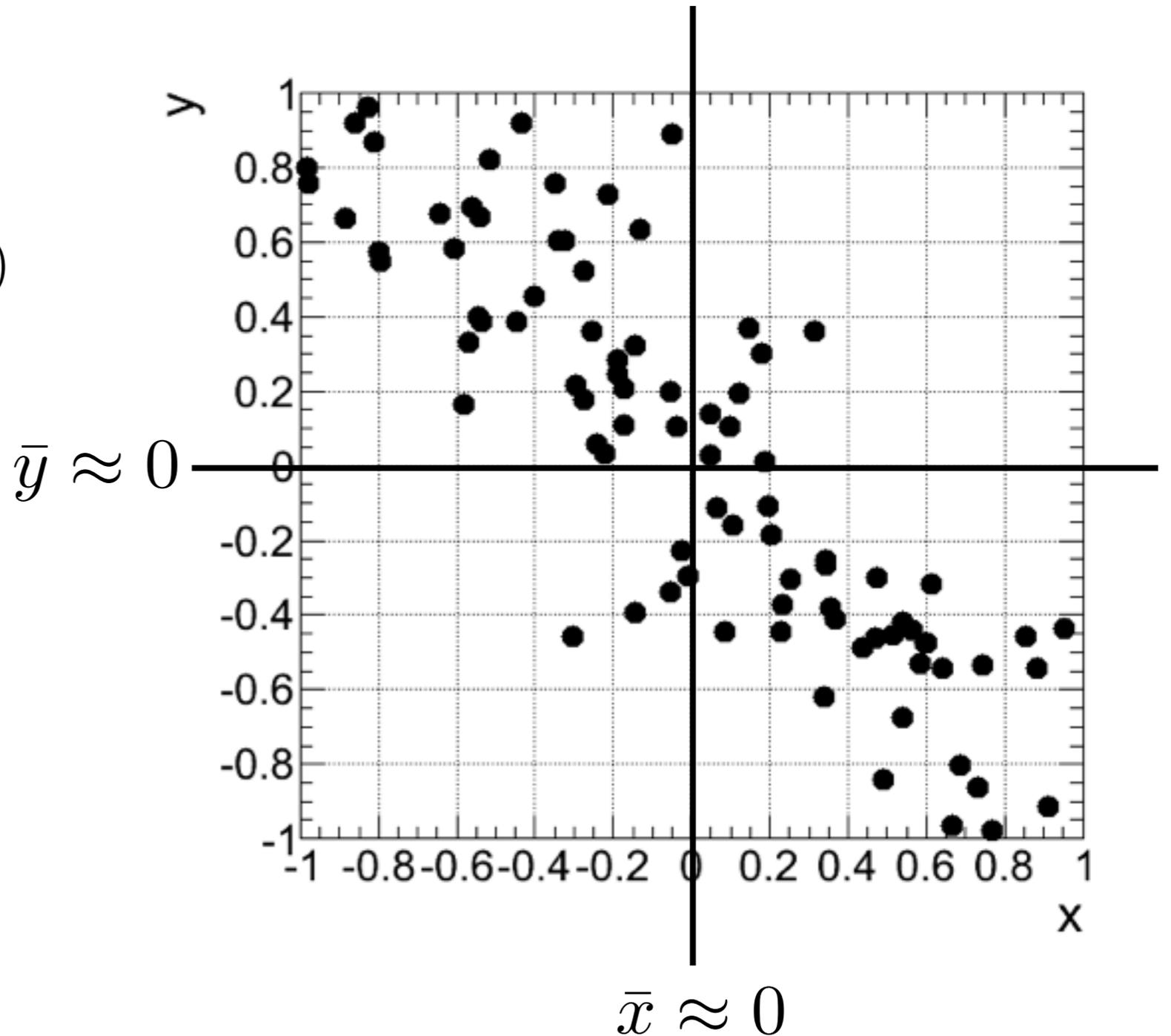


Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

➔ $\sigma_{xy} < 0$



Parâmetros de correlação

ii) *Coefficiente de correlação linear de Pearson*: covariância entre duas variáveis, dividida por seus desvios padrão

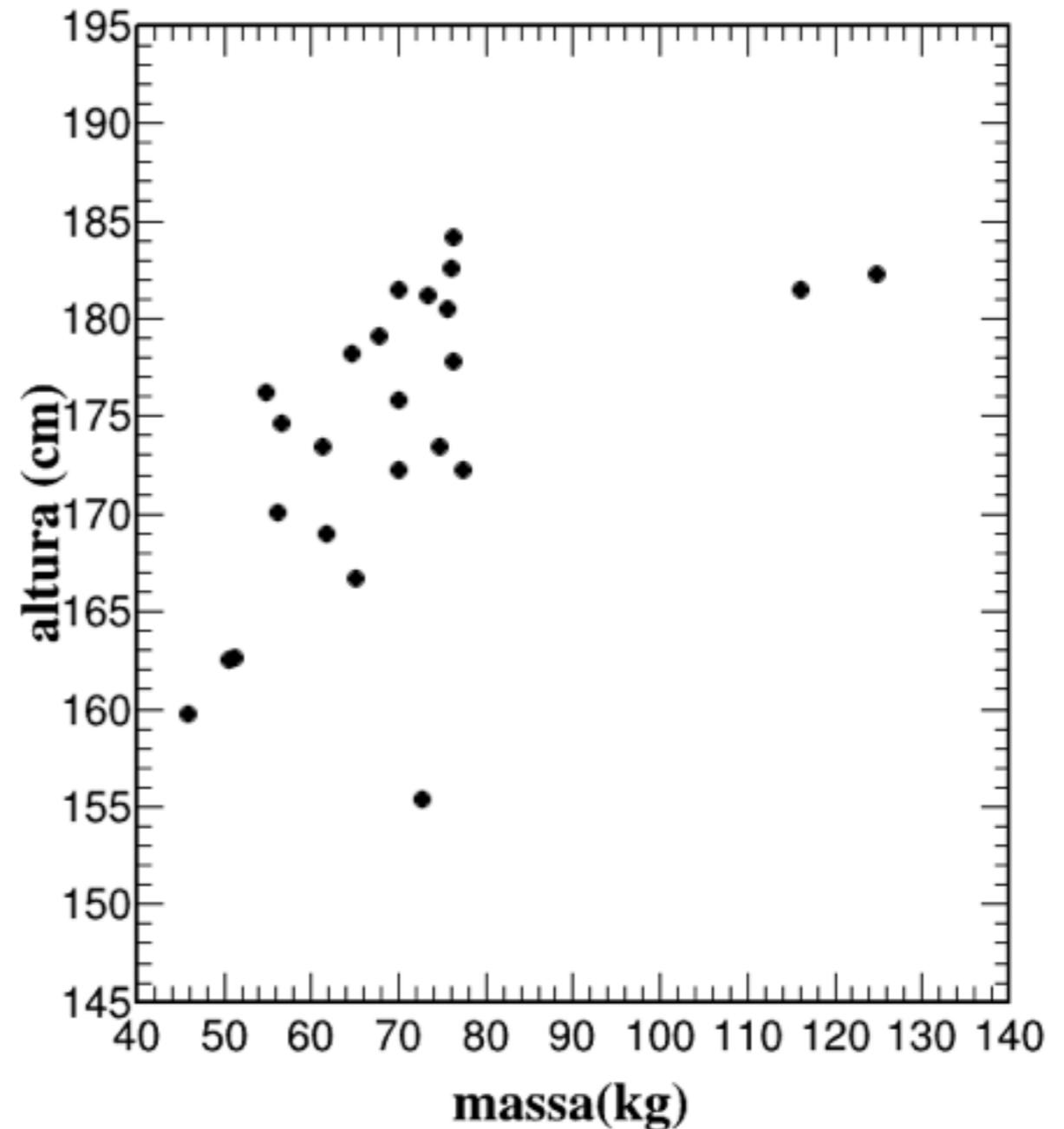
$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq r \leq 1$$

Correlação linear, perfeita e positiva: $r = 1$

Correlação linear, perfeita e negativa: $r = -1$

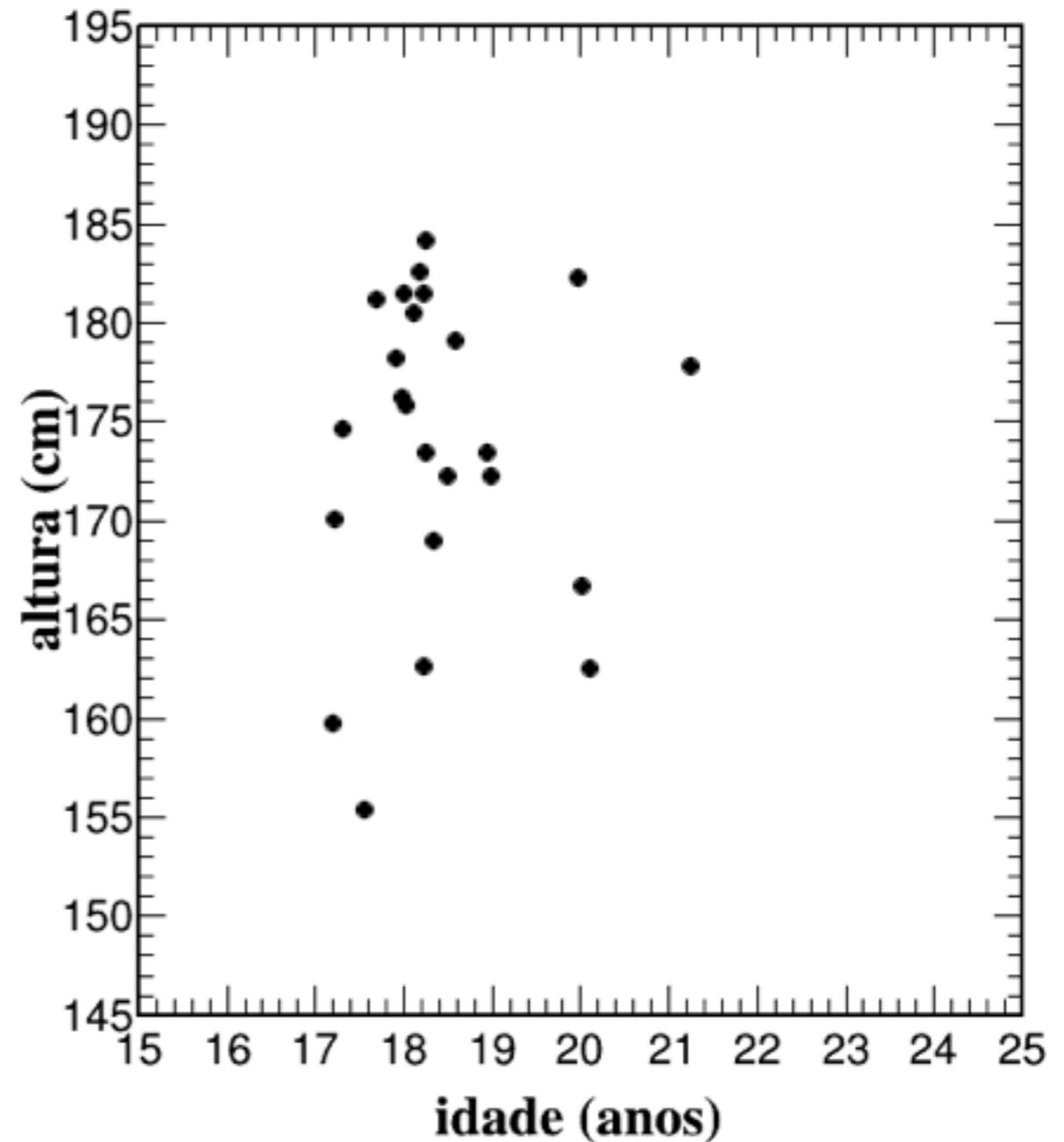
Atividade - Aula 1

Estudante	Massa (Kg)	Altura (cm)
1	51	175
2	78	173
3	73	181
4	120	181
5	62	168
6	78	178
7	70	158
8	65	168
9	115	183
10	50	160
11	62	176
12	55	173
13	75	181
14	58	174
15	73	178
16	66	174
17	65	180
18	48	159
19	64	173
20	75	180
21	72	173
22	53	162
23	76	184
24	68	175



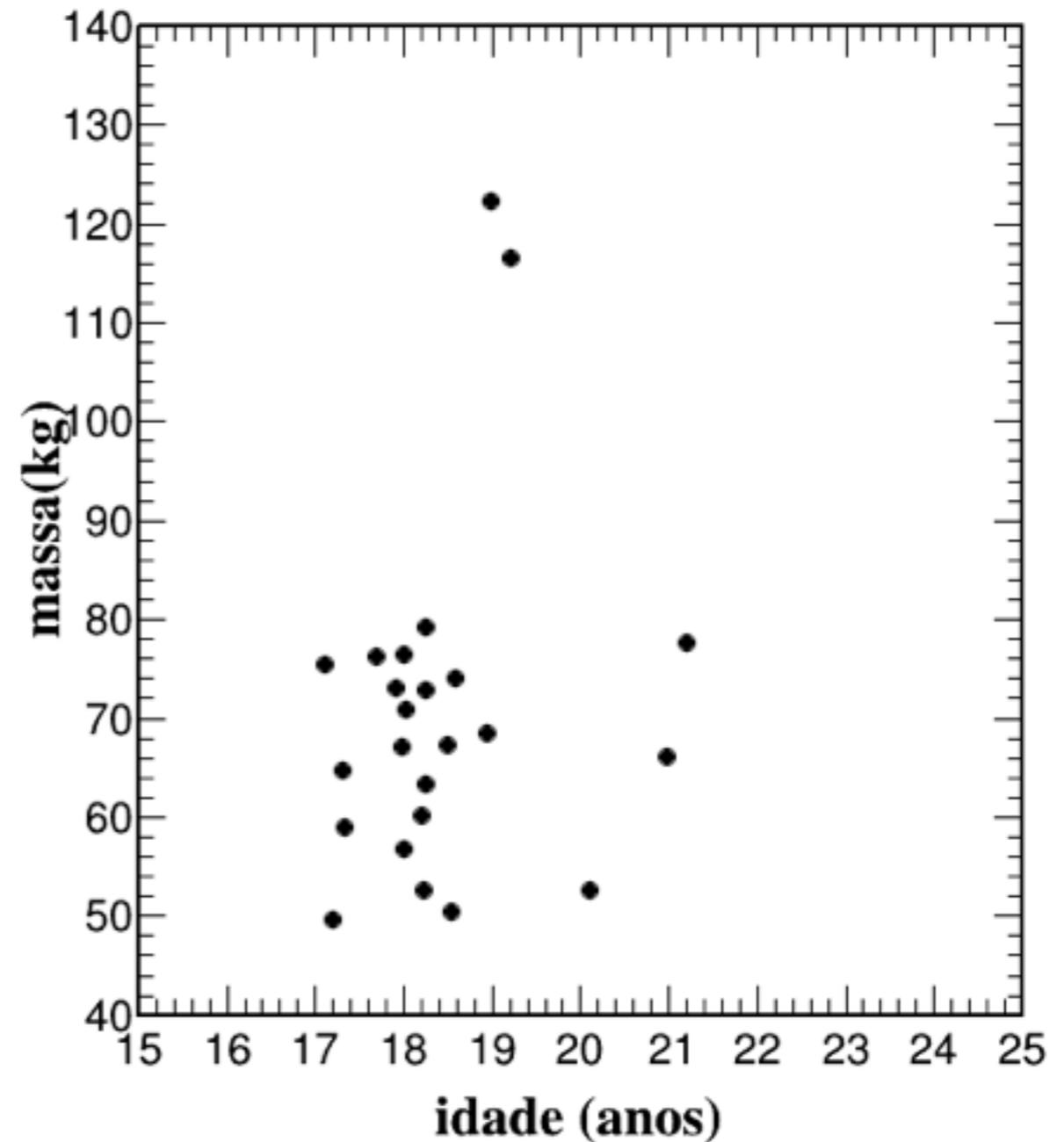
Atividade - Aula 1

Estudante	Idade	Altura (cm)
1	18	175
2	17	173
3	18	181
4	18	181
5	18	168
6	21	178
7	17	158
8	20	168
9	19	183
10	18	160
11	17	176
12	17	173
13	17	181
14	18	174
15	18	178
16	18	174
17	18	180
18	17	159
19	18	173
20	18	180
21	18	173
22	20	162
23	17	184
24	17	175



Atividade - Aula 1

Estudante	Idade	Massa (Kg)
1	18	51
2	17	78
3	18	73
4	18	120
5	18	62
6	21	78
7	17	70
8	20	65
9	19	115
10	18	50
11	17	62
12	17	55
13	17	75
14	18	58
15	18	73
16	18	66
17	18	65
18	17	48
19	18	64
20	18	75
21	18	72
22	20	53
23	17	76
24	17	68



Atividade de aula

1- Com as coleções de dados das idades, massas e alturas dos estudantes da turma de Física Geral, determine:

i) Covariância de todos os pares de variáveis (massa x idade, altura x idade, altura x massa) e respectivo coeficiente de correlação

2- Exercícios 2.5.1 - 2.5.5 do livro “Estimativas e erros em Experimentos de Física”