Física Geral - Laboratório (2016/2)

Estimativas e erros em medidas diretas (I)

Resumo aula 1

- Dados e Medidas: organização em tabelas e histogramas
- Parâmetros de posição de um conjunto de dados
- Parâmetros de dispersão de um conjunto de dados
- Parâmetros de correlação: Covariância e correlação

Parámetros de posição

1. **Média**: Valor médio de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$

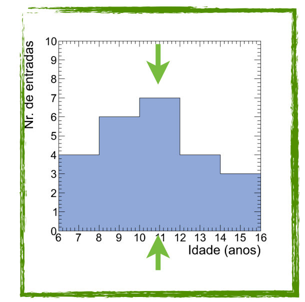
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} x_i$$

ou

classes de frequências

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{M} x_j n_j$$

2. **Moda**: Valor mais frequente de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$ (ou o ponto médio da classe de maior frequência)



3. **Média quadrática**: raiz quadrada da média dos quadrados dos dados

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} x_i^2}$$

4. **Mediana**: valor que divide uma distribuição ordenada de dados de forma que metade dos dados está acima, e metade abaixo deste valor

$$x_{\text{med}} = x_{(N+1)/2}$$

$$x_{\text{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

Parámetros de dispersão

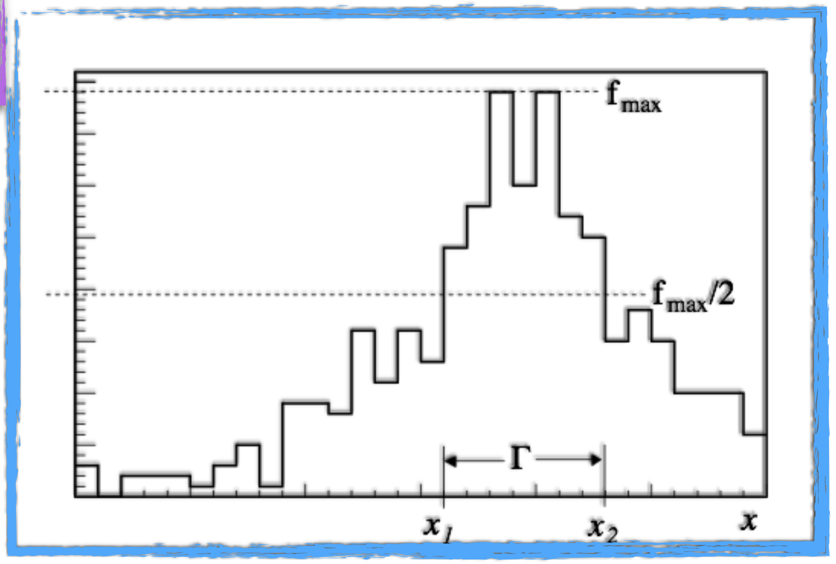
i) Amplitude $\boxed{A = x_{\max} - x_{\min}}$

ii) Desvio medio $\boxed{\overline{|\delta x|} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\delta x_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|}$

iii) Variância $\boxed{\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\delta x_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$

iv) Desvio padrão $\boxed{\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}}$

v) Largura a meia altura $\boxed{\Gamma = x_2 - x_1}$



Parámetros de correlação

- Covariância

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

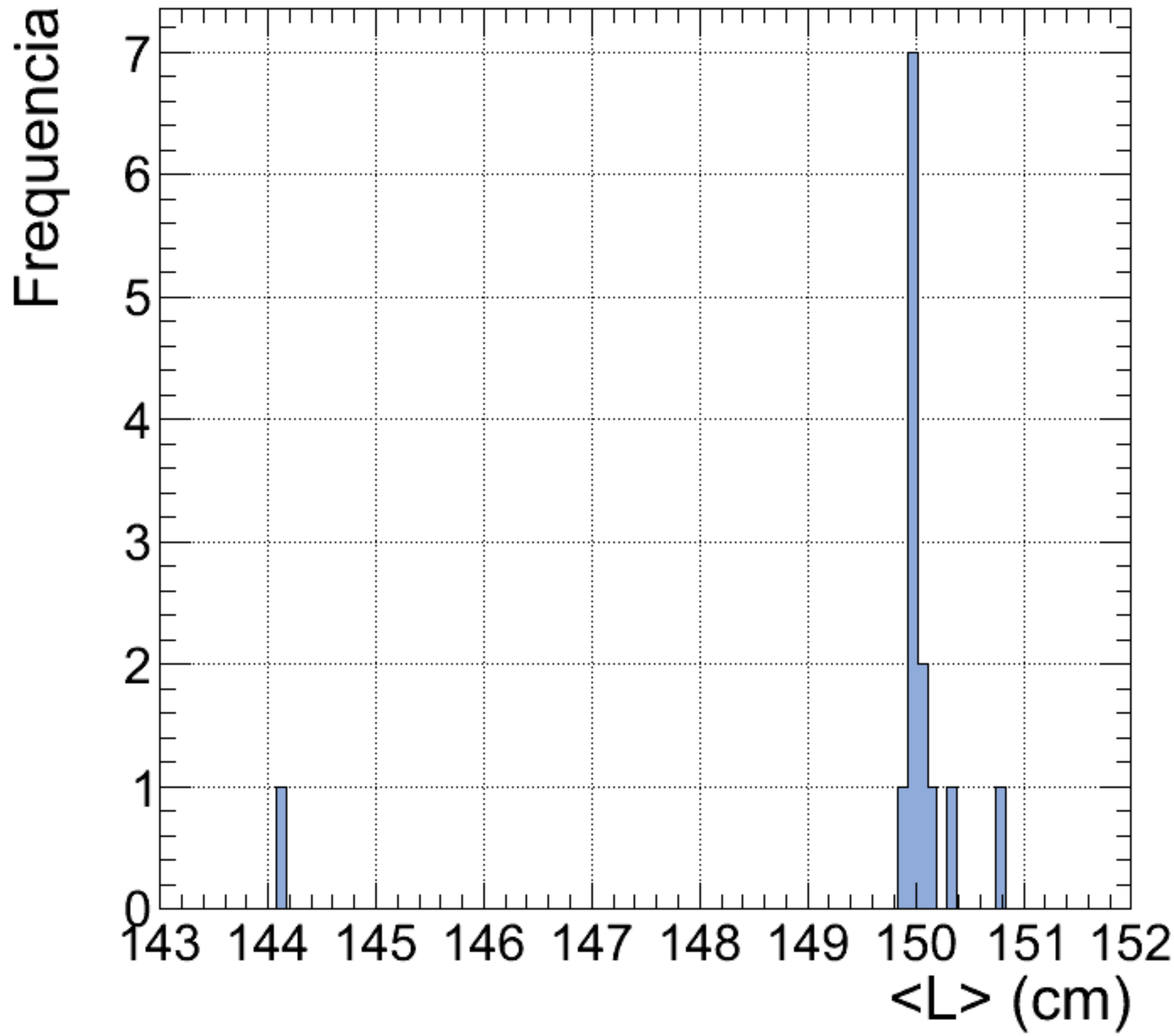
- Coeficiente de correlação linear de Pearson

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Exemplos de medidas diretas do comprimento das mesas da sala 3045 F

Medida	L (cm)
1	150
2	150,1
3	150,8
4	150
5	150
6	144,1
7	150
8	150,3
9	149,9
10	150
11	150
12	150,1
13	150,2
14	150

Medida	L (cm)
1	150
2	150,1
3	150,8
4	150
5	150
6	144,1
7	150
8	150,3
9	149,9
10	150
11	150
12	150,1
13	150,2
14	150



Experimentos: medidas diretas

Experimento de <u>medidas diretas</u> de uma grandeza:

- Aquisição de um conjunto de dados através de medições repetidas e independentes de uma mesma grandeza
- Medições independentes realizadas nas mesmas condições experimentais, ambientais, etc.
- Objetivo: Estimativa do <u>valor esperado</u> da grandeza sendo medida

No processo de medição de uma grandeza, há inevitavelmente <u>incertezas</u>

- Imperfeições instrumentais, limitações observacionais, condições ambientais, etc.
- Hipóteses, modelos teóricos
- Natureza possivelmente aleatória do fenômeno

Valor esperado de uma grandeza

Valor esperado: valor hipotético, μ, de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas *indefinidamente*

É claro que **não podemos repetir** uma medição **infinitamente**…

Dessa forma, fazemos uma **estimativa** para o valor esperado, a partir de um **conjunto finito** de medidas da grandeza

Chamamos esse conjunto finito de uma **amostra** de todos os possíveis valores para as medidas, ou **população**

Resultado de uma medição

Resultado = *estimativa do valor esperado* ± *erro* (*unidade*)

$$\boxed{x \pm \epsilon_x(\text{unidade})}$$

Estimativa do valor esperado

A partir de varias medições de uma grandeza, com instrumentos bem calibrados e procedimentos apropriados, e para um **grande número** de medidas diretas, a **média** da distribuição de frequência dos dados tende ao **valor esperado da grandeza** *(pode ser demostrado em base ao teorema central do limite da estatística)*

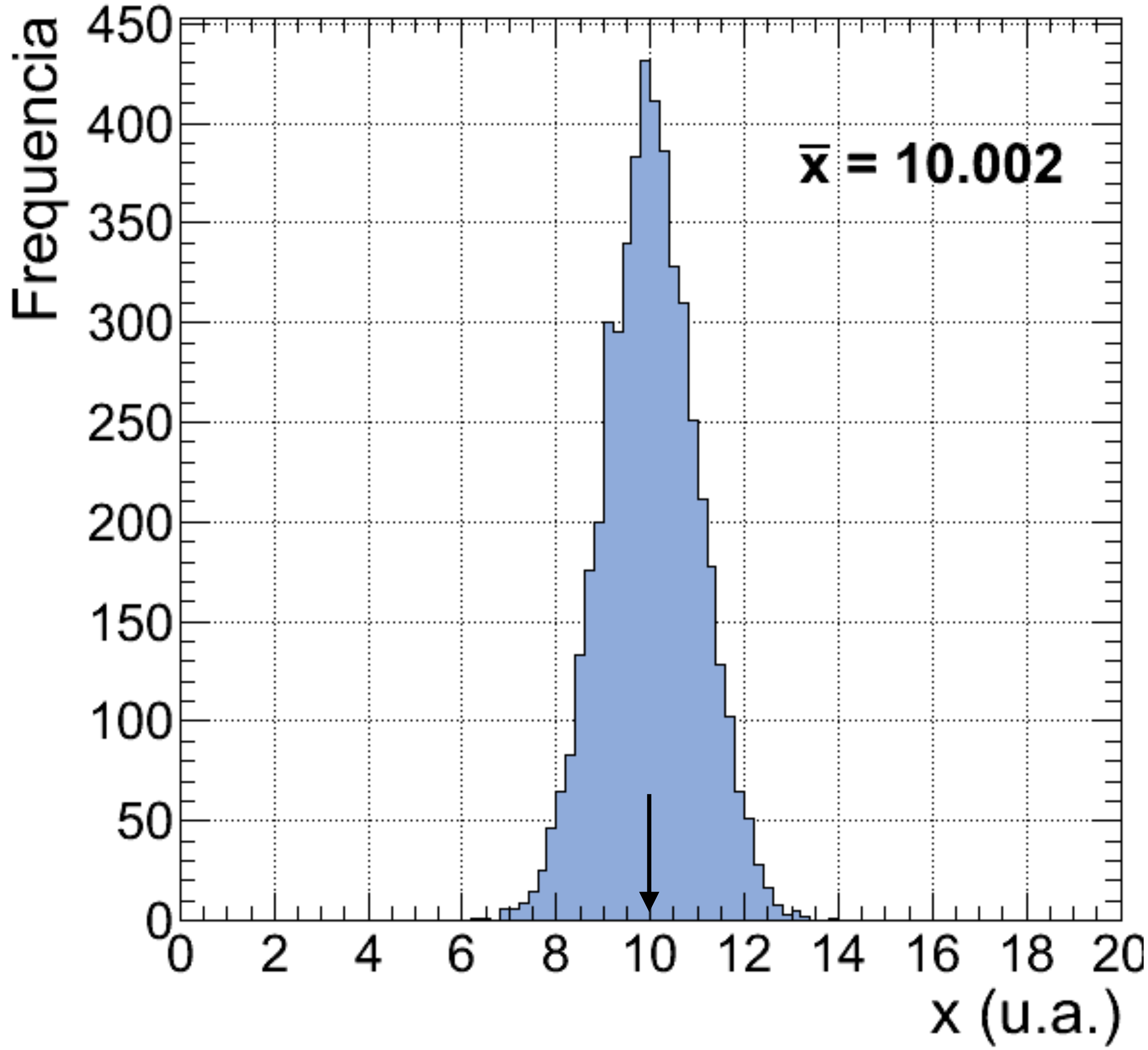
A distribuição de **frequência dos dados** é chamada de distribuição amostral

Ou seja, a melhor estimativa para o valor esperado de uma grandeza, x, a partir de uma amostra $\{x_i\}$ de dados, é a média

$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$

(Podemos pensar no *limite* para um número grande de medidas, ou seja, $N \rightarrow \infty$)

Estimativa do valor esperado



Incertezas aletórias e sistemáticas

Incertezas aleatórias: devido a flutuações inevitáveis no processo de medição, que provocam a dispersão das medidas em torno da média

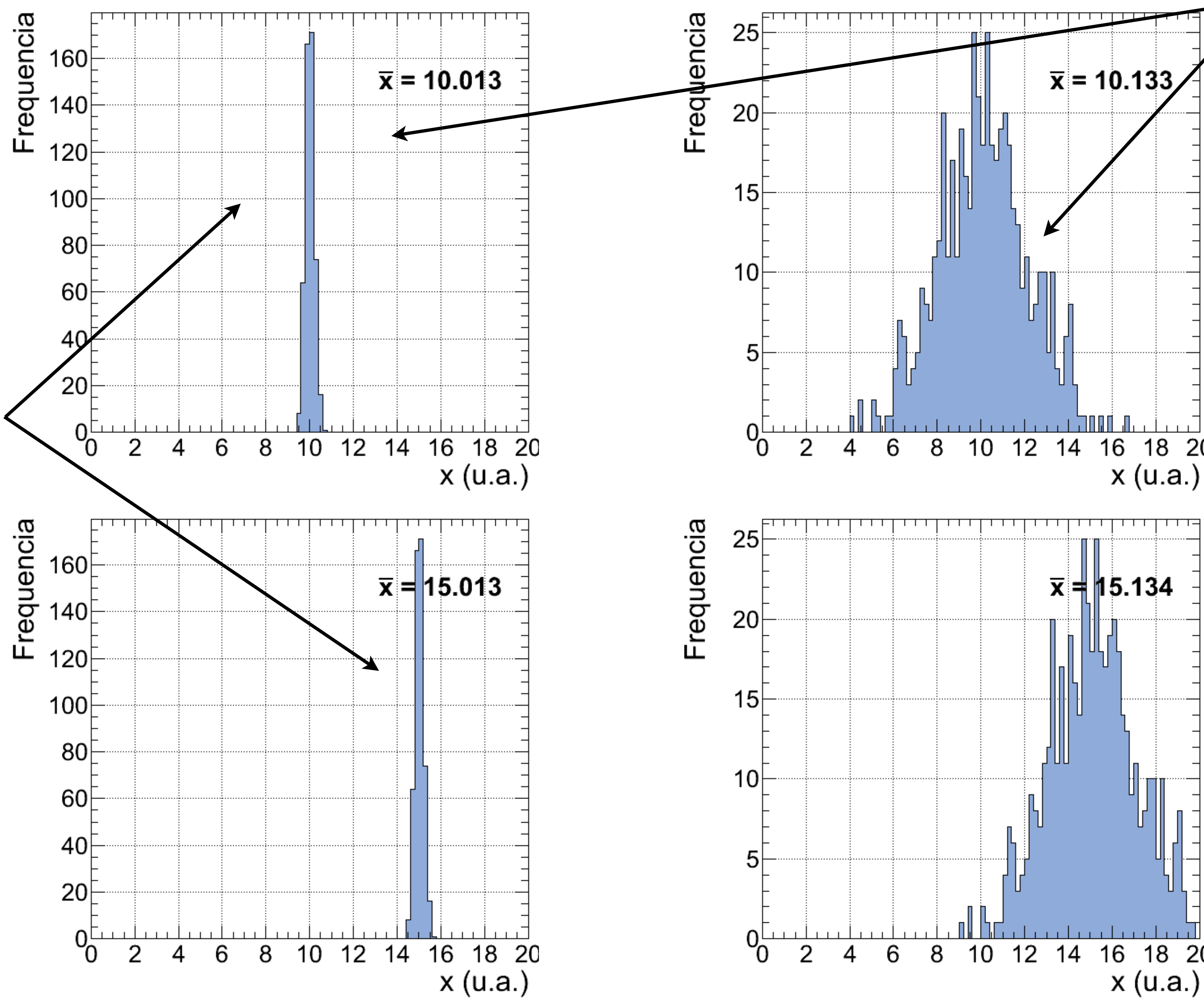
Incertezas sistemáticas: desvios em geral regulares, devido a imperfeições instrumentais, observacionais, ou do modelo teórico

As *incertezas aleatórias* estão associadas à <u>precisão</u> do experimento, enquanto as *incertezas sistemáticas*, com a sua <u>exatidão</u>

Medições: precisão e exatidão

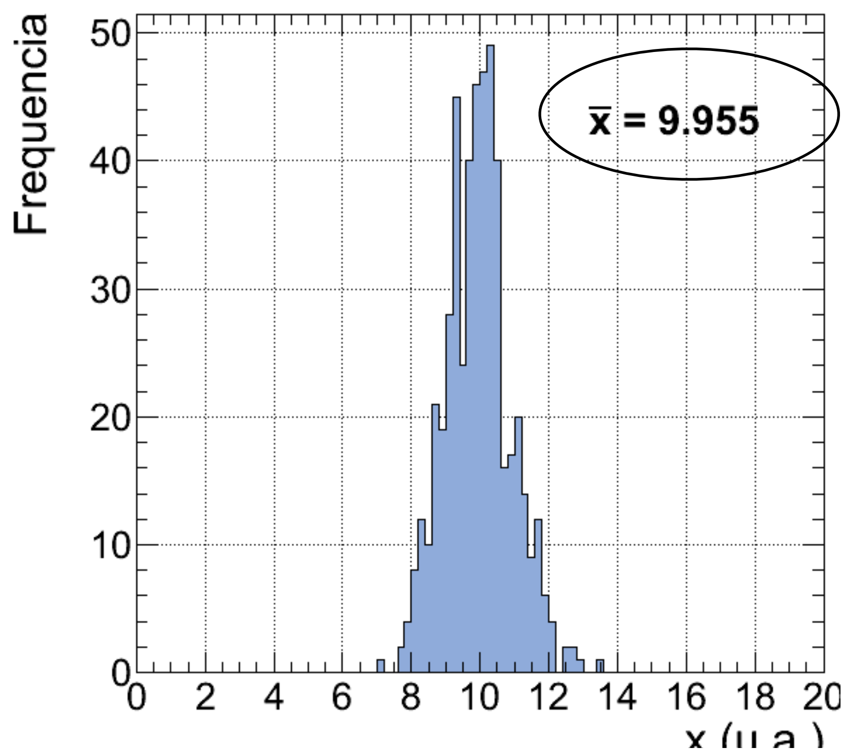
exato

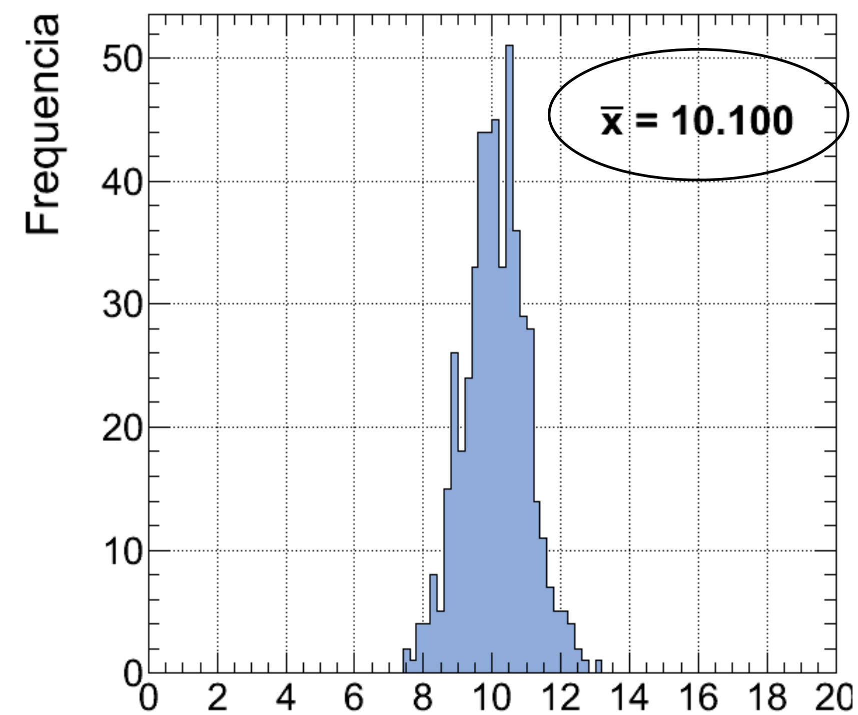
preciso



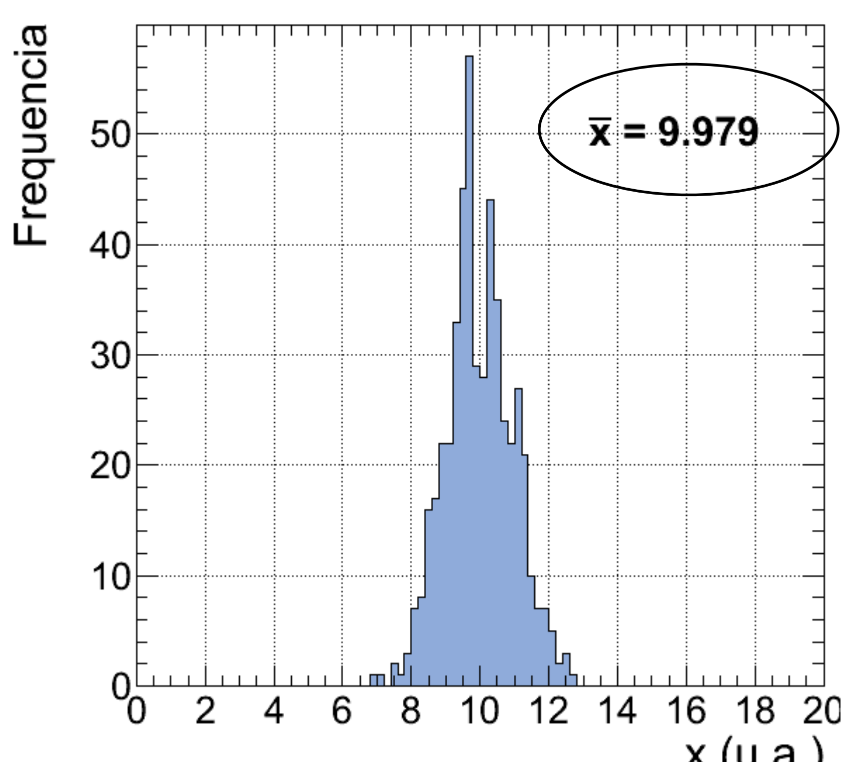
impreciso
e
inexato

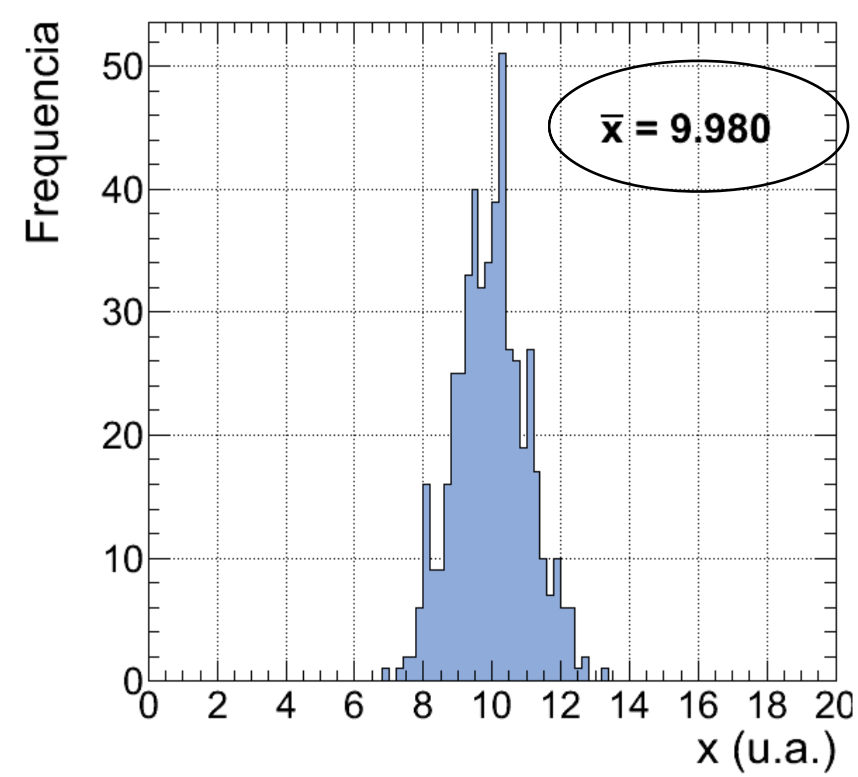
Erro da média



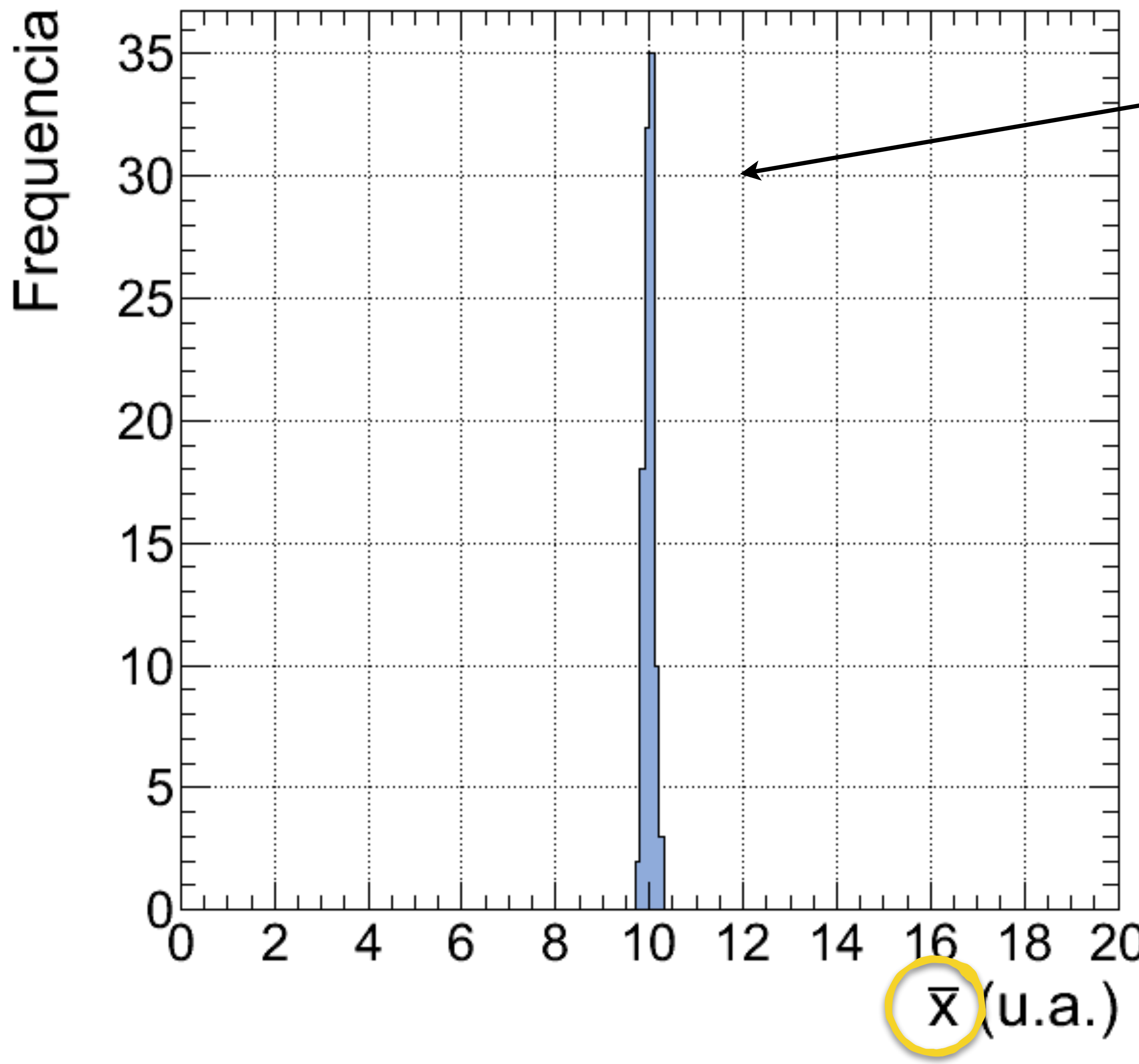


4 amostras da mesma grandeza
->
4 valores da média





Erro da média



DISTRIBUIÇÃO DAS MÉDIAS de 100 "EXPERIMENTOS", cada um com 100 medidas

⟶

Note que o "ERRO DA MÉDIA" é menor que o "ERRO DA MEDIDA"

Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de N medidas diretas.

"desvio padrão experimental" ou "amostral"

Vamos estimar primeiramente o erro de cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\sigma_x$$

desvio padrão (populacional)

O erro da média pode ser aproximado por:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}}$$

O desvio padrão experimental (s_x) poderá ser frequentemente representado igualmente por σ_x

Estimativa do erro da medida e da média

Para um **número muito grande** de medidas:

$$N \to \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Quanto maior o número de medidas em um experimento, menor o erro estimado "da média"

Resultado de uma medição: Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro}\ (\textit{unidade})}$$

$$\bar{x} \qquad\qquad\qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Note que aqui estamos estimando o que definimos antes como *incertezas aleatórias*. **Incertezas aleatórias podem ser reduzidas por repetição (maior número N de medidas).**

Incertezas sistemáticas, no entanto, não podem em geral ser reduzidas por mera repetição. Elas dependem do entendimento do instrumento e das técnicas de medição. A partir de um número suficientemente grande de medidas, elas passam a ser *dominantes*.

Resultado de uma medição: Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro}\ (\textit{unidade})}$$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Exemplo:

$$\bar{x} = 10,0835 \longrightarrow \bar{x} = 10,08 \pm 0,07(\mathrm{unid.})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0,072$$

Número de algarismos significativos determinado pelo valor do erro

Exercício (3.7.2): Dado um conjunto de medidas da aceleração da gravidade *g*:

$$\{9{,}90;\ 9{,}68;\ 9{,}57;\ 9{,}72;\ 9{,}80\}\ (\mathrm{m/s^2})$$

Determine a estimativa padrão para a aceleração da gravidade

i) A melhor estimativa para o valor esperado é a média: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

→ Média: 9,734 m/s^2

ii) A estimativa padrão para a incerteza é dada por: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$

→ Erro padrão: 0,0556417 m/s^2

iii) Representamos o erro com um algarismo significativo e a medida com o mesmo número de casa decimais:

→ Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$g = (9{,}73 \pm 0{,}06)\ \mathrm{m/s^2}$$

Atividade de aula (Roteiro)

1- Realizar a medição dos valores de resistência de 50 resistores iguais

2- Representar o conjunto de dados em um histograma e calcular a média e o desvio padrão

3- Calcular as estimativas do erro da medida e o erro da média

4- Apresente o resultado do conjunto de medidas, com o número adequado de *algarismos significativos*

Multímetro digital

Display digital de "3 1/2" dígitos:

$d_{1/2}$	d_3	d_2	d_1

Número de "contagens": 0 - 1999

Funções:

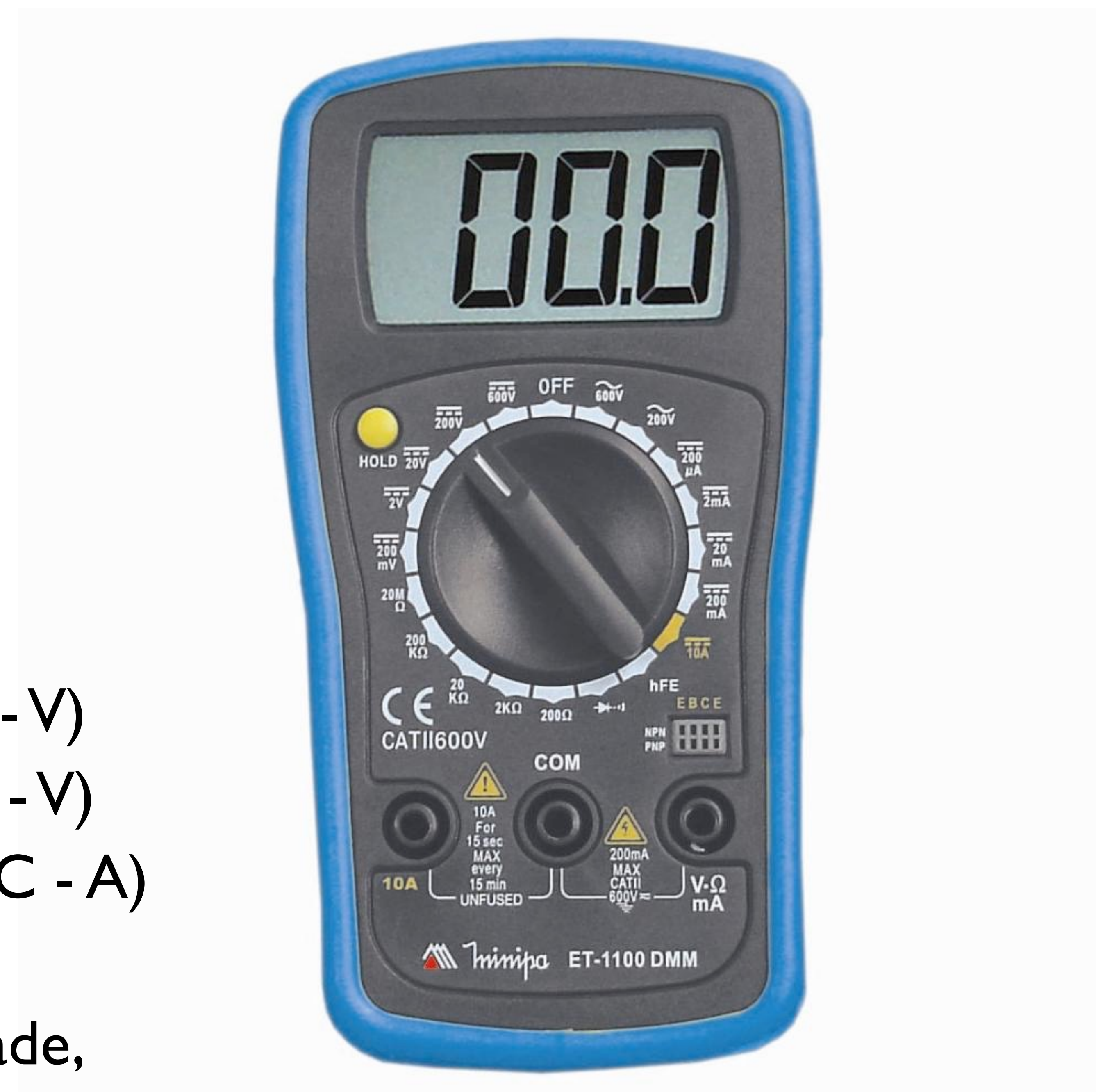
Medição de tensão contínua (DC - V)

Medição de tensão alternada (AC - V)

Medição de corrente contínua (DC - A)

Medição de resistência (Ω)

Possivelmente: Teste de continuidade, testes de diodos e transistores,...



Multímetro digital

Função de medida de tensão contínua

Função de medida de resistência (a posição pode variar de multímetro para multímetro)

Conectores para pontas de prova

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	0	0	2

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução: 1 V

(Variação do dígito menos significativo)

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	0	1.	6

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução: 0,1 V = 100 mV

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	1.	5	7

DC

600 V

200 V

$\boxed{20\ V}$

2 V

200 mV

Resolução: 0,01 V = 10 mV

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

1.	5	7	1

Resolução: 0,001 V = 1 mV

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

Mostrador com dígito "1" à esquerda:
valor acima do máximo da escala

1		.	

Resolução: 0,1 mV = 100 μV

DC

600 V

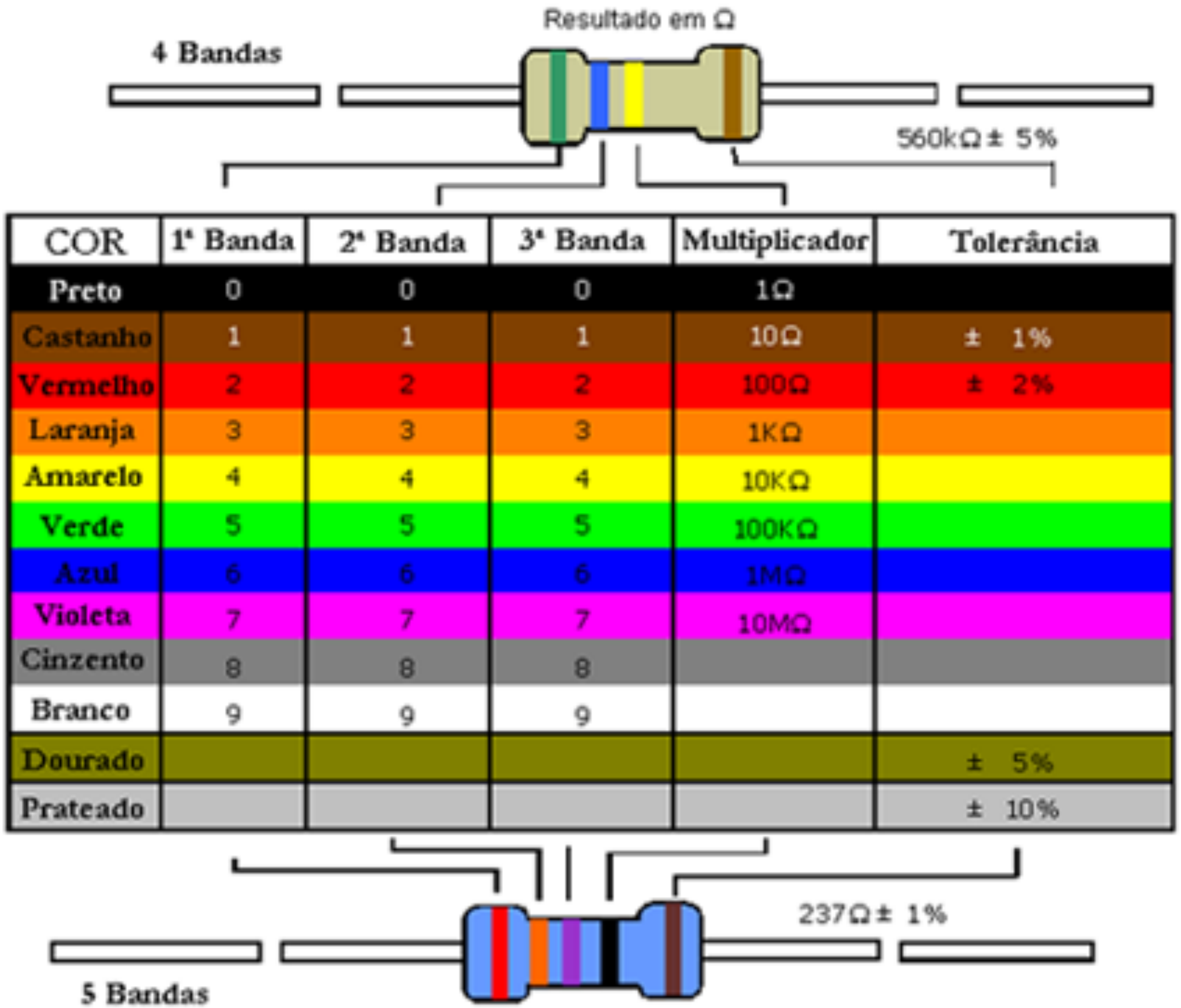
200 V

20 V

2 V

$\boxed{\text{200 mV}}$

Como ler o código de cores de um resistor



COR	1ª Banda	2ª Banda	3ª Banda	Multiplicador	Tolerância
Preto	0	0	0	1Ω	
Castanho	1	1	1	10Ω	± 1%
Vermelho	2	2	2	100Ω	± 2%
Laranja	3	3	3	1KΩ	
Amarelo	4	4	4	10KΩ	
Verde	5	5	5	100KΩ	
Azul	6	6	6	1MΩ	
Violeta	7	7	7	10MΩ	
Cinzento	8	8	8		
Branco	9	9	9		
Dourado					± 5%
Prateado					± 10%

Cor	Código
Preto	0
Castanho	1
Vermelho	2
Laranja	3
Amarelo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Cinza	8
Branco	9

Precisão

Castanho	± 1%
Vermelho	± 2%
Dourado	± 5%
Prata	± 10%