Física Geral - Laboratório
2016/2

Estimativas e erros em medidas diretas (II)
Níveis de confiança, compatibilidade e combinação

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

UERJ

Resumo aula II: Medidas diretas

Resultado = estimativa do valor esperado ± erro (unidade)

$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$
$$\text{com } N \longrightarrow \infty$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do *erro de cada medida*

tcc: desvio padrão amostral ou experimental

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Estimativa do *erro da média*

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Desvio padrão amostral e populacional

desvio padrão amostral
ou experimental

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\,\sigma_x$$

desvio padrão
populacional

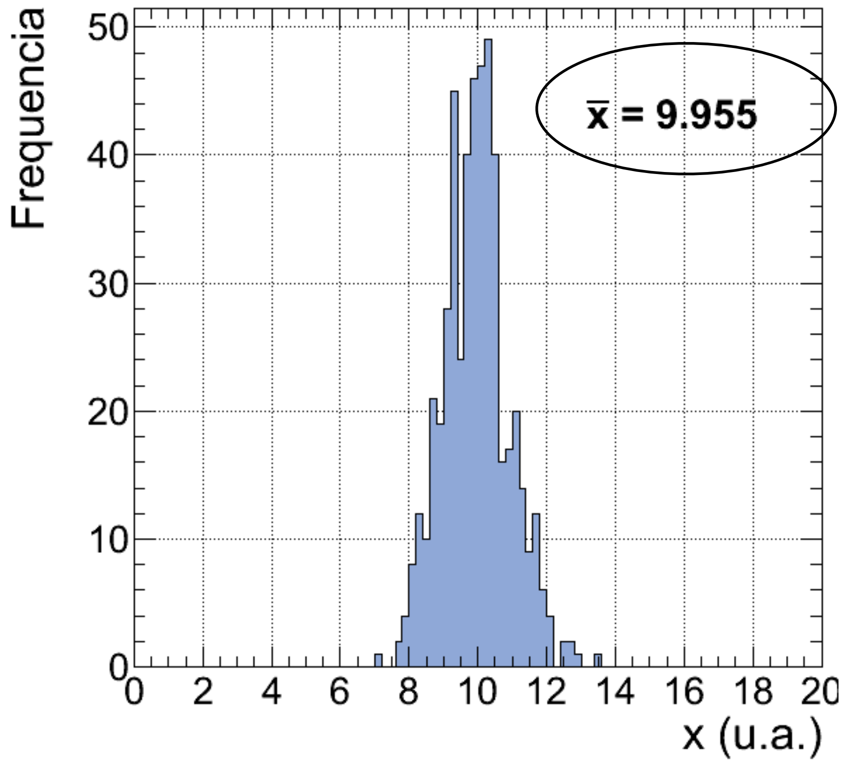
= raíz quadrada
da viariância

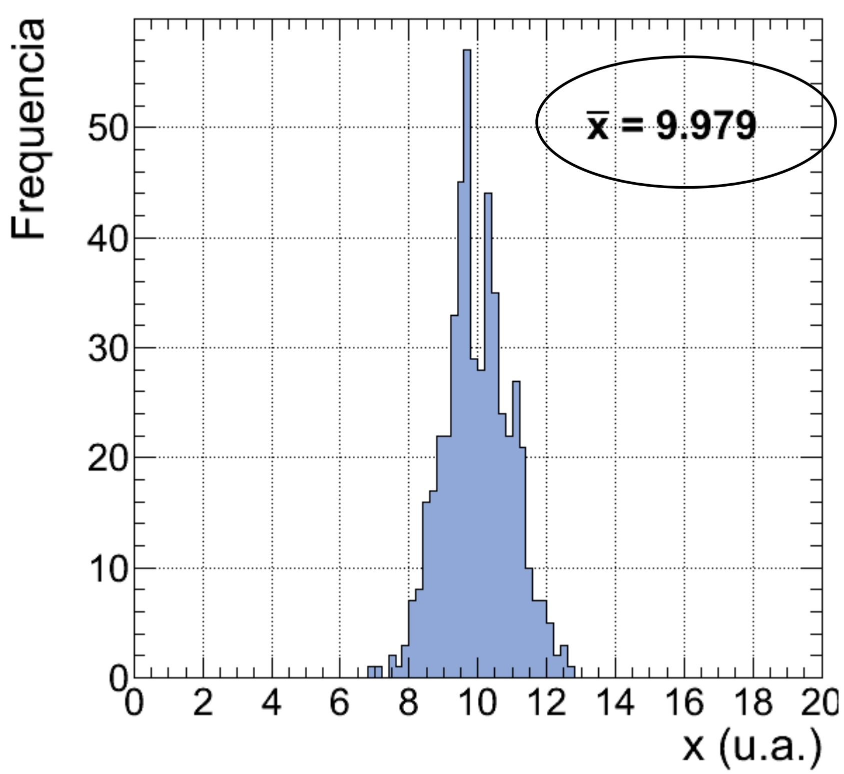
- Para um grande número de medidas

$$N \to \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

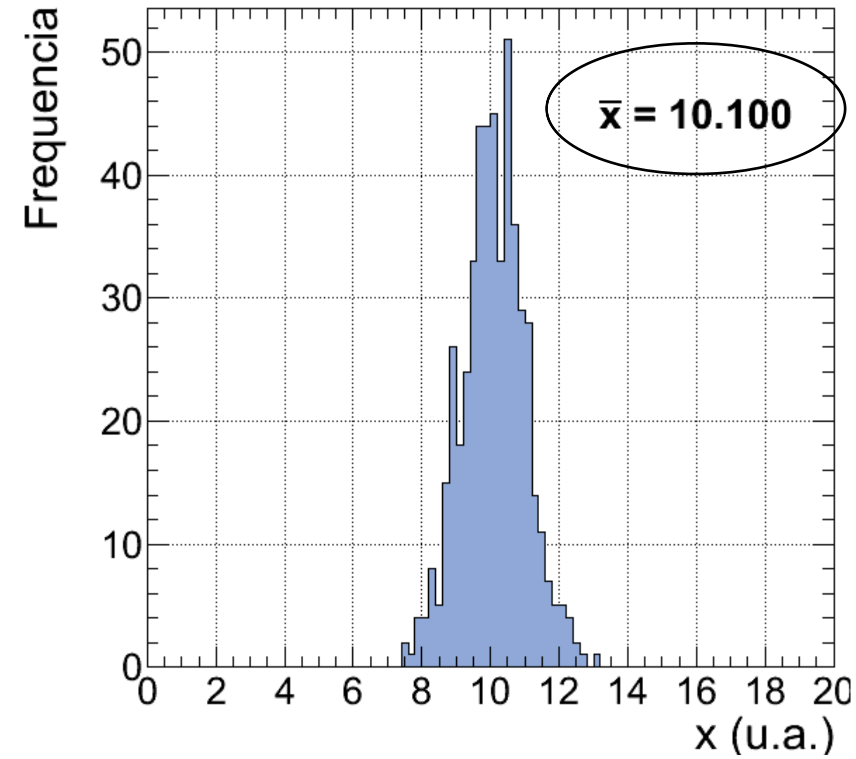
➡ o erro da média $\sigma_{\bar{x}} \approx \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

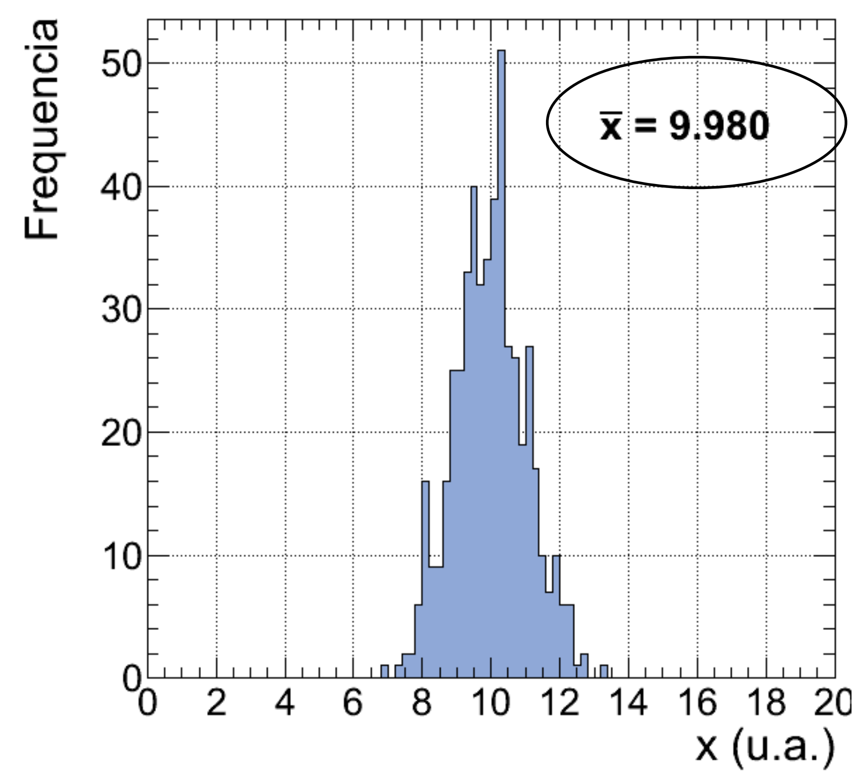
Resumo: Erro da média



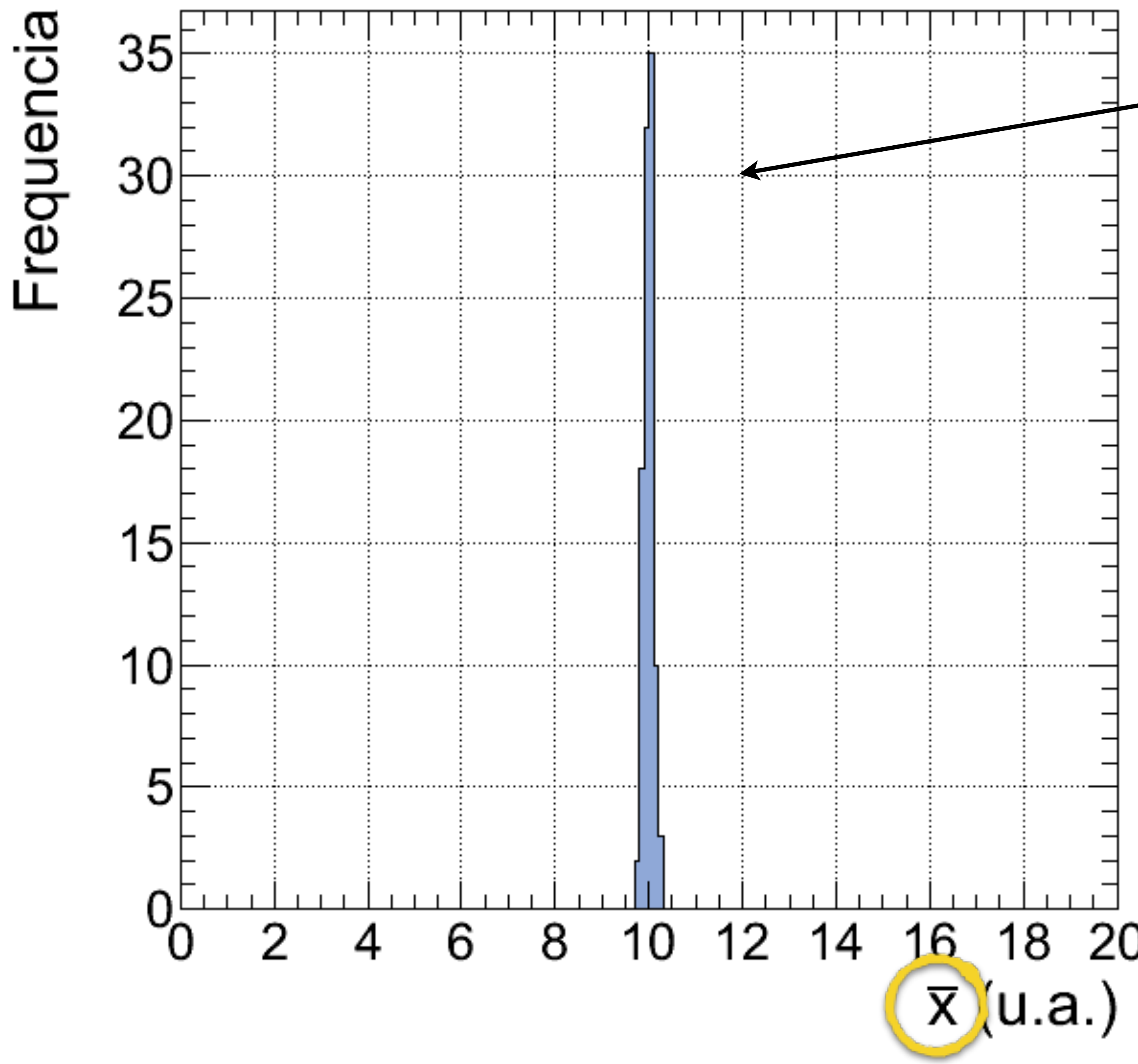


4 amostras da mesma grandeza
->
4 valores da média





Resumo: Erro da média

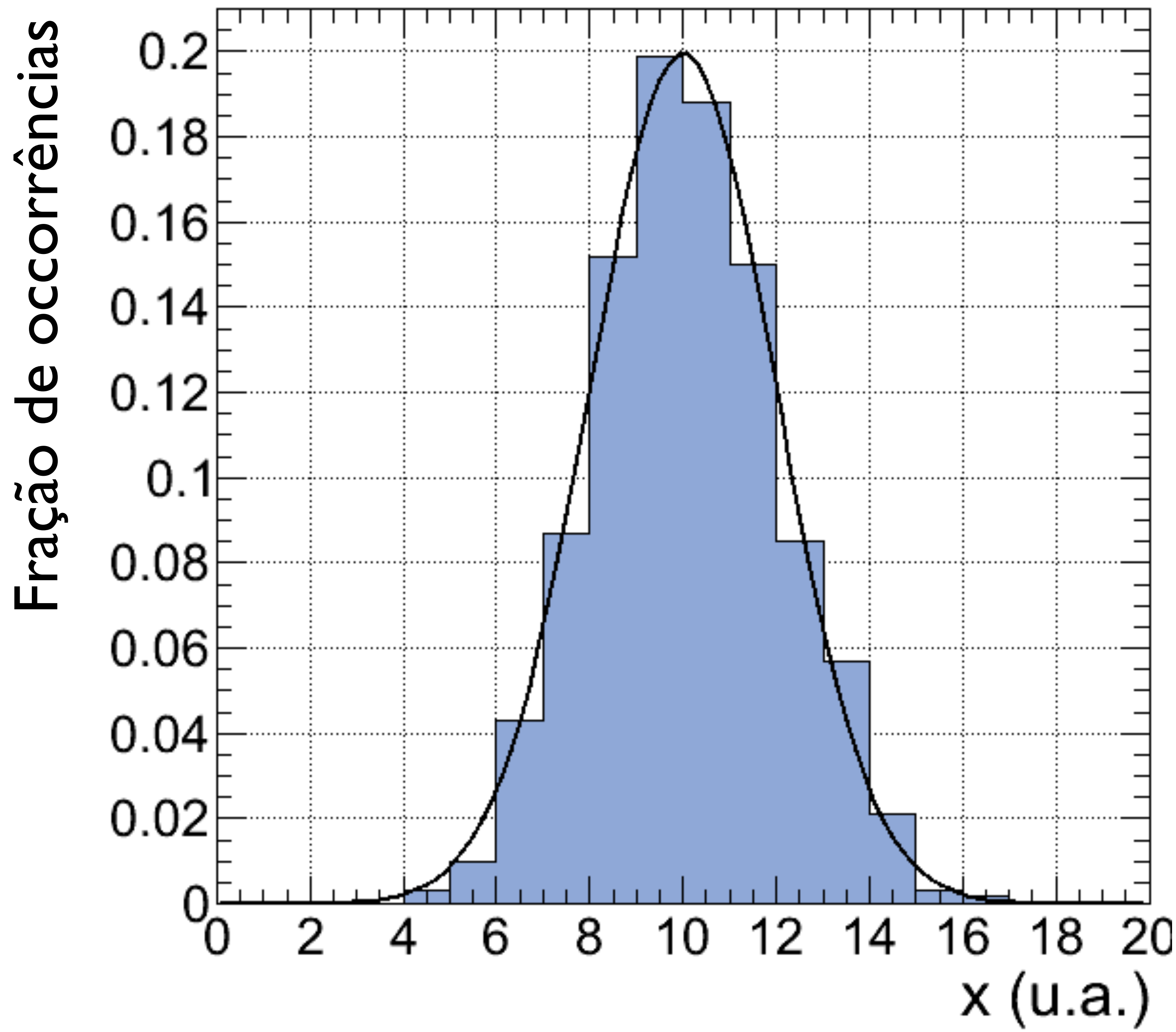


Distribuição das médias de 100 "experimentos", cada um com 100 medidas

->

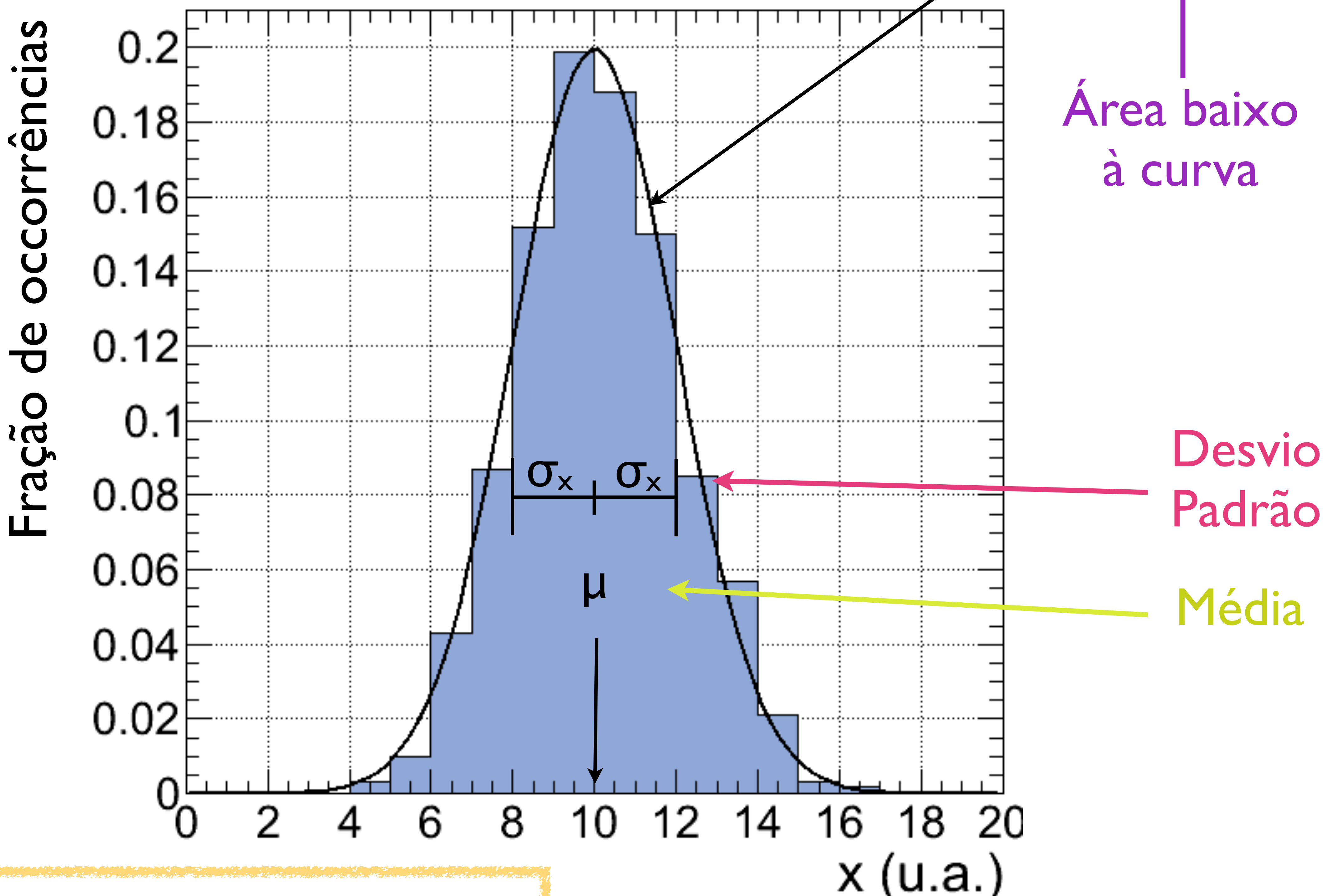
Note que o "erro da média" é menor que o "erro da medida"

Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

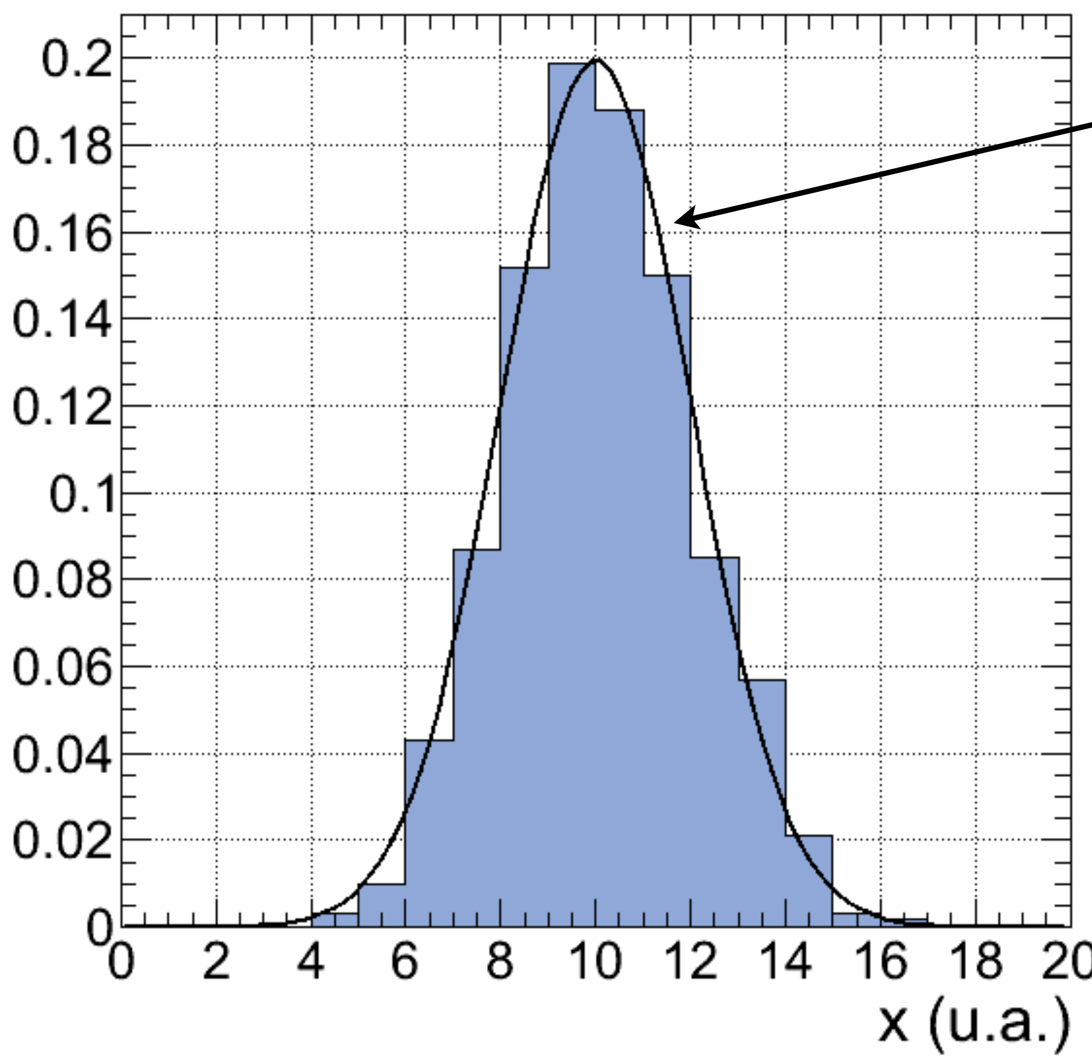
$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$



TCC: gaussiana ou distribuição normal

Incertezas aleatórias: Lei dos Erros

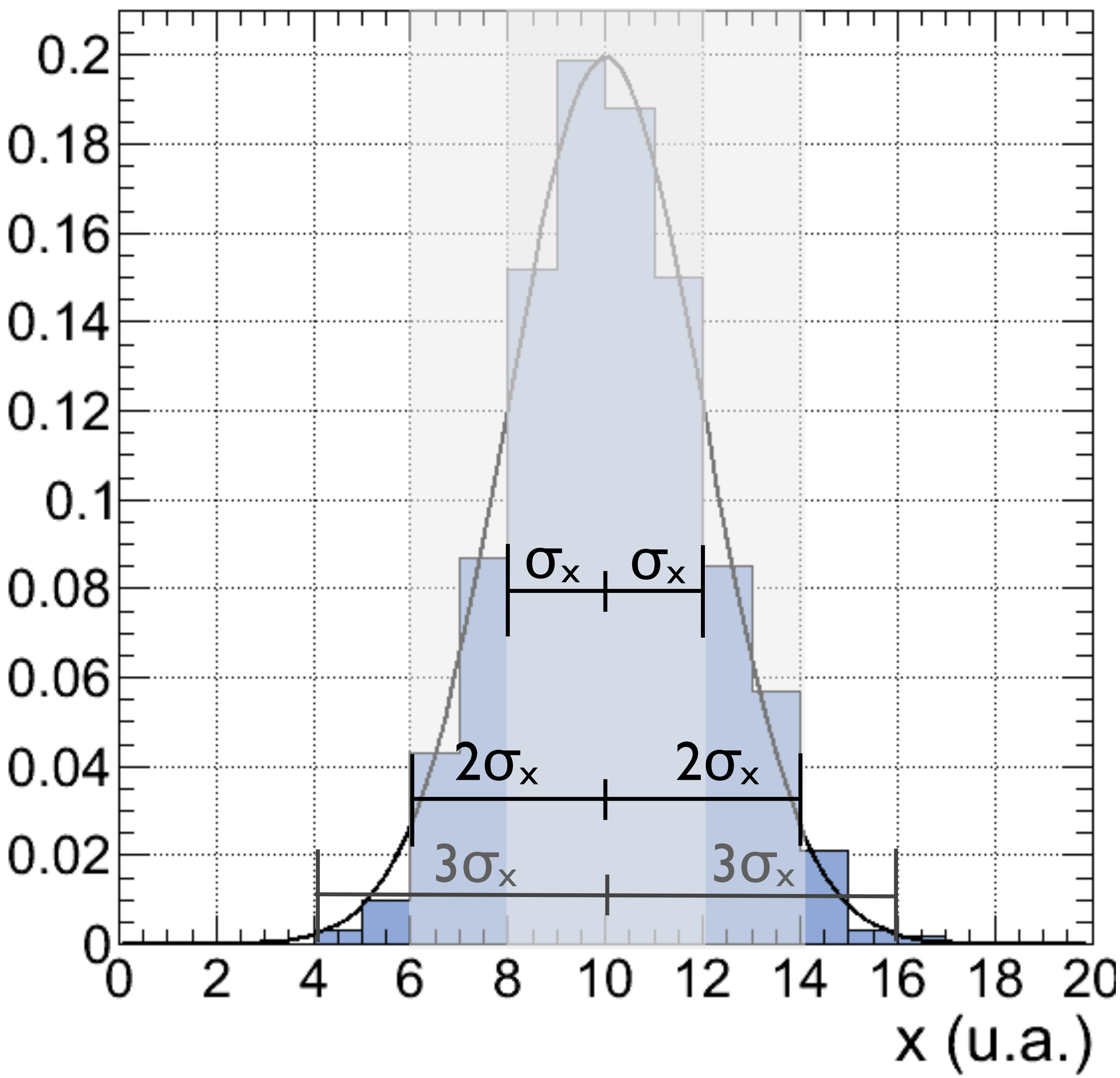
"Lei dos Erros": Para um número indefinidamente grande de medidas a distribuição das frequências se comporta como uma distribuição de Gauss. *Relacionado com o "Teorema Central do Limite"*



$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\text{área } A$$
$$\text{média } \overline{x} = \mu$$
$$\text{variância } \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \sigma_x^2$$

Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



68,3% da área entre (μ - σ_x) e (μ + σ_x)

95,5% da área entre (μ - 2σ_x) e (μ + 2σ_x)

99,7% da área entre (μ - 3σ_x) e (μ + 3σ_x)

...

Erro das medidas individuais!!

-> numa amostra 68,3% das medidas estão no intervalo ($\mu-\sigma_x$; $\mu+\sigma_x$)

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro (unidade)}}$$

$$\bar{x} \qquad\qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

As estimativas do valor esperado e de seu erro associado definem um intervalo ao qual atribuímos um *nível de confiança* de que o intervalo contenha o valor esperado ***μ***, i.e. uma probabilidade de :

$$\mu \in \left[\overline{x} - \sigma_{\overline{x}} \, ; \overline{x} + \sigma_{\overline{x}}\right]$$

Se considerarmos que as medidas se distribuem de acordo com uma distribuição de Gauss (Lei dos Erros), os valores dos níveis de confiança são determinados pela sua área correspondente.

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

estimativa do valor esperado ± *erro (unidade)*

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Intervalo de Confiança	Nível de Confiança (CL)
$(\bar{x} - 0{,}67\,\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 0{,}67\,\sigma_{\bar{x}})$	50,0 %
$(\bar{x} - 1{,}00\,\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 1{,}00\,\sigma_{\bar{x}})$	68,3 %
$(\bar{x} - 1{,}65\,\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 1{,}65\,\sigma_{\bar{x}})$	90,0 %
$(\bar{x} - 1{,}96\,\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 1{,}96\,\sigma_{\bar{x}})$	95,0 %
$(\bar{x} - 2{,}00\,\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 2{,}00\sigma_{\bar{x}})$	95,5 %
$(\bar{x} - 3{,}00\,\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 3{,}00\,\sigma_{\bar{x}})$	99,7 %

Intervalo de confiança de 68,3%

Intervalo de confiança de 95,5%

Intervalo de confiança de 99,7%

Exercício (3.7.1): De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o erro padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos intervalos:

a) (14,18)

b) (12,16)

c) (18,20)

a) (14,18) → (16 - 2, 16 + 2) → (16 - σ, 16 + σ)

→ Associamos ao intervalo o nível de confiança de aprox. 68,3% Para um grande número de leituras, 68,3% delas estarão no intervalo (16 - σ, 16 + σ)

b) (12,16) → (16 - 4, 16 + 0) → (16 - 2σ, 16 + 0σ)

→ Nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 2σ): 95,5% → O nível de confiança correspondente ao intervalo (16 - 2σ, 16 + 0σ) será a metade: 47,75%

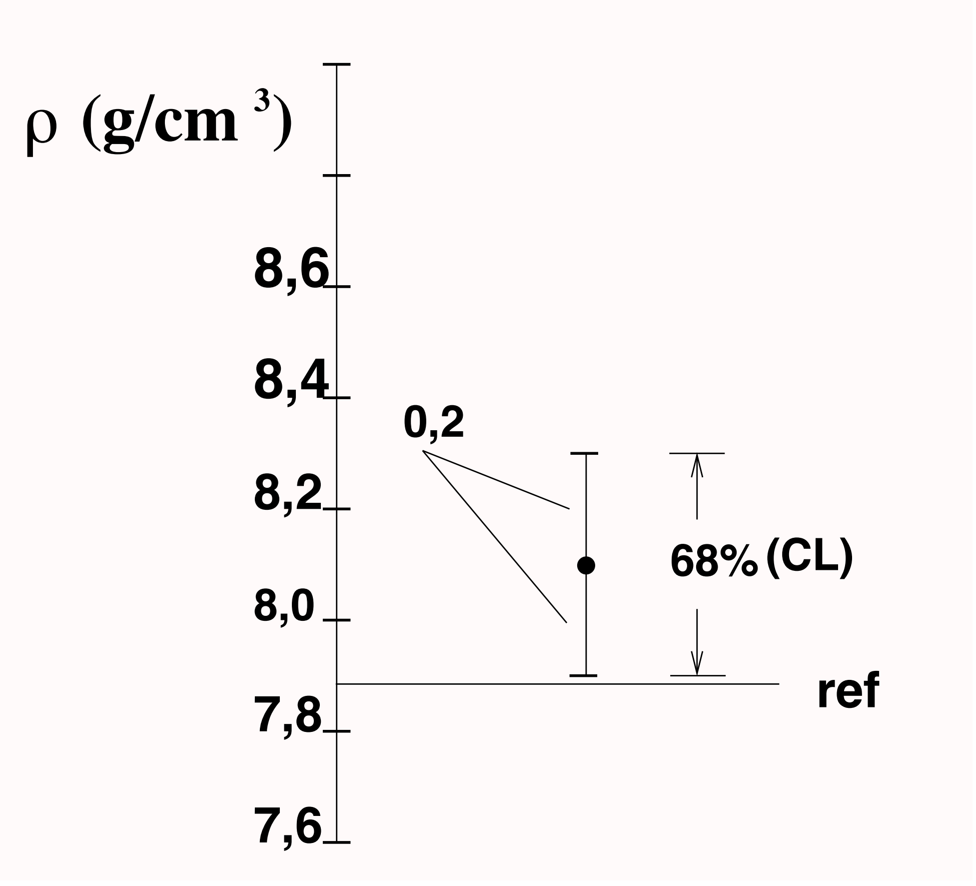
c) (18,20) → (16 + 1σ, 16 + 2σ)

→ Nível de confiança: 95,5% / 2 - 68,3% / 2 = 13,6%

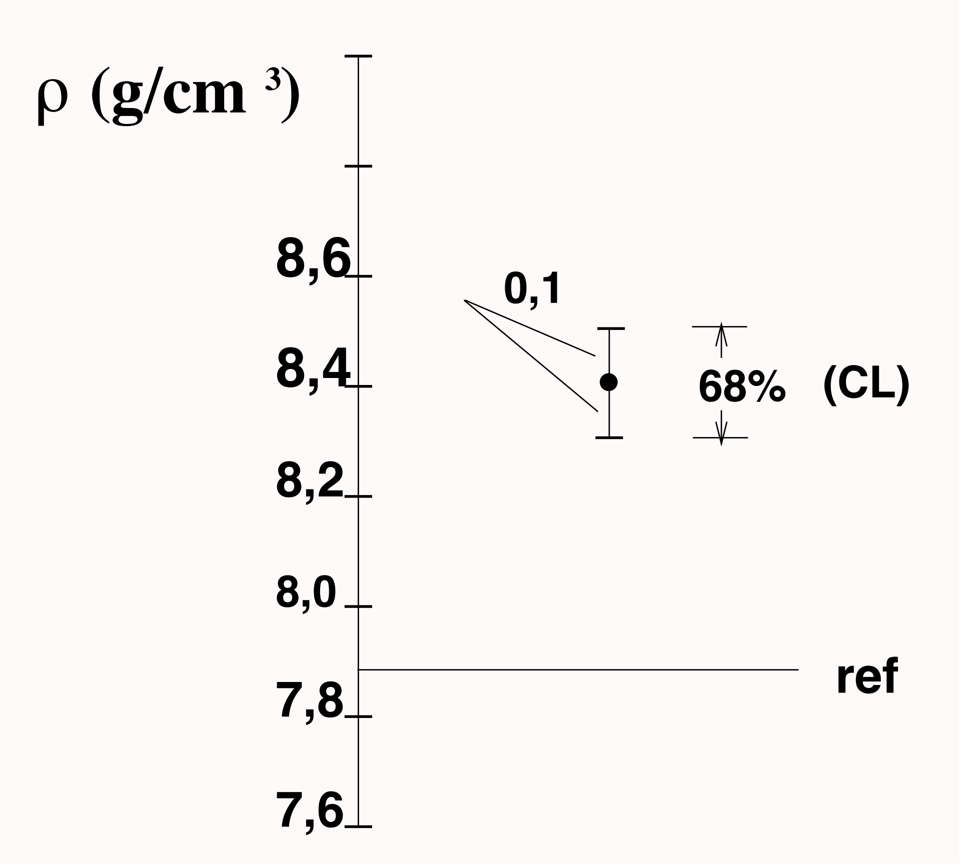
Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a **densidade do ferro**, com valor de referência $\rho_{ref} = 7{,}86\ g/cm^3$

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2\ g/cm^3$



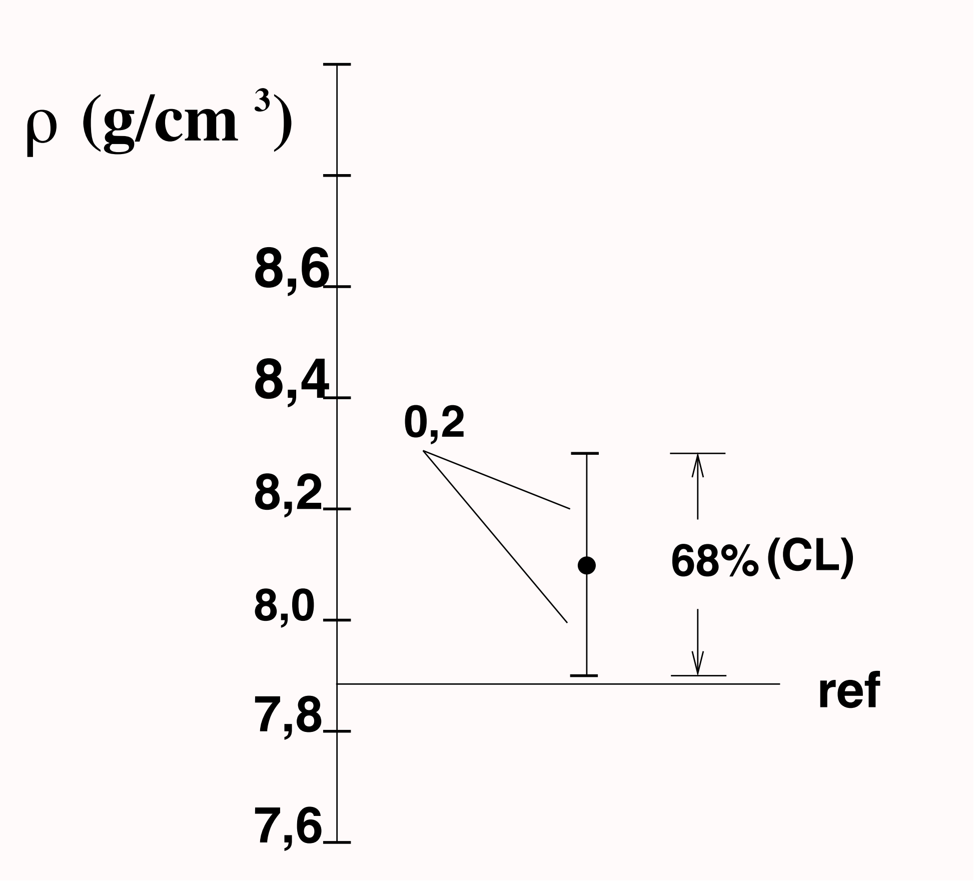
Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1\ g/cm^3$



Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



Discrepância
$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8{,}1 - 7{,}86 | = 0{,}24 \sim 1\sigma$

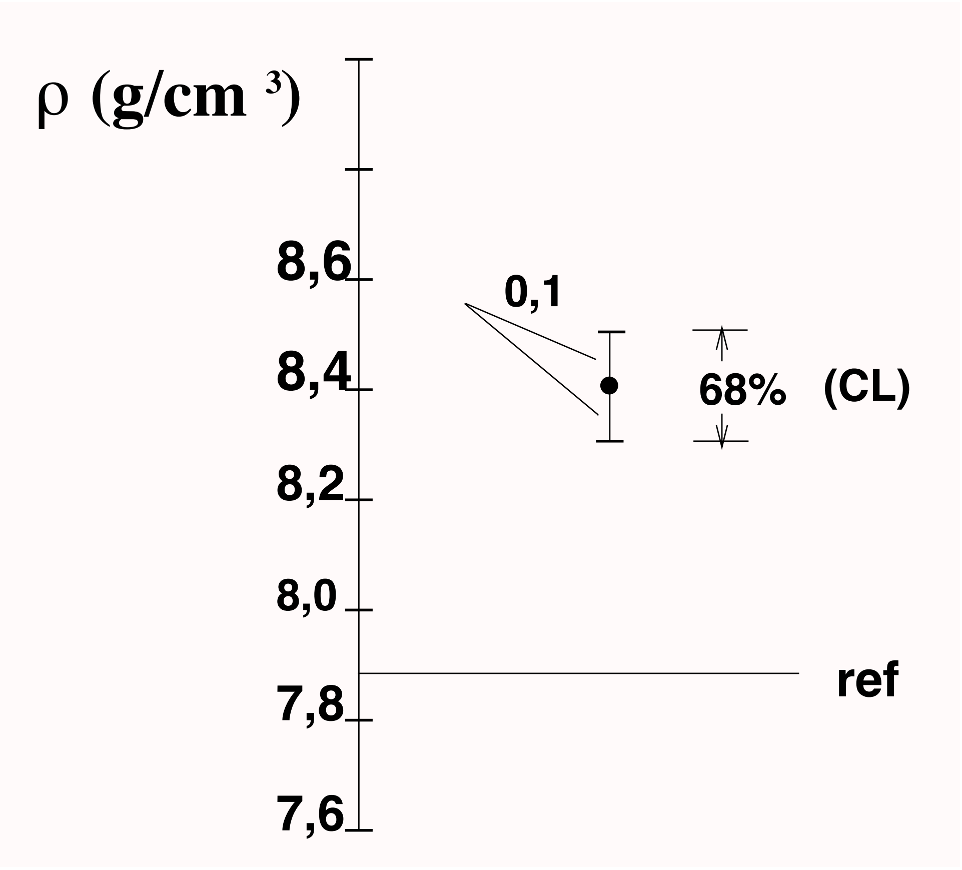
Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas ~68% de que o intervalo contenha o valor esperado

A discrepância não é *estatisticamente significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



Discrepância

$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8{,}4 - 7{,}86 | = 0{,}54 > 3\sigma$

99,7% (CL)

Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável (< 1%) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

<u>Regra prática</u>: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Inconclusivo}$$

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1{,}72 \pm 0{,}04) \,.\, 10^{-19}\ \text{C}$$
$$e_2 = (1{,}75 \pm 0{,}07) \,.\, 10^{-19}\ \text{C}$$
$$e_3 = (1{,}62 \pm 0{,}03) \,.\, 10^{-19}\ \text{C}$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron: $1{,}60217733(49) \,.\, 10^{-19}$ C

i) Discrepância para e_1: $|1{,}72 - 1{,}60217733| \,.\, 10^{-19}\ \text{C} = 0{,}12 \,.\, 10^{-19}\ \text{C}$

$\rightarrow |\, e_1 - e_{ref} \,| \sim 3\sigma$ ($\sigma = 0.04 \,.\, 10^{-19}$ C)

ii) Discrepância para e_2: $|1{,}75 - 1{,}60217733| \,.\, 10^{-19}\ \text{C} = 0{,}15 \,.\, 10^{-19}\ \text{C}$

$\rightarrow 2\sigma < |\, e_2 - e_{ref} \,| < 3\sigma$ ($\sigma = 0.07 \,.\, 10^{-19}$ C)

iii) Discrepância para e_3: $|1{,}62 - 1{,}60217733| \,.\, 10^{-19}\ \text{C} = 0{,}02 \,.\, 10^{-19}\ \text{C}$

$\rightarrow |\, e_3 - e_{ref} \,| < 1\sigma$ ($\sigma = 0.03 \,.\, 10^{-19}$ C)

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9} (g/cm^3)

a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido

b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de 1,8524(4) g/cm^3

a) Estimativa para o valor esperado:

→ Média: 1,9000

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Estimativa padrão para a incerteza:

→ Erro padrão: 0,0316228

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

(1,90 ± 0,03) (g/cm^3)

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1{,}9;\ 1{,}9;\ 1{,}8;\ 2{,}0;\ 1{,}9\}\ (g/cm^3)$$

a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido

b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de 1,8524(4) g/cm^3

b) Discrepância entre (1,90 ± 0,03) (g/cm^3) e o valor de referência 1,8524(4) g/cm^3:

$$| d_1 - d_{ref} | = |1{,}90 - 1{,}8524 |\ g/cm^3 = 0{,}0476\ g/cm^3$$

$$\rightarrow | d_1 - d_{ref} | \sim 1{,}5\sigma \quad (\sigma = 0{,}03\ g/cm^3)$$

→ Discrepância menor que 2σ. Podemos dizer que há compatibilidade entre a medição e o valor de referência

Exercício (3.7.10): Um estudante apresenta como estimativa padrão da medição da aceleração local da gravidade o resultado:

$$g = (9{,}5 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m/s^2}$$

Se o valor de referência é 9,78791660(15) $\mathrm{m/s^2}$, analise o resultado.

i) Discrepância entre $g = (9{,}5 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m/s^2}$ e o valor de referência 9,78791660 $\mathrm{m/s^2}$:

$| g_1 - g_{ref} | = 0{,}287916\ \mathrm{m/s^2}$

→ $| g_1 - g_{ref} | \sim 2{,}8\sigma$ ($\sigma = 0{,}1\ \mathrm{m/s^2}$)

→ Discrepância maior que 2σ e menor que 3σ. Não há compatibilidade entre a medição e o valor de referência. Podemos dizer que o experimento é inconclusivo.

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

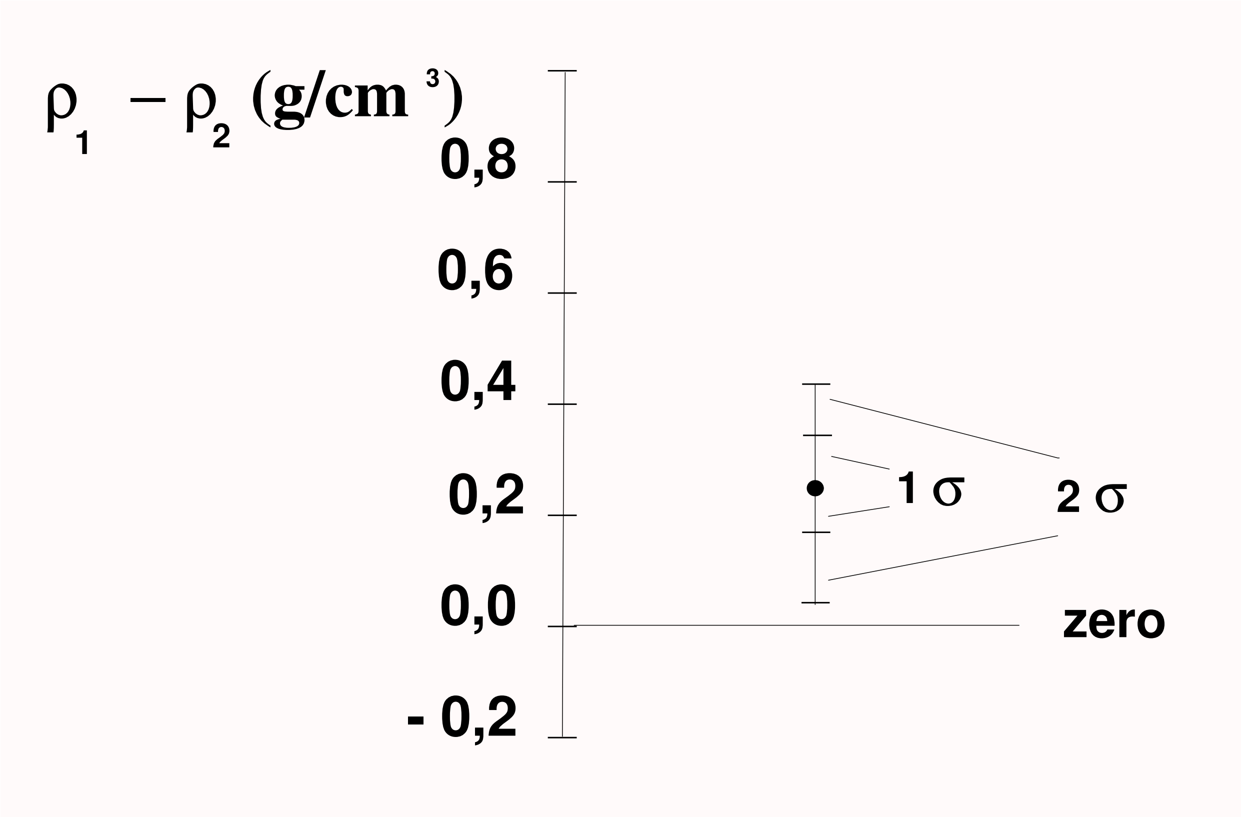
Discrepância: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Erro associado: $\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

As estimativas são compatíveis *entre si* (discrepância < 2σ)

Exercício (3.7.6): Dois experimentos anunciam a descoberta de uma nova partícula, com a medição da massa apresentada, com nível de confiança de 68%, por :

$$m_1 = (7{,}8 \pm 0{,}2)\ .\ 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_2 = (7{,}0 \pm 0{,}3)\ .\ 10^{-27}\ \text{kg}$$

Esses valores podem representar a massa de uma mesma partícula?

i) Erro associado entre m_1 e m_2: $\sigma = 0{,}4\ .\ 10^{-27}$ kg $\quad \sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

ii) Discrepância entre m_1 e m_2: $|7{,}8 - 7{,}0|\ .\ 10^{-27}$ kg $= 0{,}8\ .\ 10^{-27}$ kg

→ $| m_1 - m_2 | = 2\sigma$

→ Discrepância no nível de 2σ. Podemos dizer que o experimento é inconclusivo

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial (E_i) e final (E_f) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3)\ \text{MeV}$$
$$E_f = (60 \pm 9)\ \text{MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

i) Erro associado entre E_i e E_f:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

σ = 9,4868 MeV → 9 MeV

ii) Discrepância entre E_i e E_f: |75 - 60| MeV = 15 MeV

→ $| E_i - E_f | \sim 1{,}6\sigma < 2\sigma$

→ Discrepância menor que 2σ. Podemos dizer que há compatibilidade entre as medições das energias inicial e final na reação

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Média ponderada pelo erro: medições com maior precisão valem mais.

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes {x_i} do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão {σ_i}, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

$$\Rightarrow \rho = (8,34 \pm 0,09)\ \mathrm{g/cm^3}$$

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179{,}0 \pm 5{,}1)\ \mathrm{GeV/c^2}$$
$$m_t(CDF) = (176{,}1 \pm 6{,}6)\ \mathrm{GeV/c^2}$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

i) Erro padrão da combinação de $m_t(D0)$ e $m_t(CDF)$:

$\sigma = 4{,}03555\ \mathrm{GeV/c^2}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

ii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação de $m_t(D0)$ e $m_t(CDF)$:

$m_t = 177{,}916\ \mathrm{GeV/c^2}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$m_t = (177{,}9 \pm 4{,}0)\ (\mathrm{GeV/c^2})$$

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da *f.e.m.* de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$x = 1{,}022\,\text{V} \quad \sigma_x = 0{,}01\,\text{V}$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$x = 1{,}018\,\text{V} \quad \sigma_x = 0{,}004\,\text{V}$$

Determine a estimativa para *f.e.m.* da pilha resultante da combinação das duas amostras.

i) Os erros padrão de cada medida são:

$\sigma_1 = \sigma_x/\sqrt{N\text{-}1} = 0{,}001601\,\text{V}$

$\sigma_2 = \sigma_x/\sqrt{N\text{-}1} = 0{,}001333\,\text{V}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

ii) Erro padrão da combinação:

$\sigma = 0{,}001025\,\text{V}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da f.e.m. de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$x = 1{,}022\,V \quad \sigma_x = 0{,}01\,V$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$x = 1{,}018\,V \quad \sigma_x = 0{,}004\,V$$

Determine a estimativa para f.e.m. da pilha resultante da combinação das duas amostras.

iii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação:

f.e.m. = 1,01964 V

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

f.e.m. = (1,020 ± 0,001) (V)