

Física Geral - Laboratório

Estimativas e erros em medidas indiretas:
Propagação de erros



Experimentos de *medidas indiretas*

Medidas diretas: Estimativa do valor esperado de uma grandeza a partir de experimentos em que as medidas são lidas diretamente em uma escala, ou registradas por um dispositivo

Medidas indiretas: A estimativa do valor esperado de uma determinada grandeza é obtida a partir da medição (direta) de outras grandezas associadas

Medidas indiretas

□ Propagação de erros

$$u = f(x)$$

Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas diretas de **uma** grandeza $x: \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

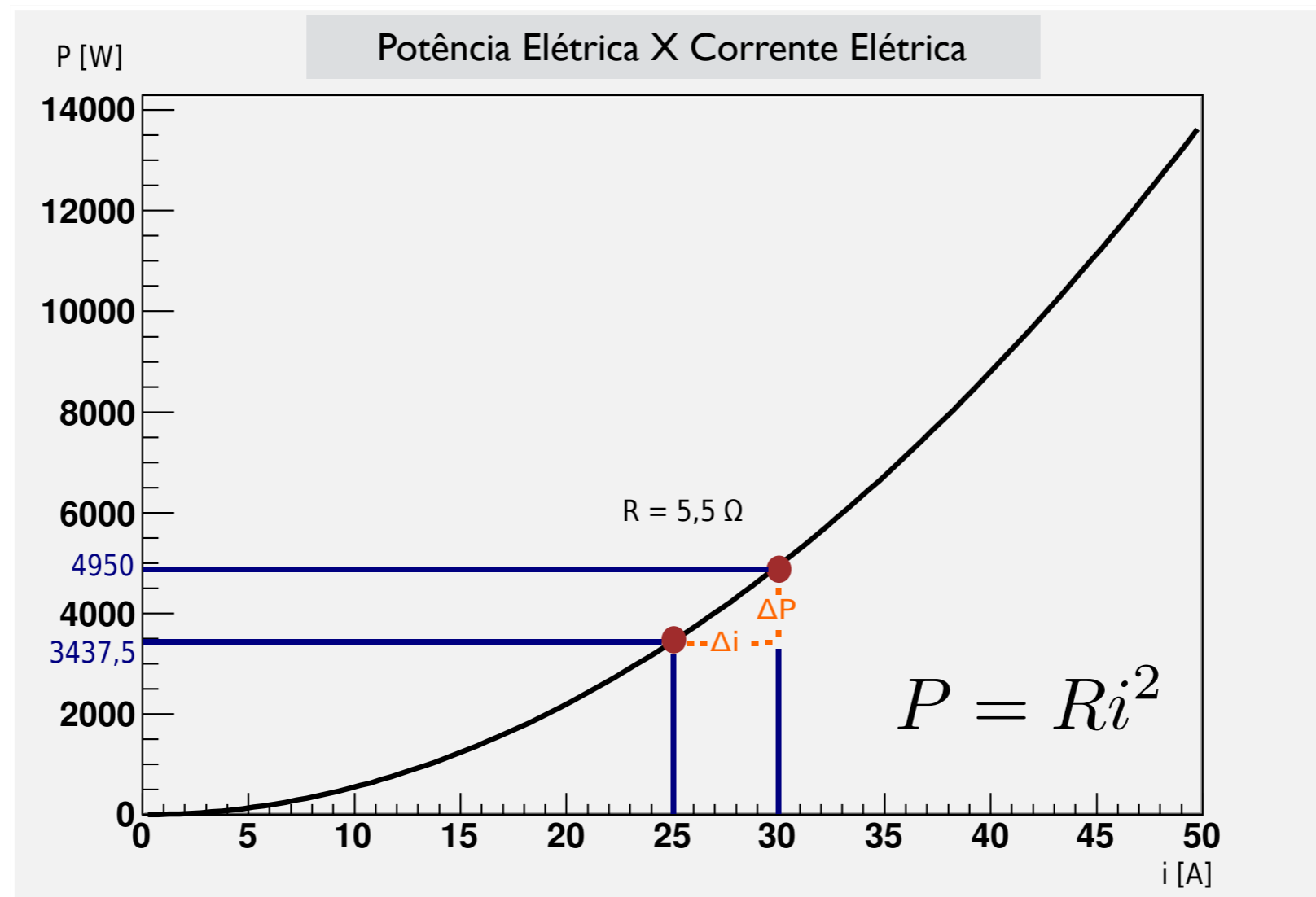
Qual a incerteza em u ?

Estimamos a incerteza em u por **propagação de erro**

Medidas indiretas - Propagação de erros

Exemplo: **Potência elétrica, $P(i)$**

- medida direta: i
- Para uma dada incerteza em i (Δi), associa-se uma incerteza em $P(i)$ (ΔP);
- Determinamos ΔP com propagação de erro;



Medidas indiretas - Propagação de erros

Supomos que Δx é pequeno o suficiente para considerarmos u linear no intervalo $[x, x+\Delta x]$.

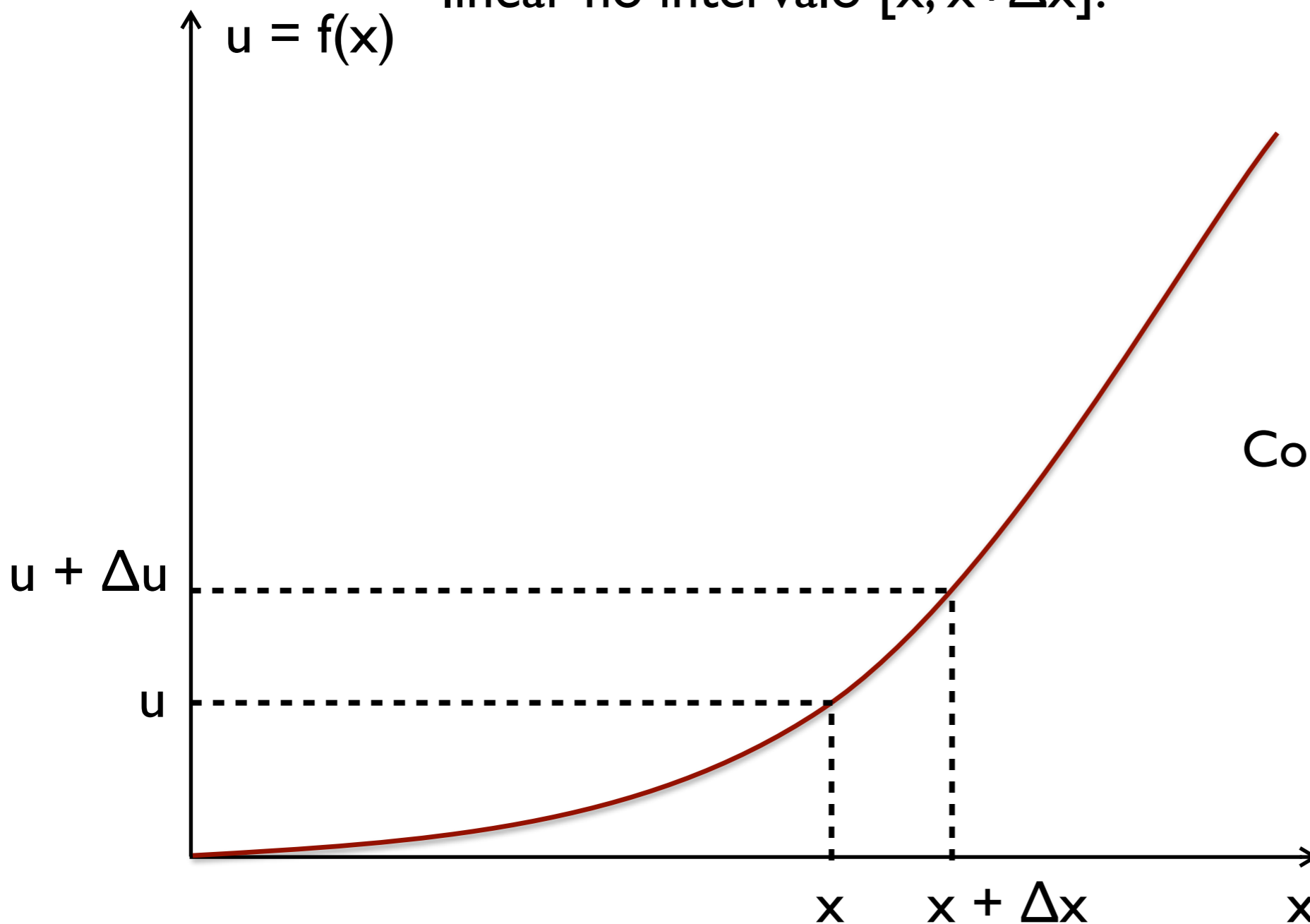
coef. angular da reta no intervalo $[x, x+\Delta x] = \Delta u / \Delta x$

$$\Delta u / \Delta x = |df/dx|$$

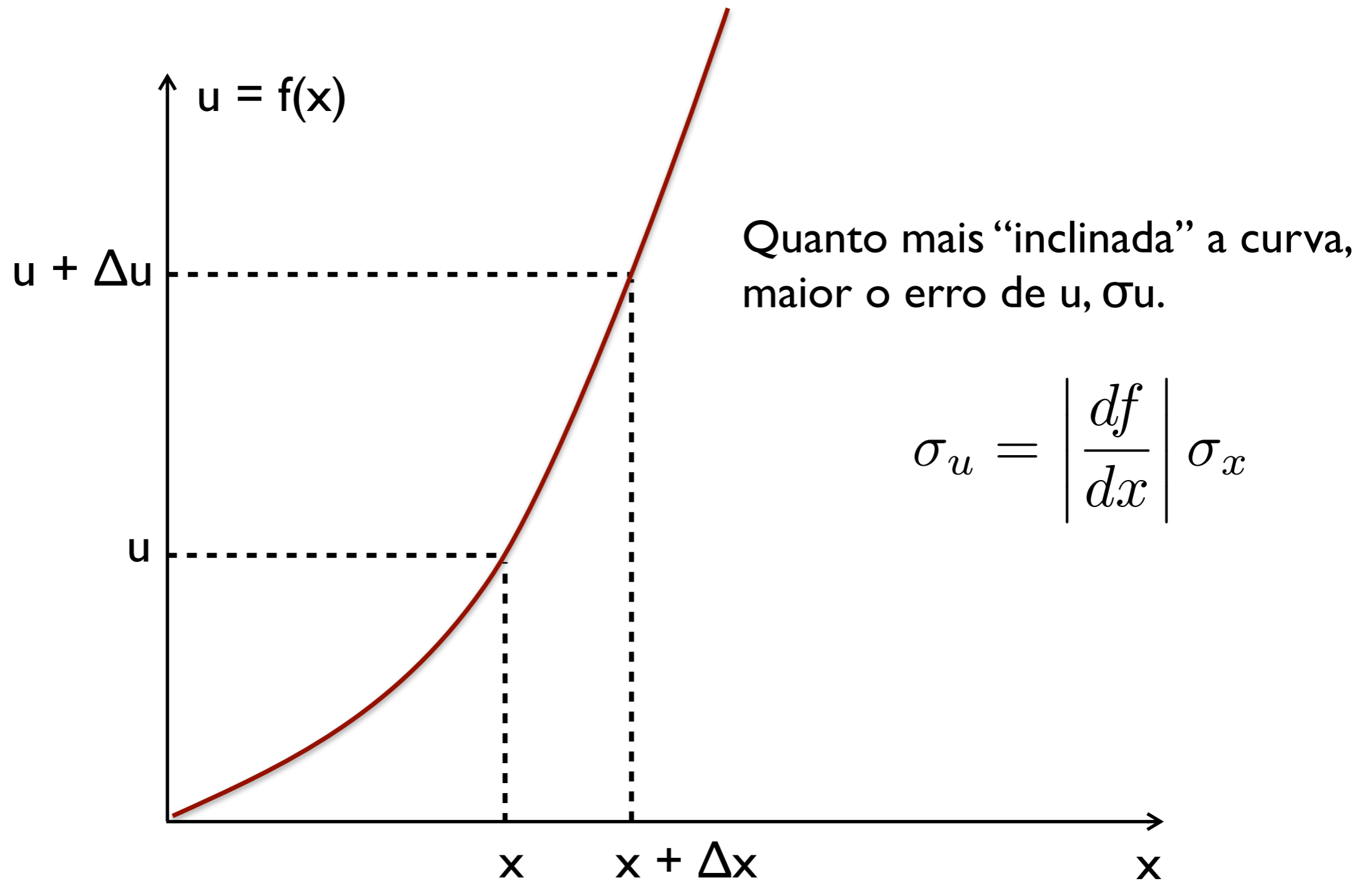
$$\Delta u = |df/dx| \Delta x$$

Considerando $\Delta x = \sigma_x$, temos

$$\sigma_u = \left| \frac{df}{dx} \right| \sigma_x$$



Medidas indiretas - Propagação de erros



Medidas indiretas - Propagação de erros

□ Propagação de erros

$$u = f(x, y)$$

Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas de **duas** grandezas x e y :

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$$

Queremos obter: $\bar{u} \pm \sigma_{\bar{u}}$

Propagação de erros

□ Estimativa do valor esperado

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Exemplo: $u = x + y$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$u = x/y$$

$$\bar{u} = \bar{x}/\bar{y}$$

Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Em geral: $u = f(x, y)$

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{xy}$$

Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Adição ou subtração de variáveis

$$u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r \sigma_{\bar{x}} \sigma_{\bar{y}}}$$

Coeficiente linear de Pearson $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$



Se x e y são *independentes*
(correlação nula)

$$\longrightarrow \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$$

Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Multiplicação ou divisão de variáveis

Se x e y são *independentes* (correlação nula):

$$u = xy \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

ou

$$u = x/y$$

Se a correlação não é nula:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right) \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)}$$

Propagação de erros

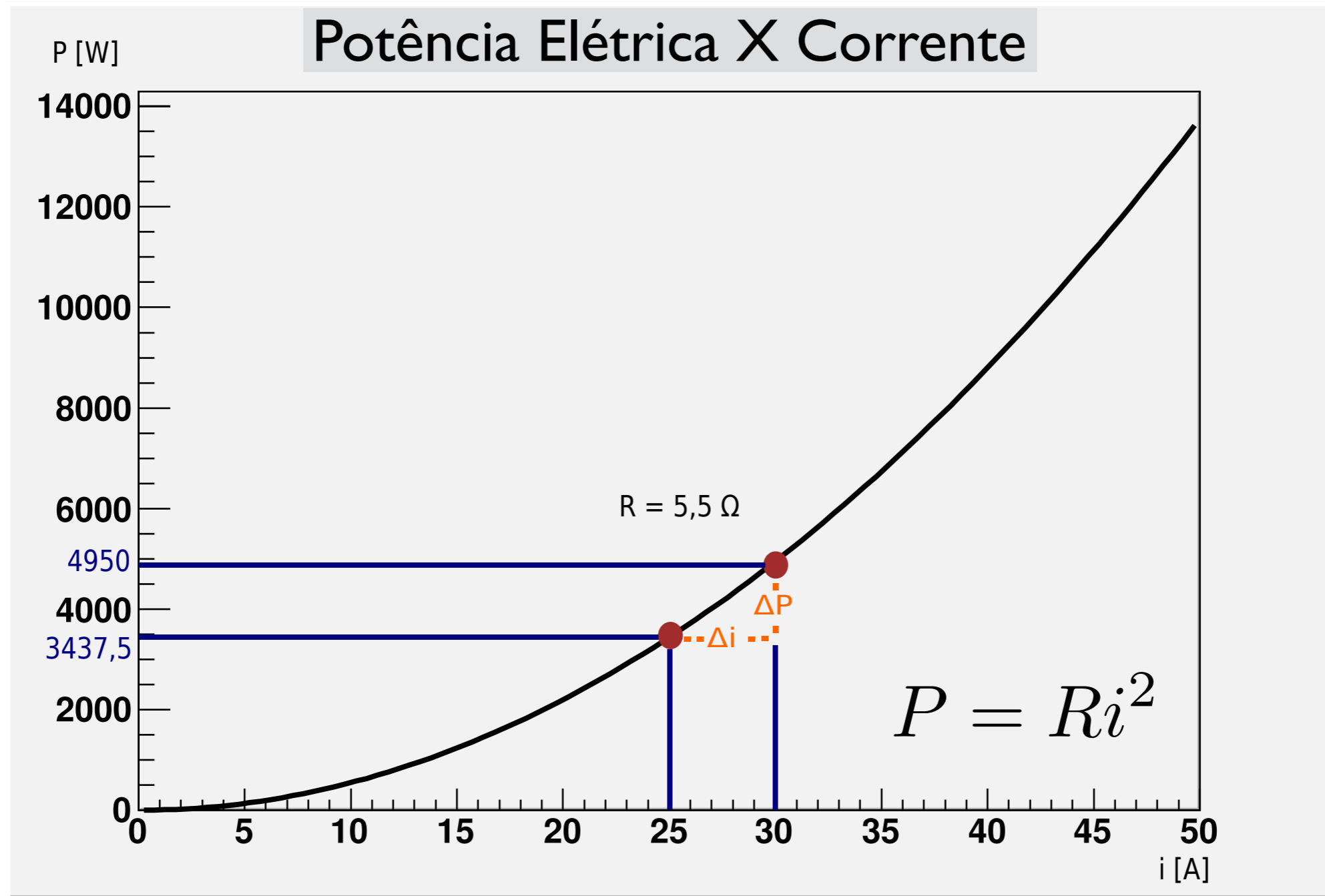
□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo:

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Propagação de erros



Propagação de erros

Exemplo:

$$P = Ri^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = R\sigma_{\bar{i}^2} \quad \text{ou} \quad P = Ri^2 \rightarrow \sigma_P = \left| \frac{dP}{di} \right| \sigma_i = 2Ri\sigma_i$$

$$i^2 = i \times i \Rightarrow \frac{\sigma_{\bar{i}^2}}{\bar{i}^2} = 2 \frac{\sigma_{\bar{i}}}{\bar{i}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = 2R\bar{i}\sigma_{\bar{i}}$$

Onde usamos que a correlação é não nula (de 100% $\Rightarrow r = 1$):

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right) \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)}$$

Propagação de erros

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Exercícios:

i) $u = x^2$

ii) $u = (x \cdot y) / (x + y)$

iii) $u = x + y + z$

iv) $u = xy + z$

v) $p = kl$

vi) $I = V/R$

vii) $v = \sqrt{2gh}$

viii) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Propagação de erros

Exemplo:

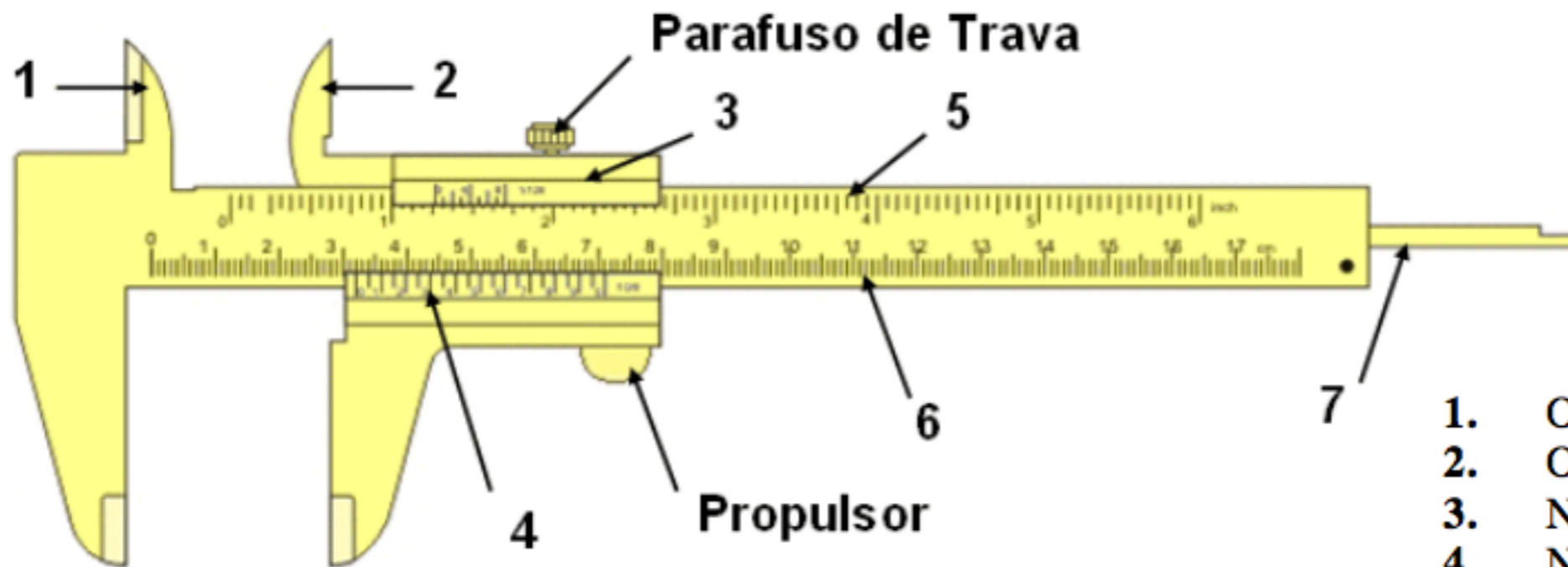
I. Erro associado à **compatibilidade** entre duas medidas:

- Comparação da discrepância entre duas estimativas: $u = |x - y|$
(subtração)

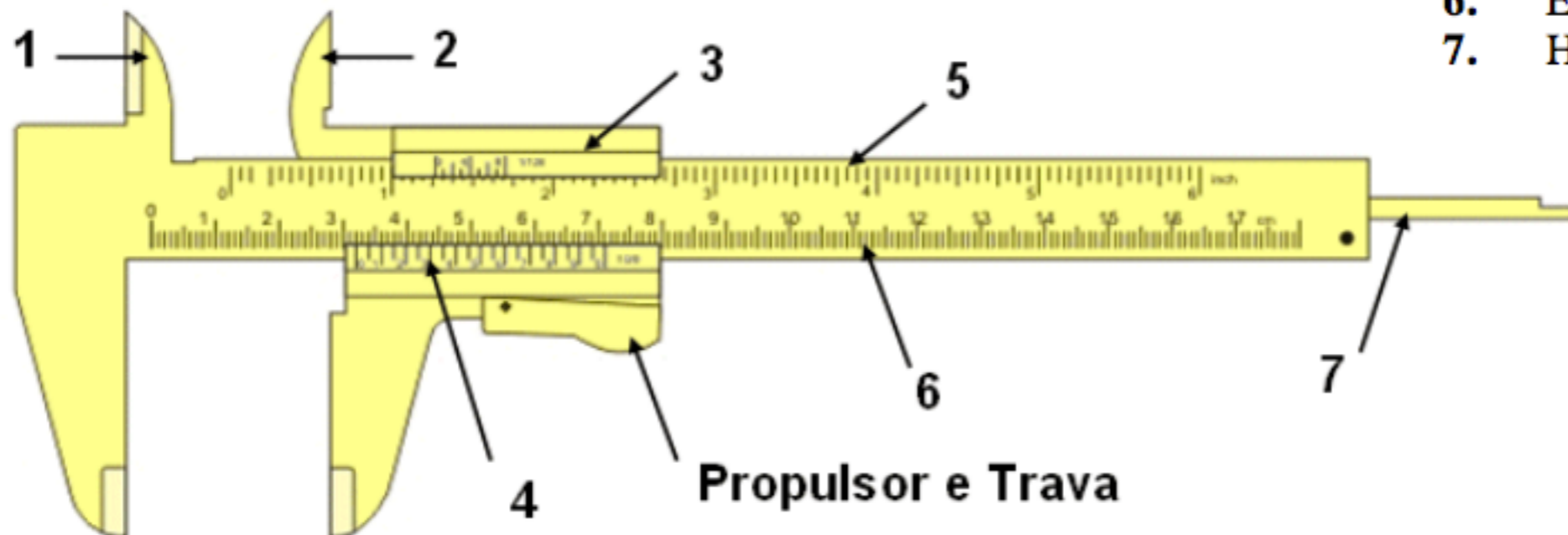
$$\implies \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$$

Atividade de aula

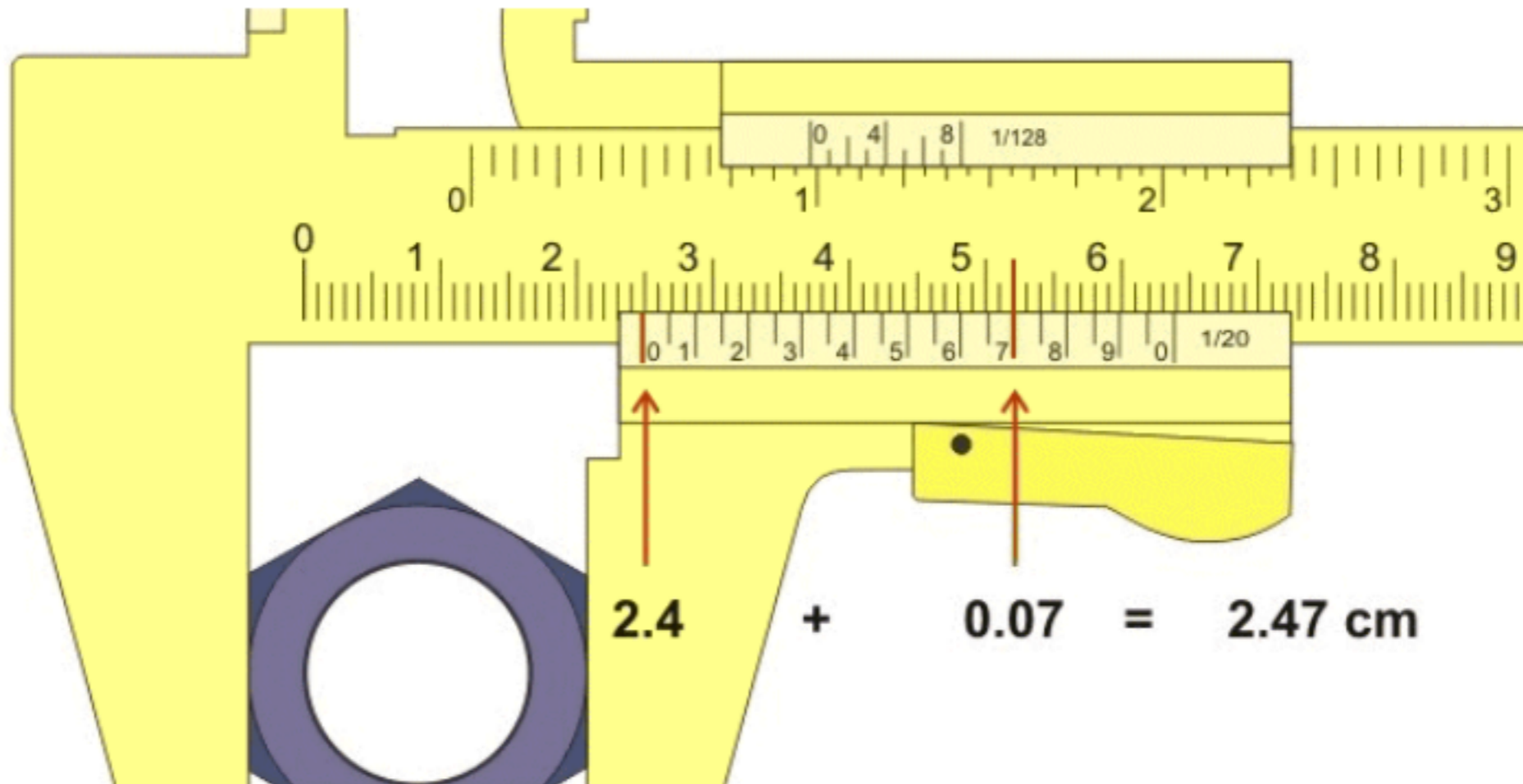
Paquímetro



1. Orelha fixa,
2. Orelha móvel,
3. Nônio ou Vernier em polegadas,
4. Nônio ou Vernier em milímetros,
5. Escala fixa em polegadas,
6. Escala fixa em milímetros e
7. Haste de profundidade.



Paquímetro

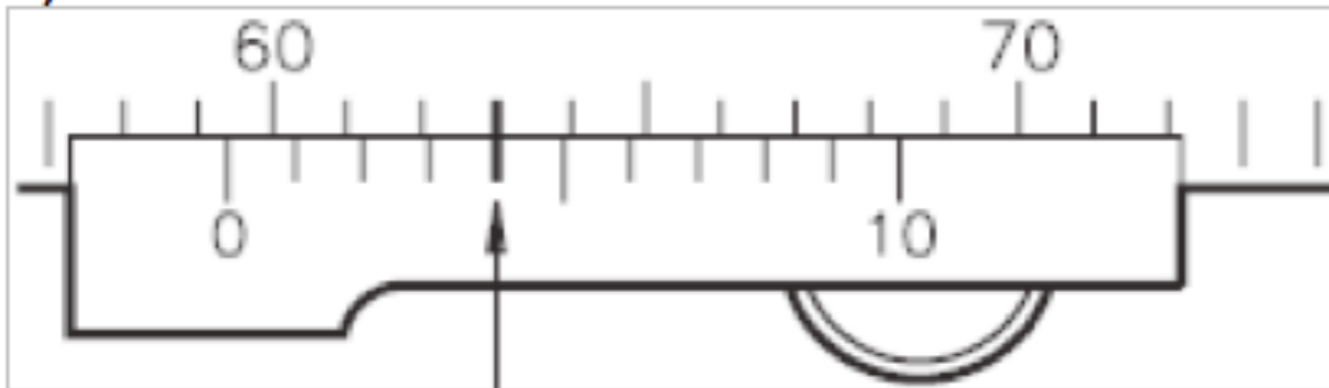


$$\text{Resolução} = \frac{\text{menor divisão da escala fixa}}{\text{número total de divisões do nônio}} = \frac{1}{20} \text{ mm}$$

Paquímetro

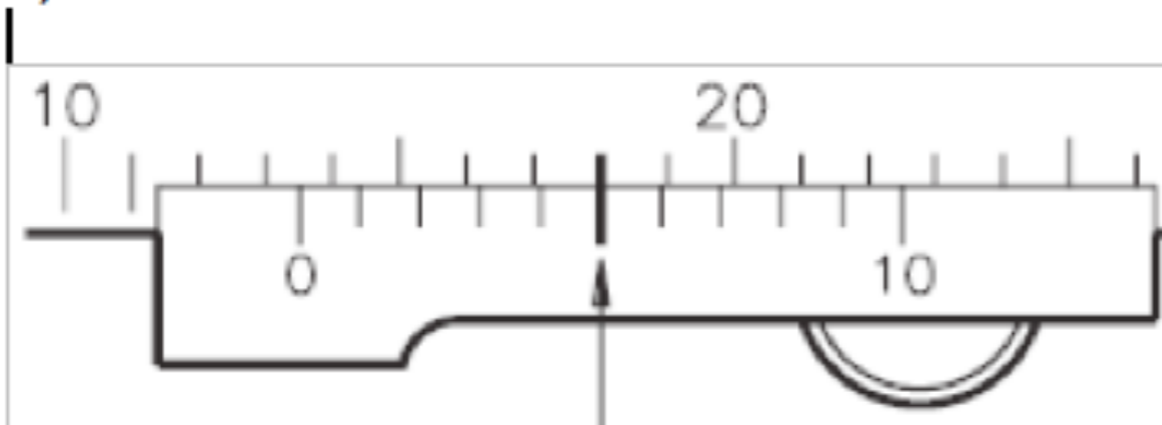
1)-Calcule a resolução do paquímetro, faça a leitura e escreva as medidas nos locais indicados.

a)



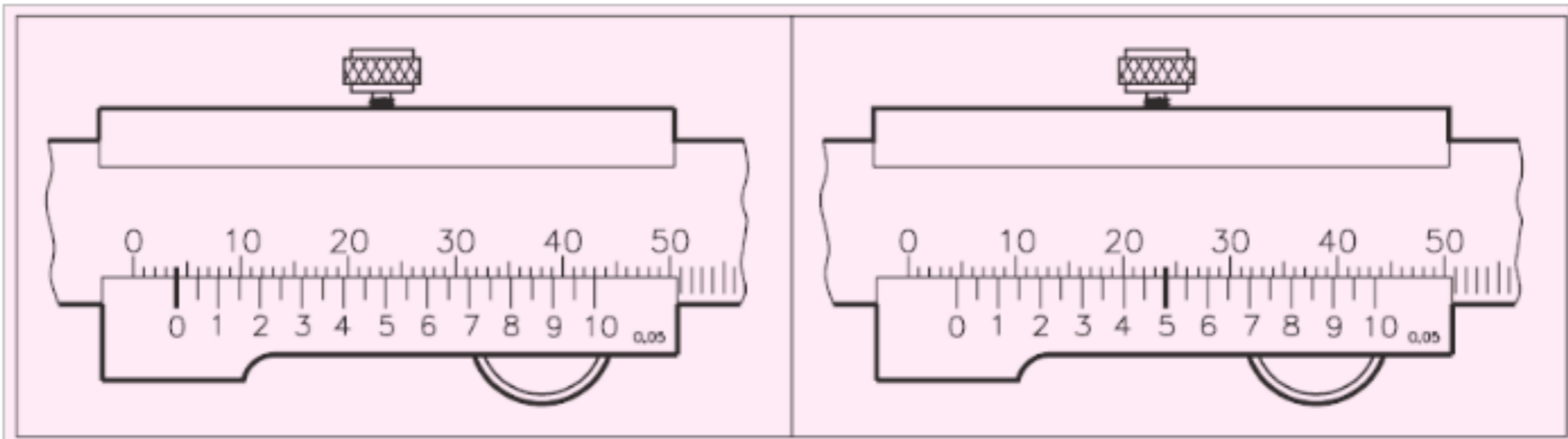
Leitura= mm

b)-



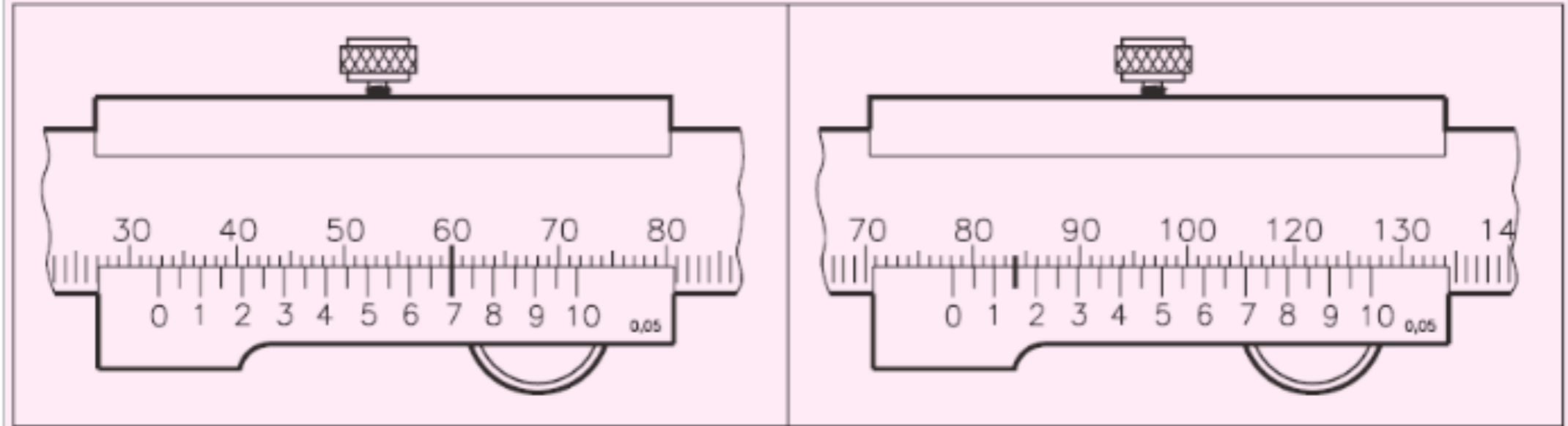
Leitura= mm

Paquímetro



a) Leitura:

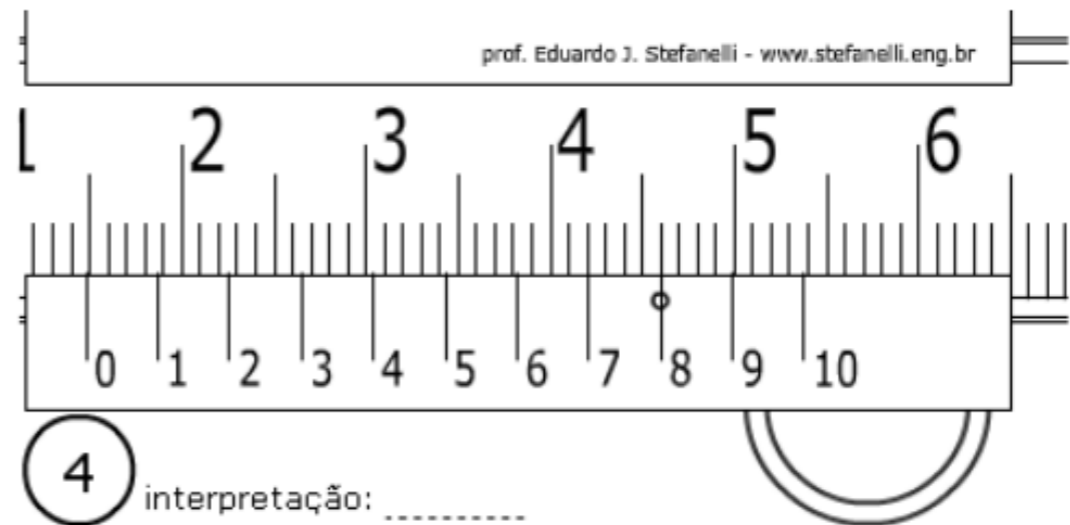
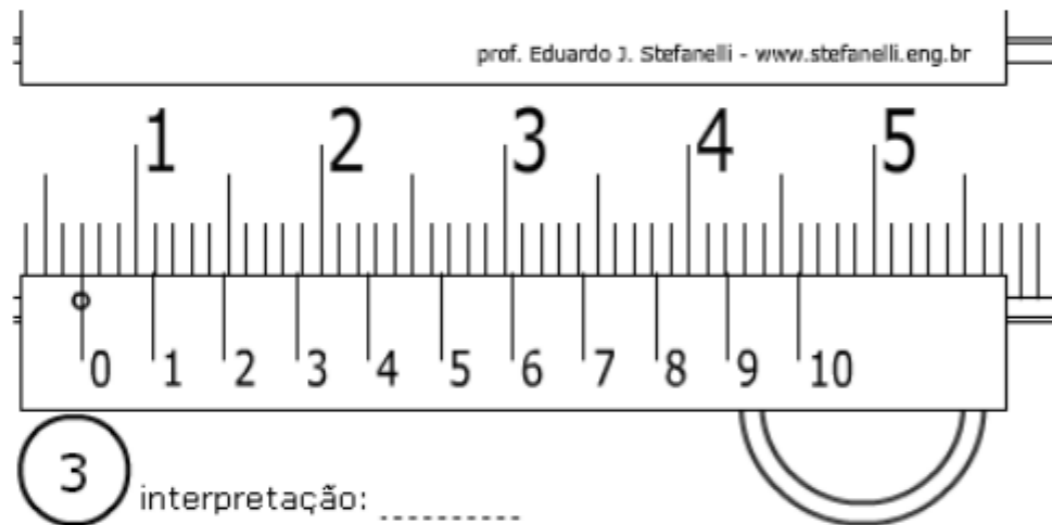
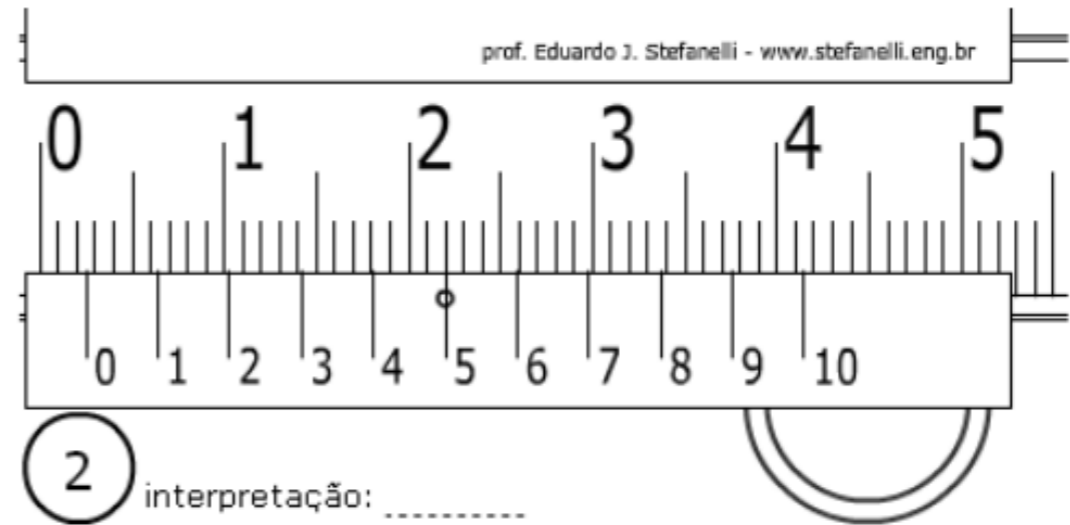
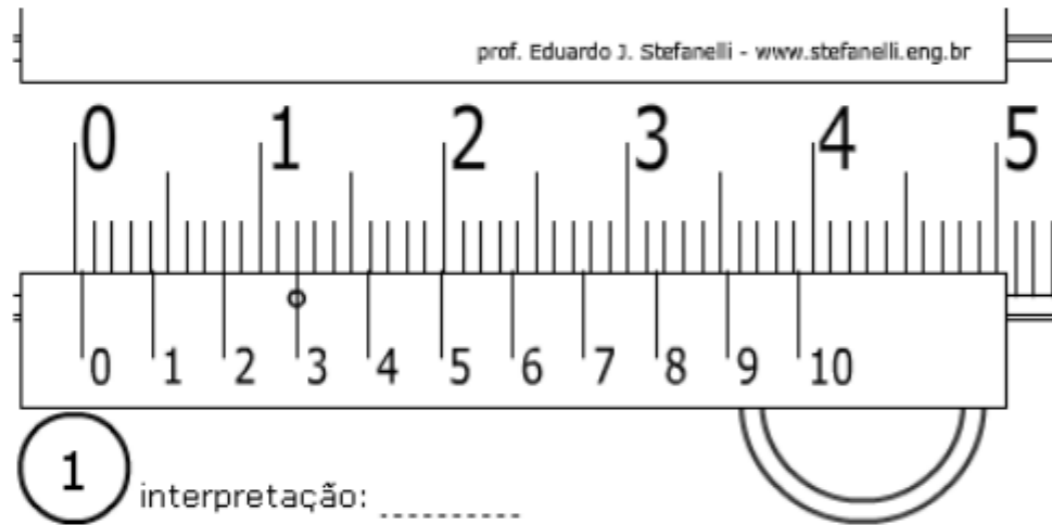
b) Leitura:



c) Leitura:

d) Leitura:

Paquímetro



Prática 3: medidas indiretas e propagação erro

Física Geral 2016 - Medidas indiretas e propagação de erros

O objetivo desta prática é compreender os conceitos relacionados às incertezas em medidas indiretas

Material para a prática: paquímetro e cilindro de metal do estojo de mecânica

Procedimentos para tomada dos dados:

- Usando o paquímetro, fazer as medidas do comprimento e dos diâmetros internos e externo de um cilindro do estojo de mecânica.

comprimento ()	diâmetro interno ()	diâmetro externo ()

- Determine a incerteza das medidas individuais realizadas com o paquímetro.
- Considerando as medidas individuais e usando a equação apropriada calcule as seguintes medidas indiretas:
 - a área do círculo interno
 - a área do círculo externo
 - a área lateral
 - a área total
 - o volume interno do cilindro
 - o volume externo do cilindro
 - o volume da casca cilíndrica
- Calcule os erros associados as medidas indiretas, através da propagação de erros.

Sugestões e observação

O trabalho realizado nesta prática, deve ser apresentado sob a forma de um relatório em nome do grupo de dois alunos que realizou a experiência.

O relatório desta prática deve ser organizado da seguinte forma:

- Título da experiência.
- Objetivo da experiência.
- Introdução teórica, relativa à propagação de erros.
- Descrição da experiência. Neste item vocês devem descrever como a experiência foi montada, os procedimentos adotados para fazer as medidas e todas as observações que fizeram neste processo. Vocês podem incluir também um diagrama esquemático da montagem realizada, a fim de tornar mais claro o seu texto.
- Cálculos. Neste item vocês devem apresentar tabelas com os dados, identificar as variáveis que estão usando e descrever os cálculos que estão fazendo. Vocês devem organizar os cálculos em subitens separados a fim de tornar mais claro o desenvolvimento dos mesmos.
- Conclusões. Neste item deve ser apresentada as conclusões à respeito da prática, devem constar os resultados encontrados e a discussão sobre eles.