

Física Geral - Laboratório

Estimativas e erros em medidas diretas (II)
Níveis de confiança, compatibilidade e combinação



Resumo: estimativa do valor esperado

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro de cada
medida



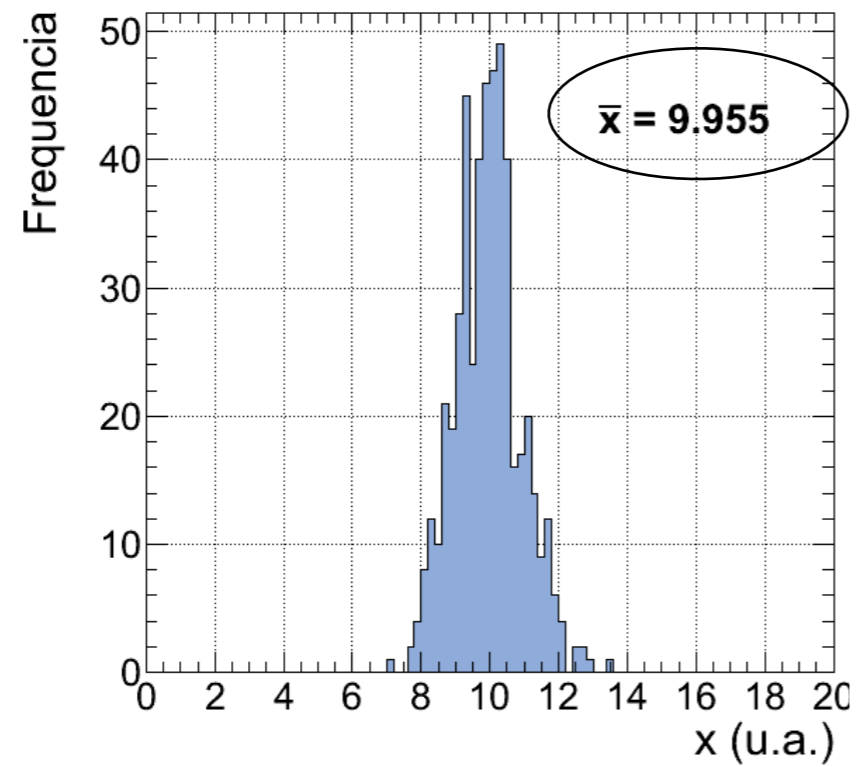
$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Estimativa do erro da
média

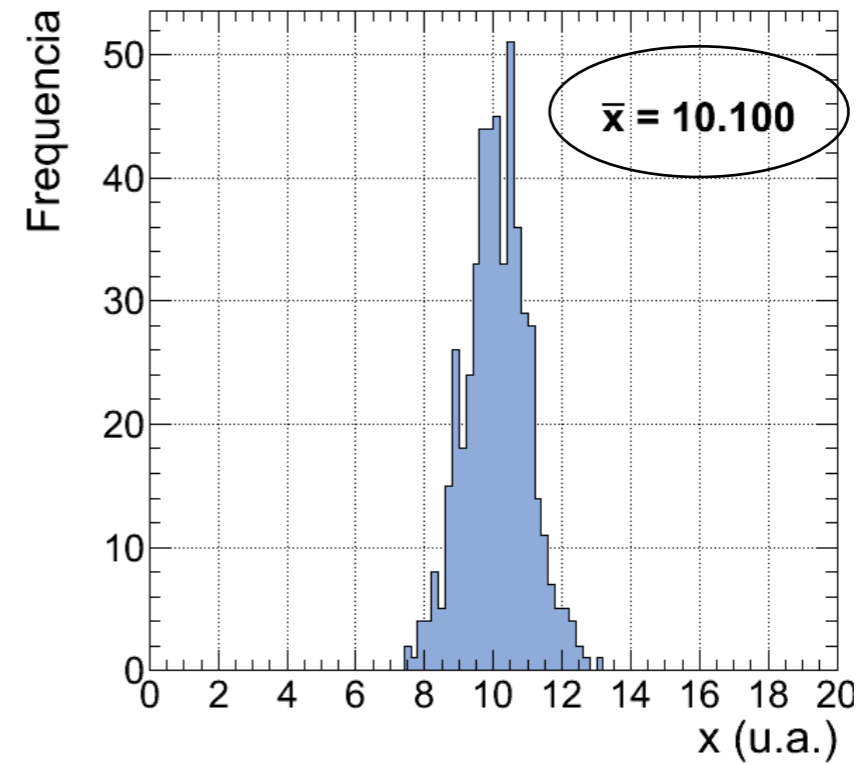
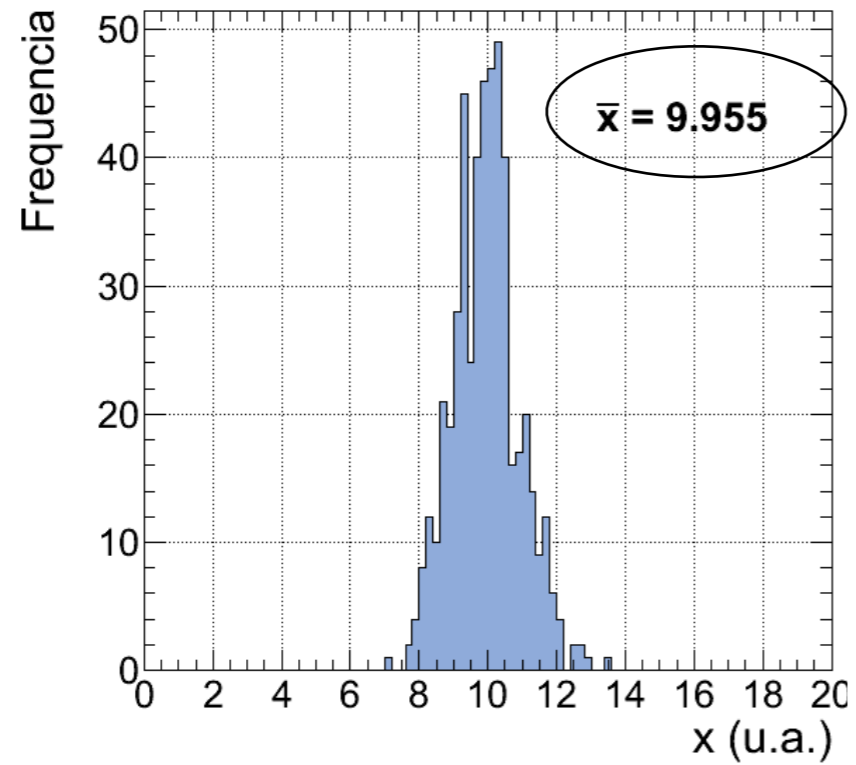


$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

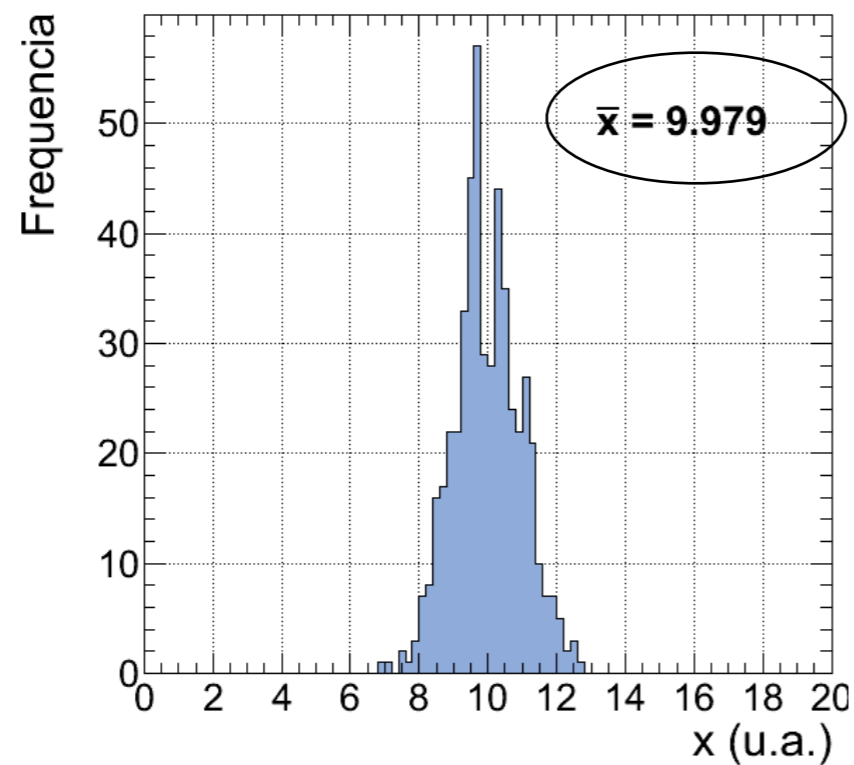
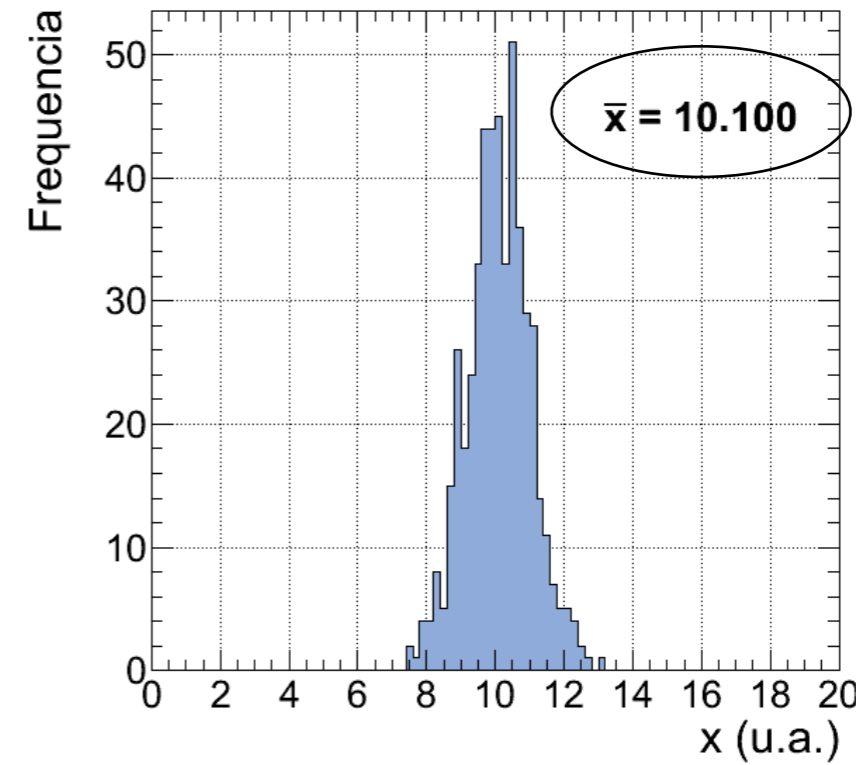
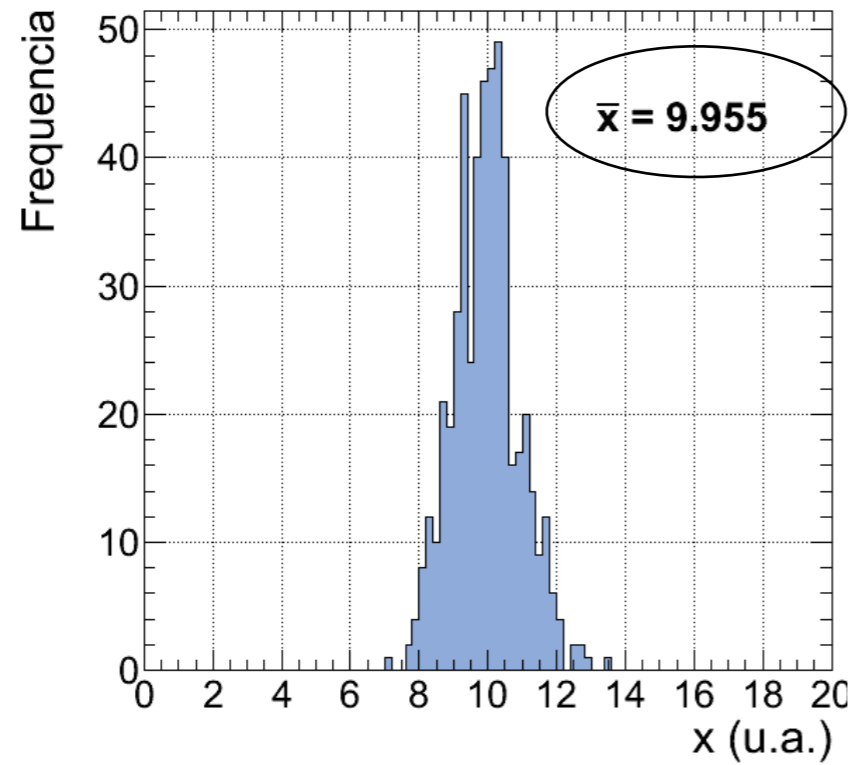
Resumo: Erro da média



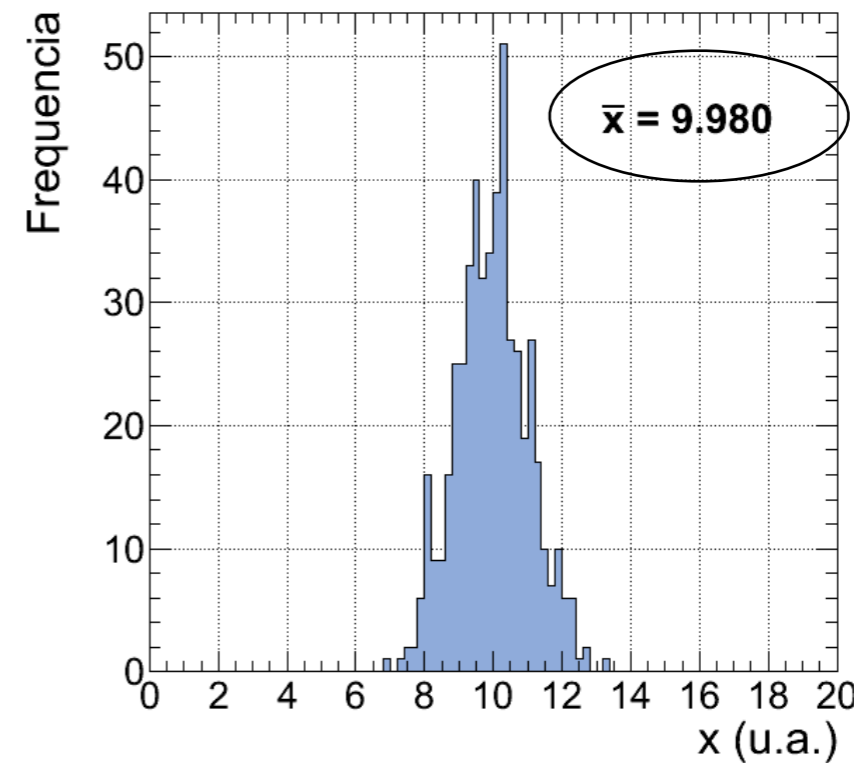
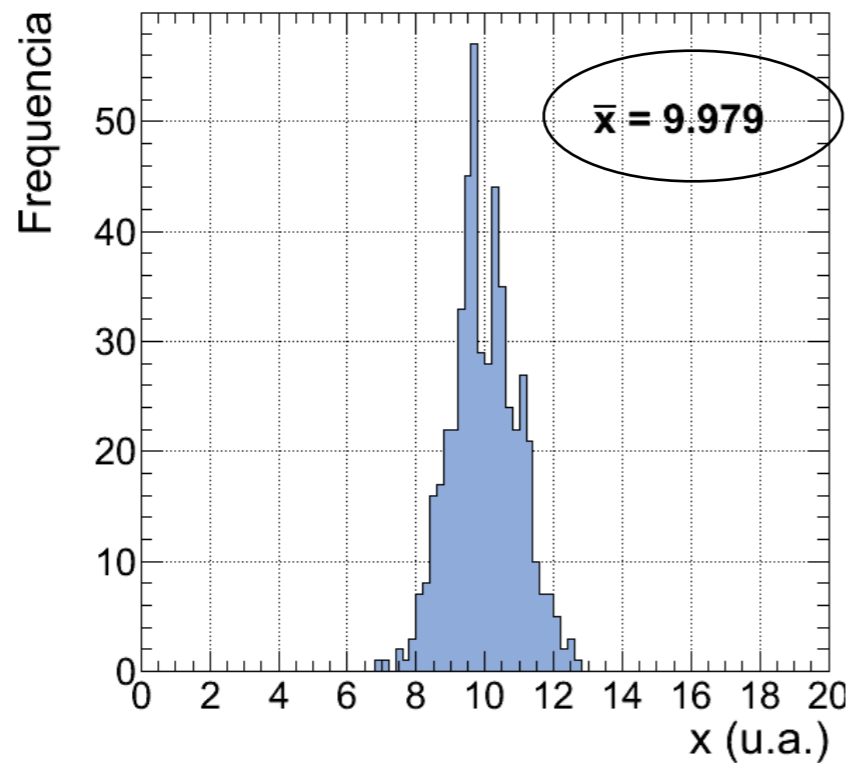
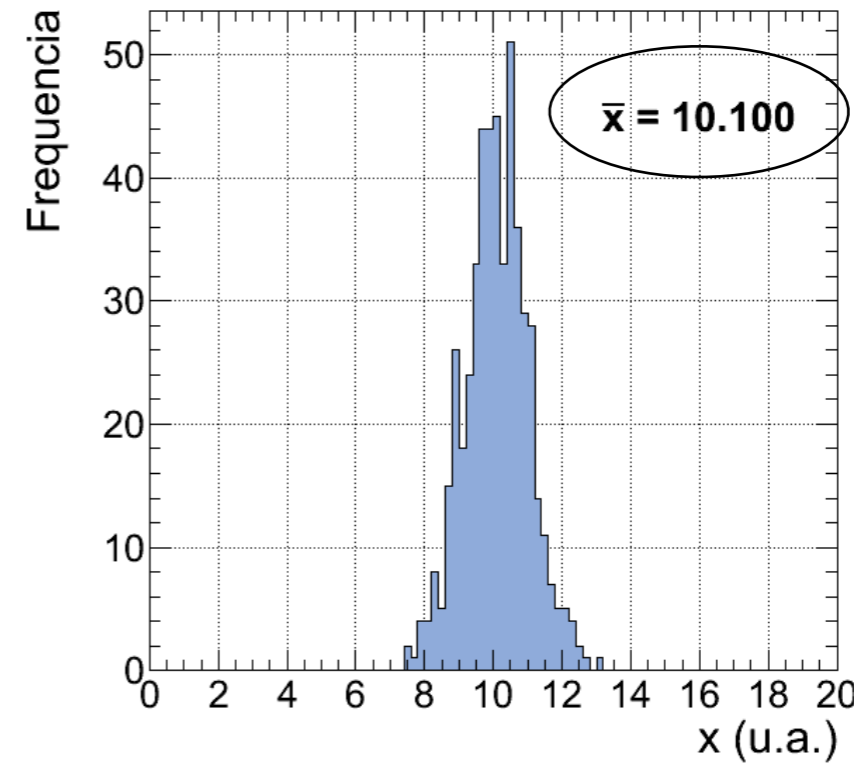
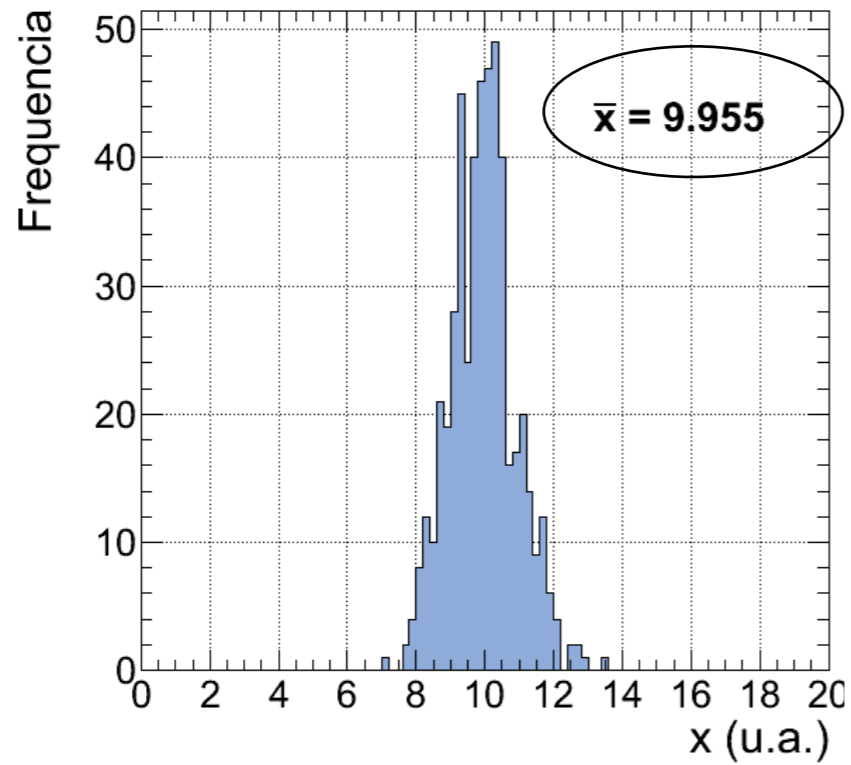
Resumo: Erro da média



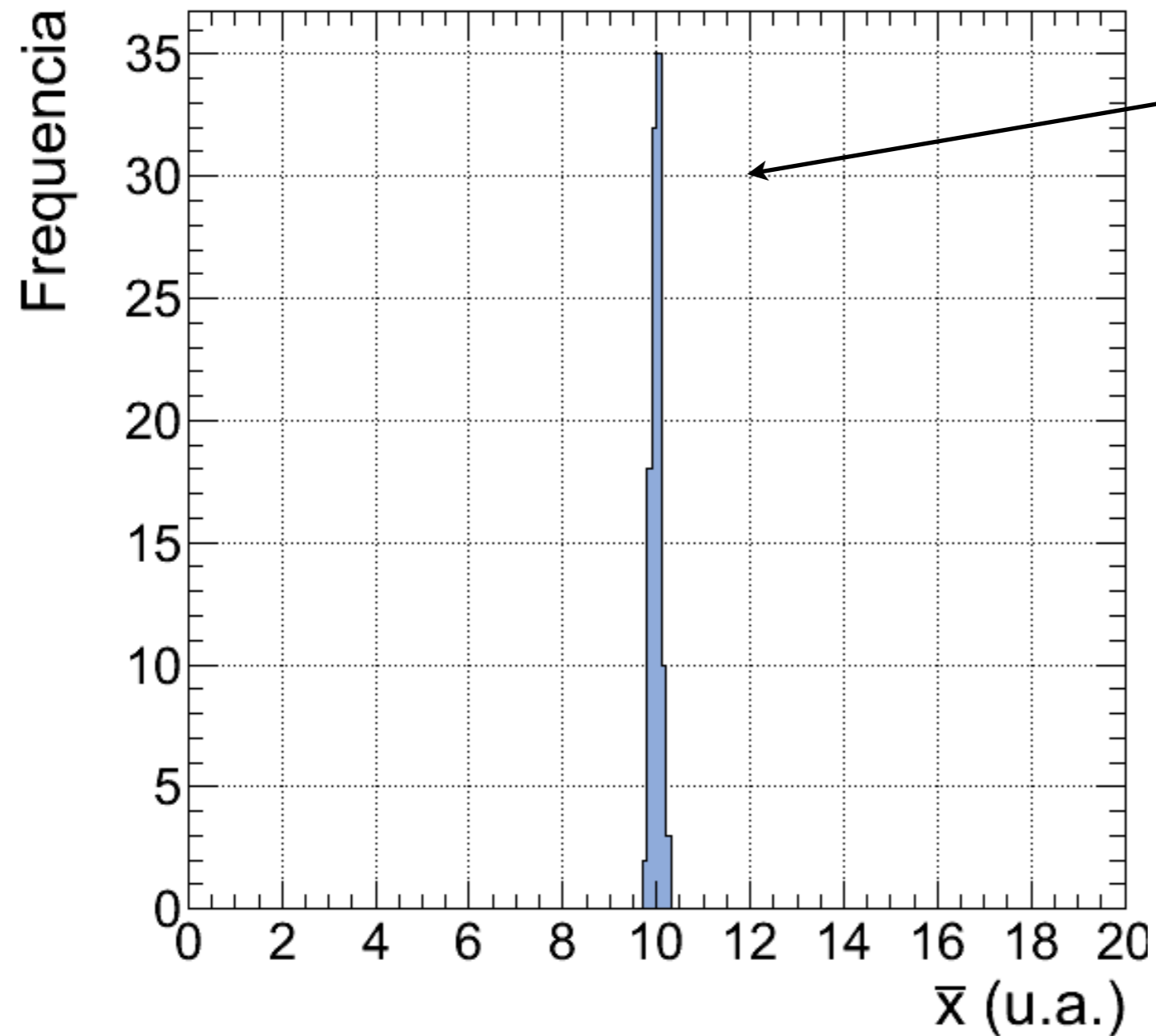
Resumo: Erro da média



Resumo: Erro da média



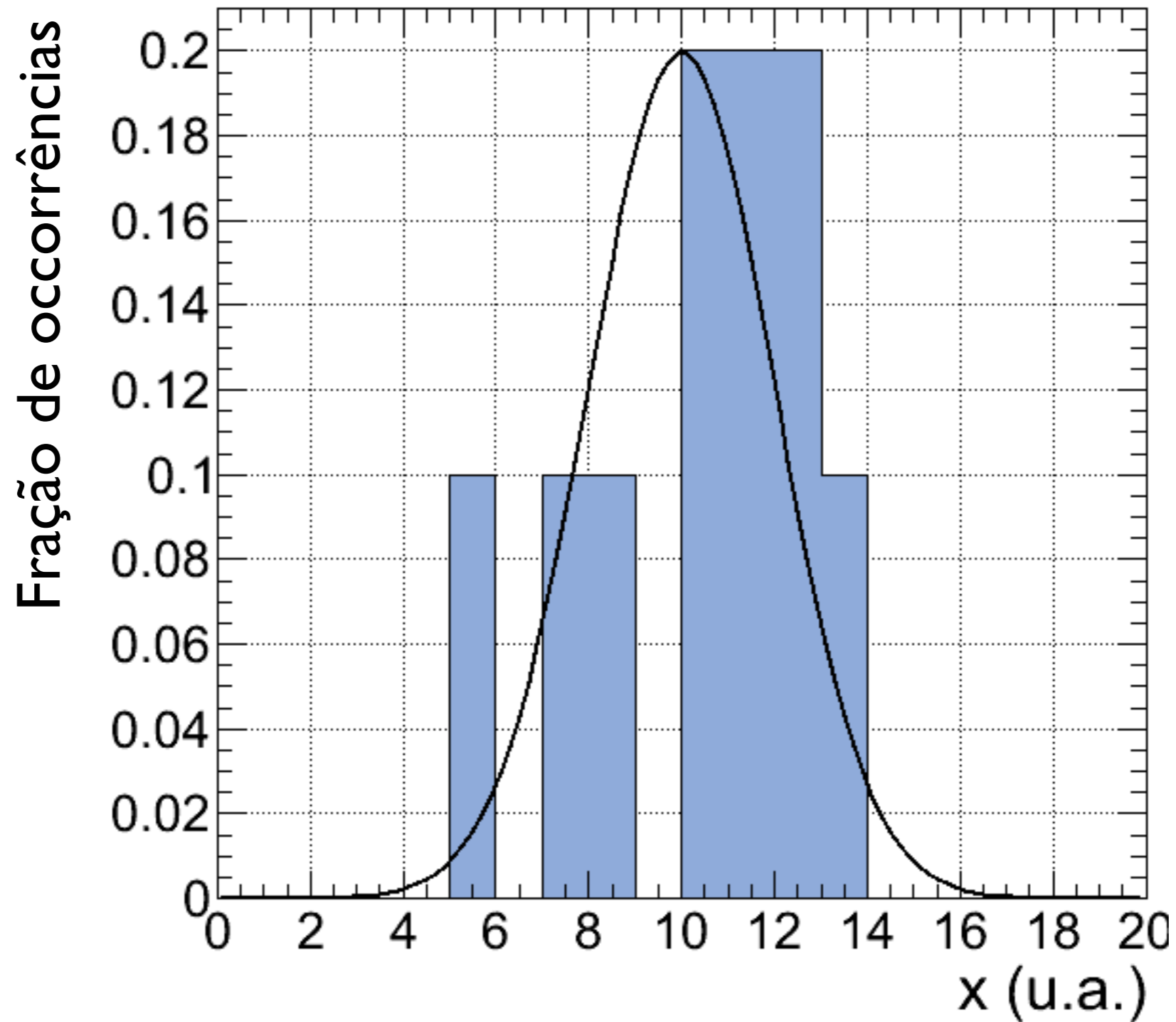
Resumo: Erro da média



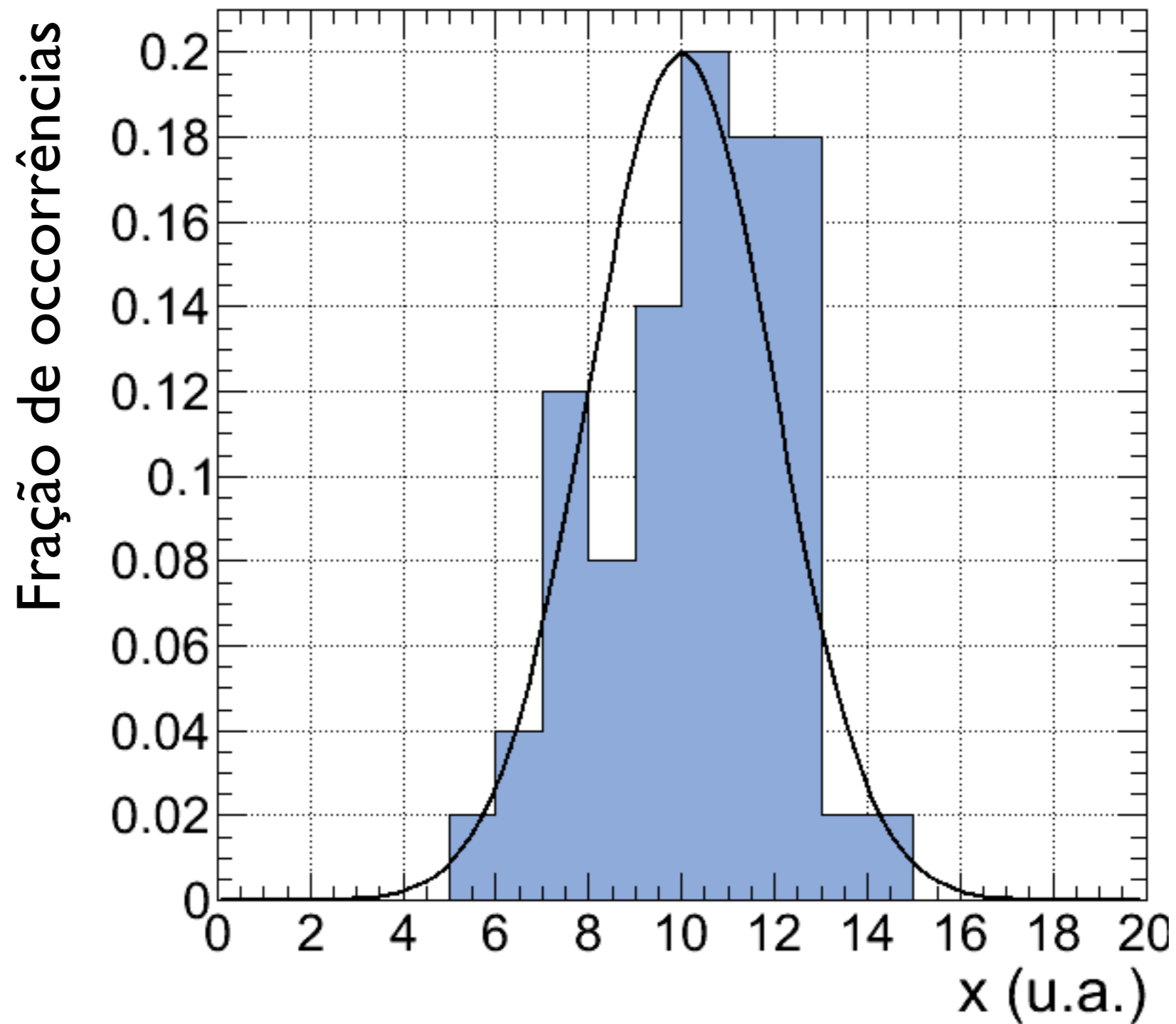
Distribuição das médias de 100 “experimentos”, cada um com 100 medidas

Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana

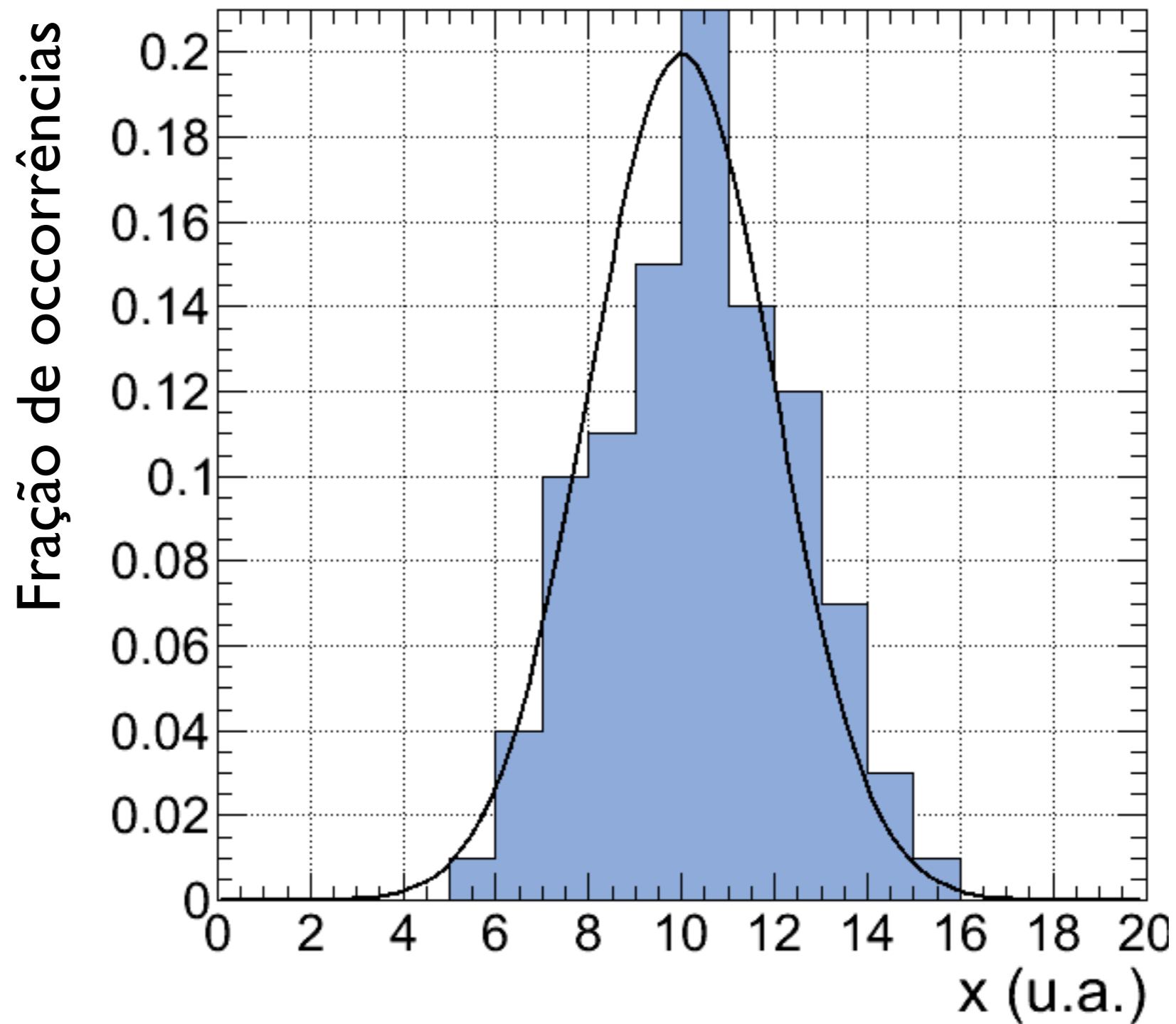
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



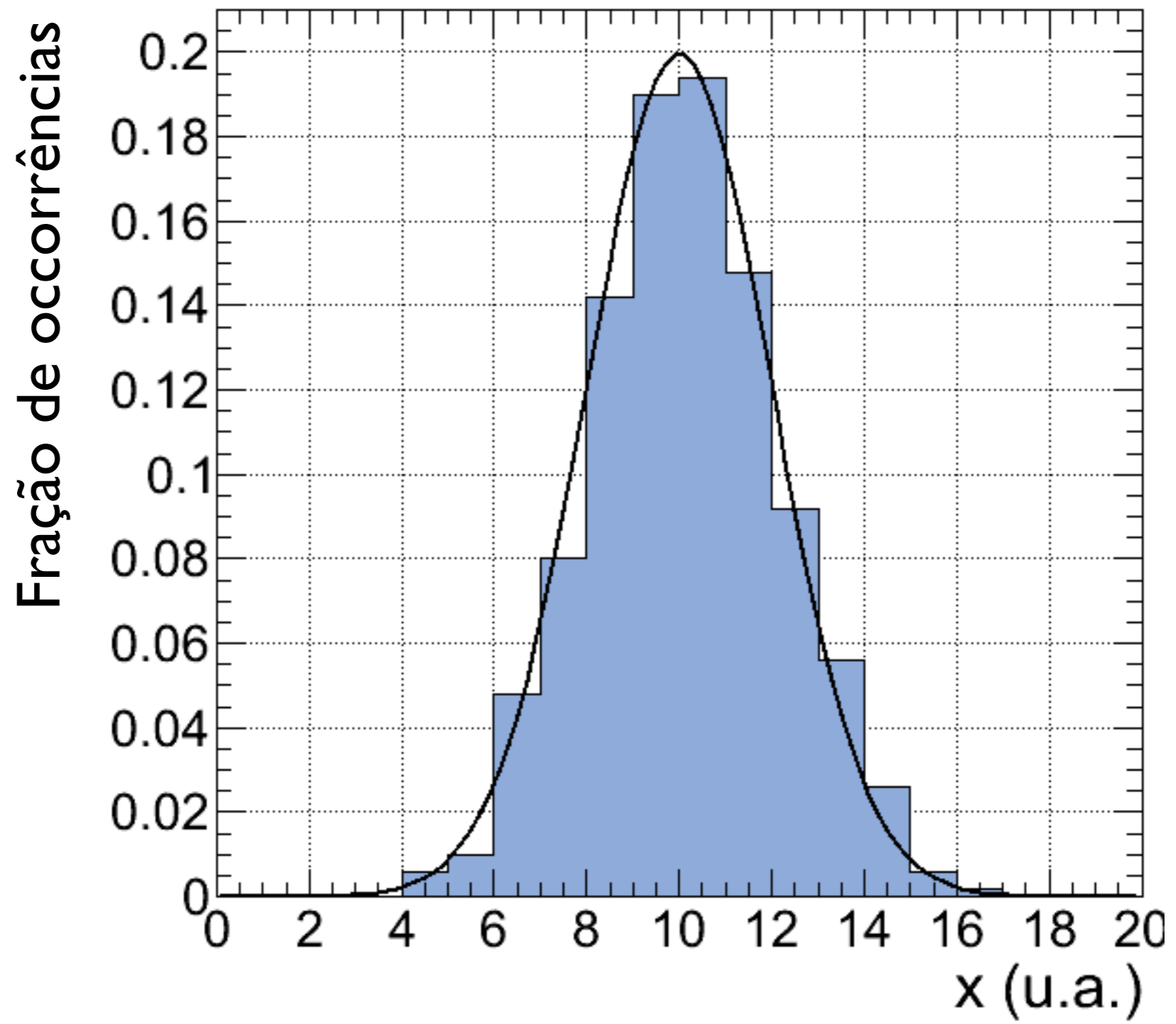
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



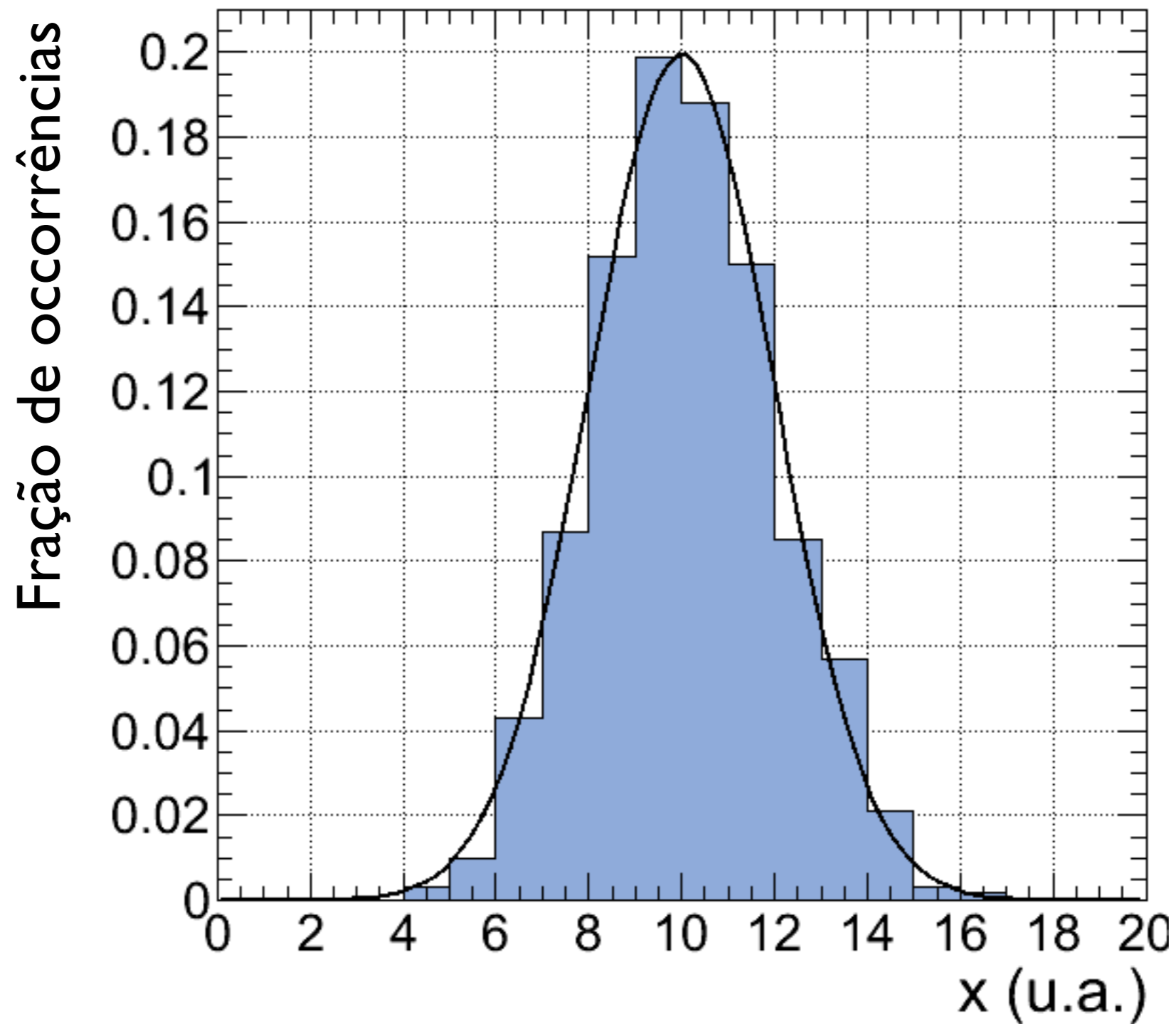
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana

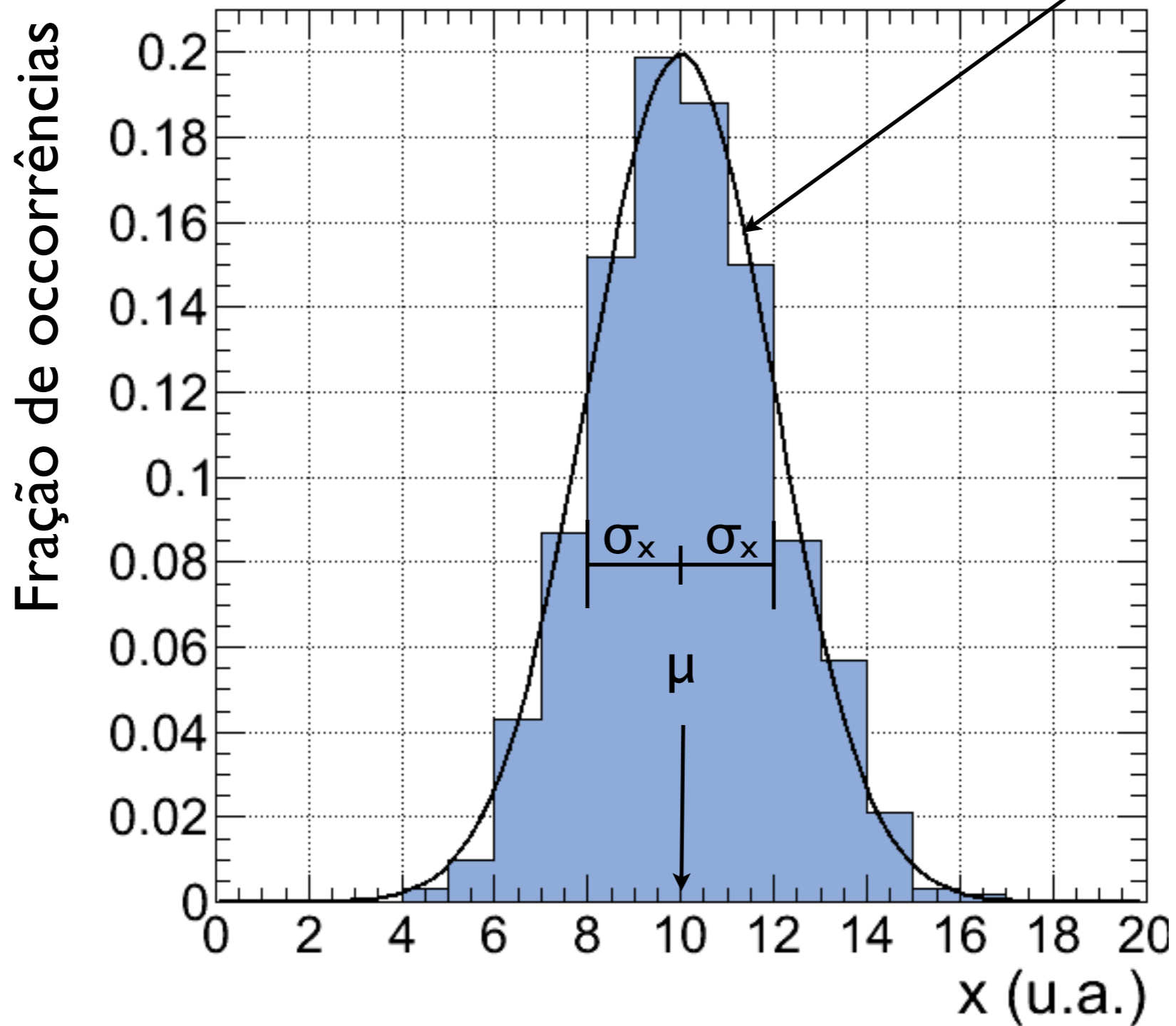


Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



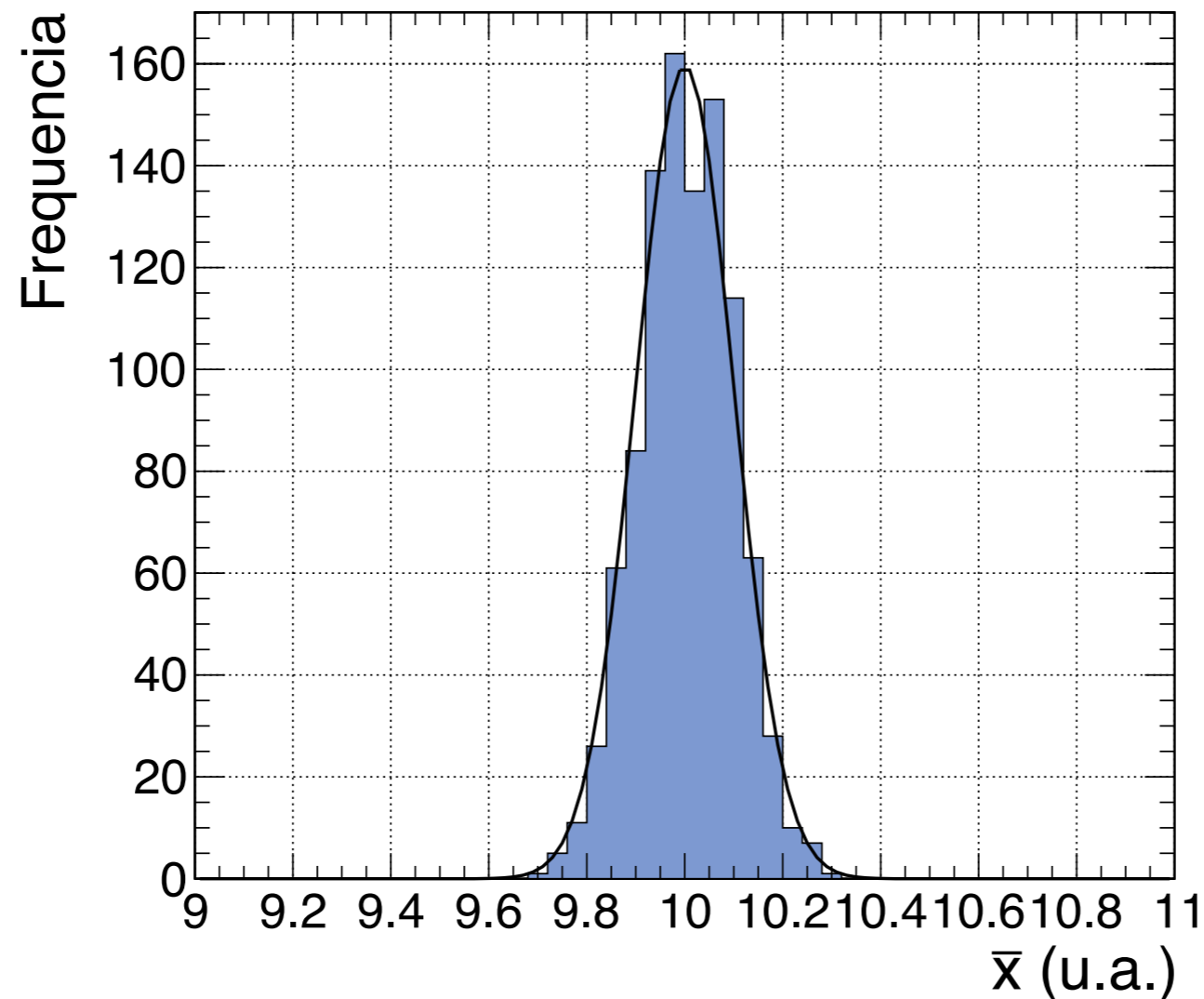
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana

$$f(x; \mu, \sigma_x) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$



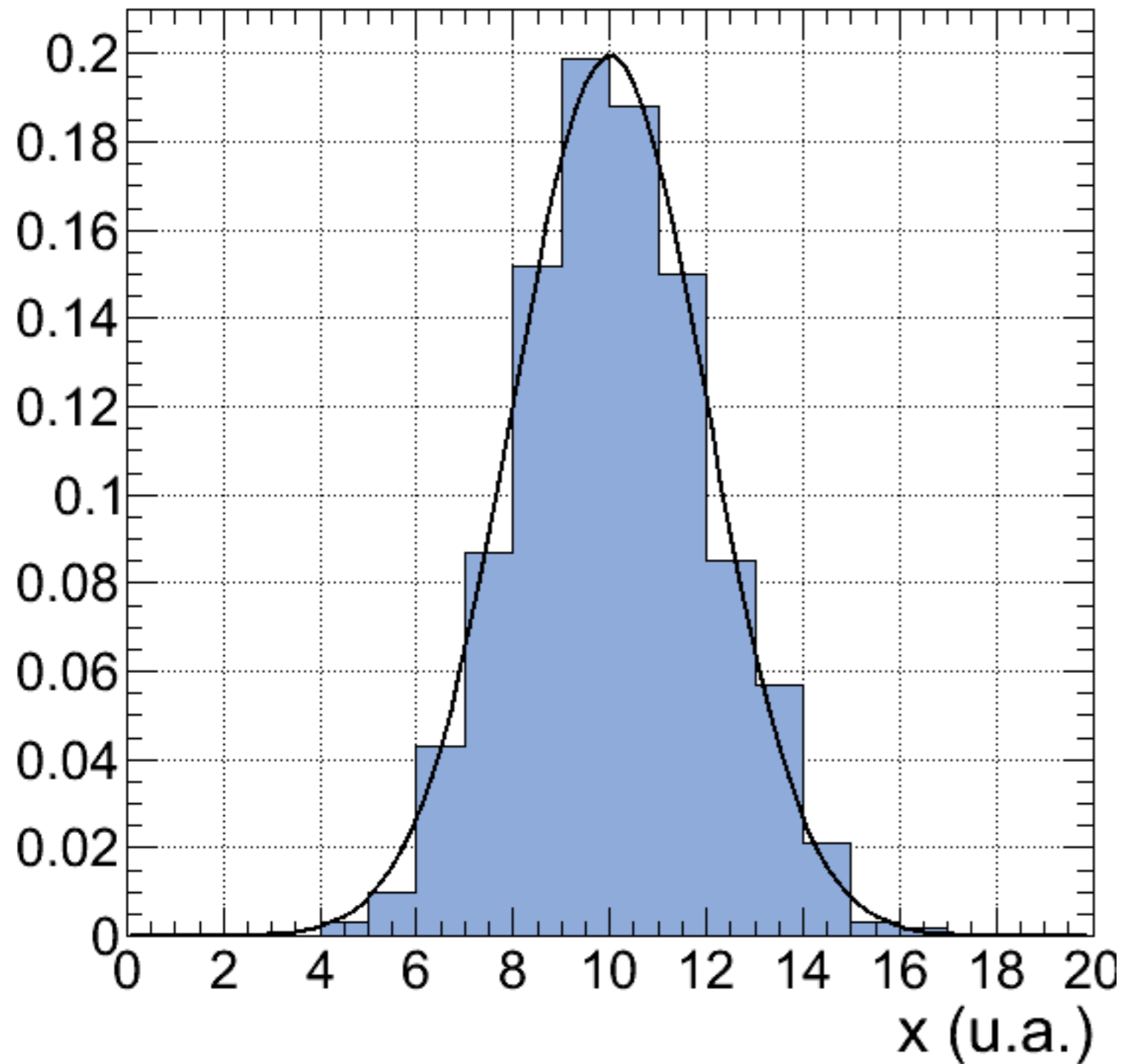
Lei dos Erros

“Lei dos Erros”: Para um número indefinidamente grande de medidas a distribuição das frequências das médias se aproxima de uma distribuição Gaussiana

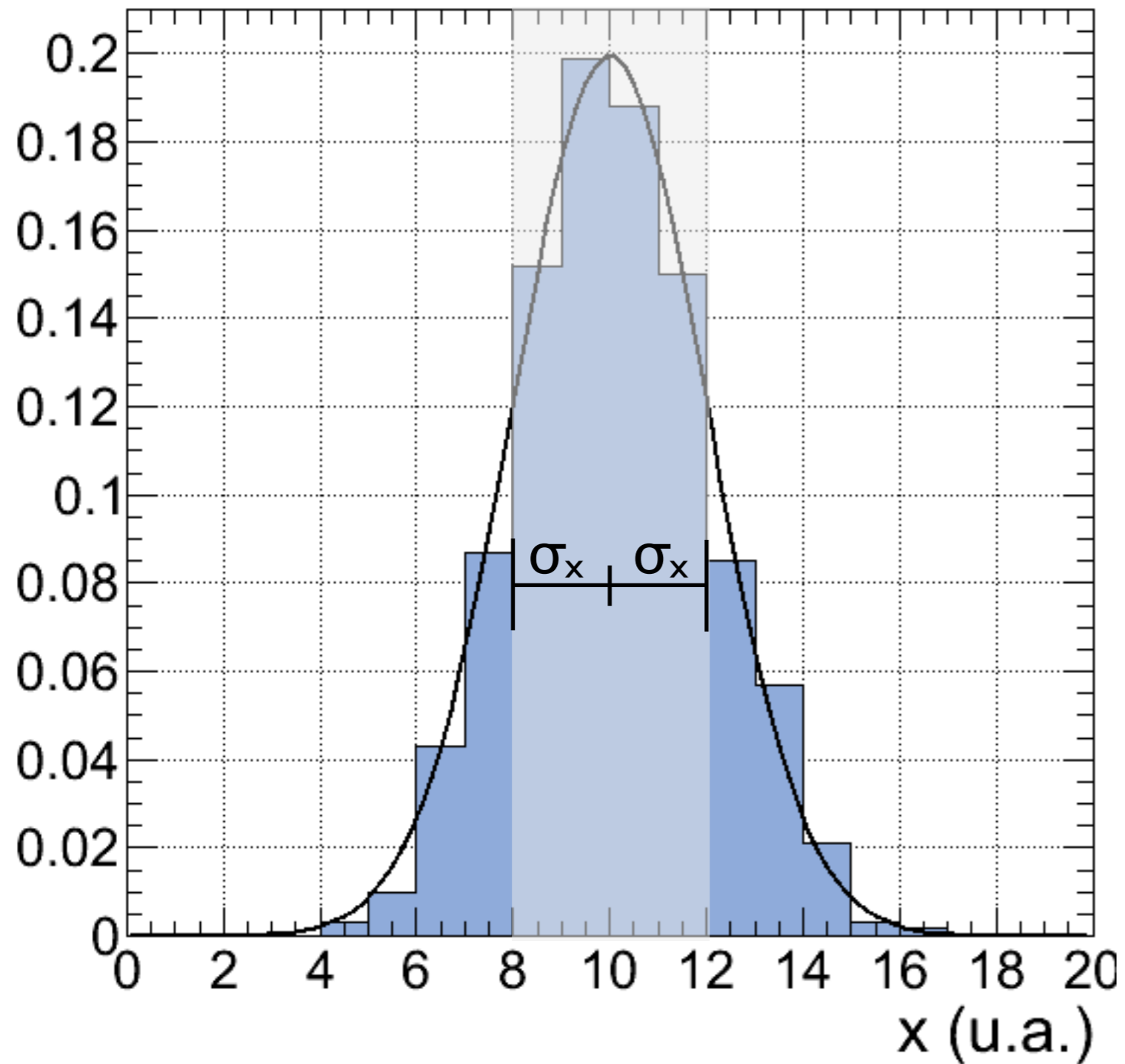


$$f(x; \mu, \sigma_x) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

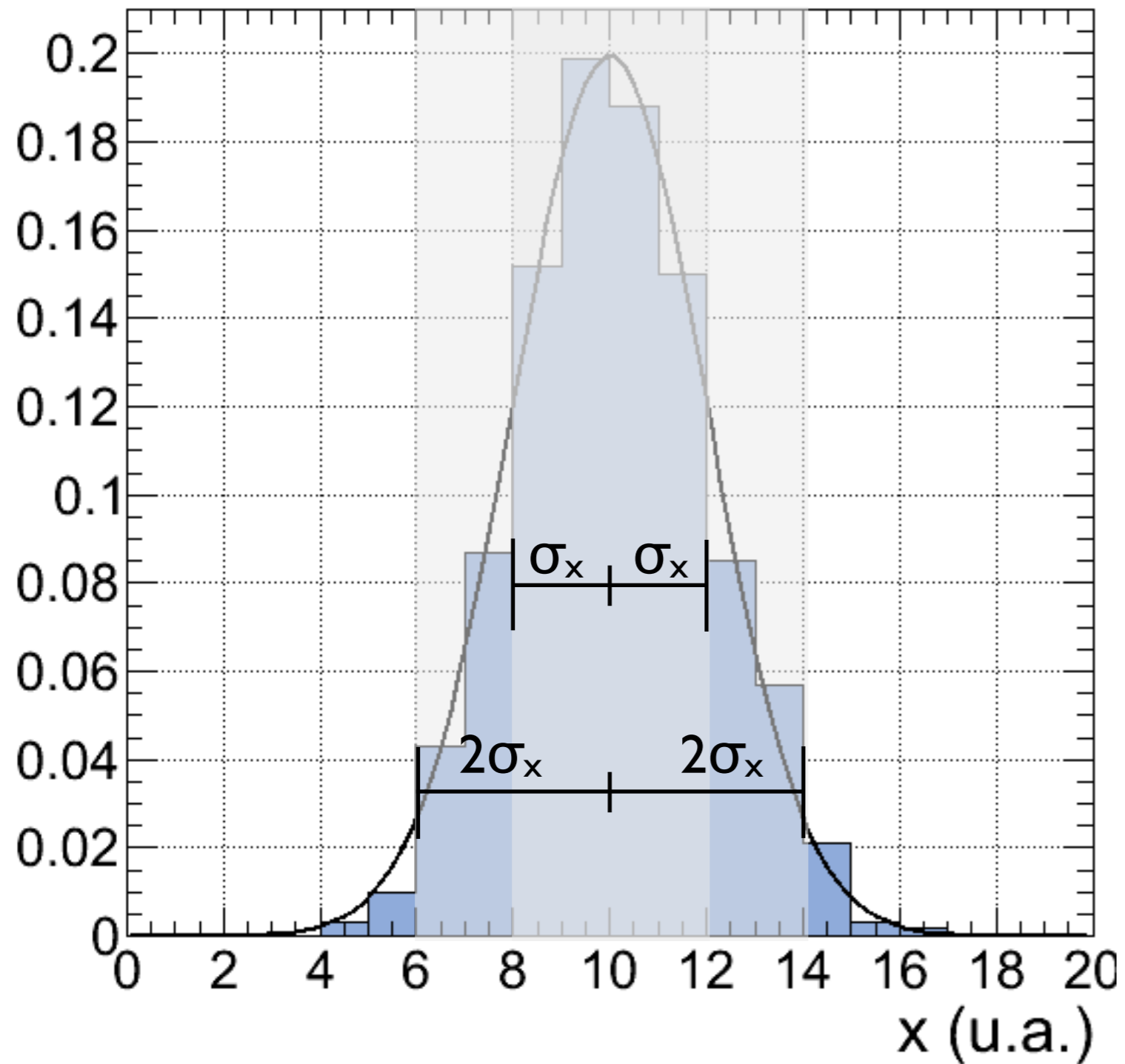
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



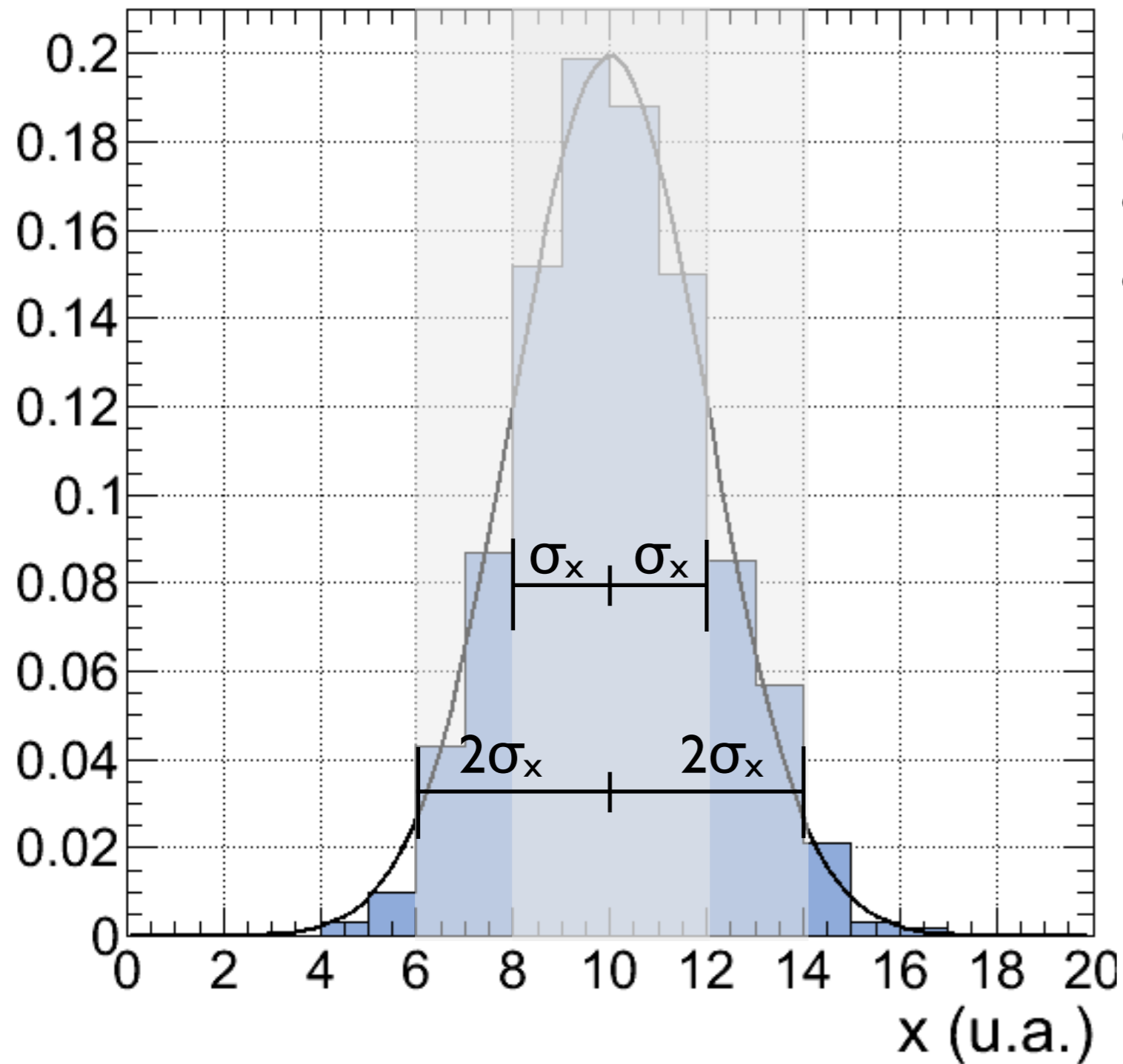
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



68,3% da área entre $(\mu - \sigma_x)$ e $(\mu + \sigma_x)$
95,5% da área entre $(\mu - 2\sigma_x)$ e $(\mu + 2\sigma_x)$
99,7% da área entre $(\mu - 3\sigma_x)$ e $(\mu + 3\sigma_x)$
...

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}

The diagram shows a box containing the text "estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)". An arrow points from the symbol \bar{x} below to the phrase "estimativa do valor esperado" inside the box. Another arrow points from the formula $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$ below to the phrase "erro (unidade)" inside the box.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

As estimativas do valor esperado e de seu erro associado definem um intervalo ao qual atribuímos um *nível de confiança*

Se as estimativas se distribuem de acordo com uma distribuição Gaussiana (Lei dos Erros), os valores dos níveis de confiança são determinados pela sua área correspondente

Intervalo e nível de confiança (Dist. Gaussiana)

INTERVALO DE CONFIANÇA	NÍVEL DE CONFIANÇA (CL)
$(\bar{x} - 0,67 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 0,67 \sigma_{\bar{x}})$	50,0%
$(\bar{x} - 1,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,00 \sigma_{\bar{x}})$	68,3%
$(\bar{x} - 1,65 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,65 \sigma_{\bar{x}})$	90,0%
$(\bar{x} - 1,96 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,96 \sigma_{\bar{x}})$	95,0%
$(\bar{x} - 2,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2,00 \sigma_{\bar{x}})$	95,5%
$(\bar{x} - 3,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 3,00 \sigma_{\bar{x}})$	99,7%

Intervalo de confiança a nível de confiança de 68,3%

Intervalo de confiança a nível de confiança de 95,5%

Em geral para um intervalo de confiança [a,b], o nível de confiança pode ser interpretado como a fração de ocorrências em que o valor esperado μ se encontra neste intervalo, se o experimento for repetido um grande número de vezes.

Compatibilidade com um valor de referência

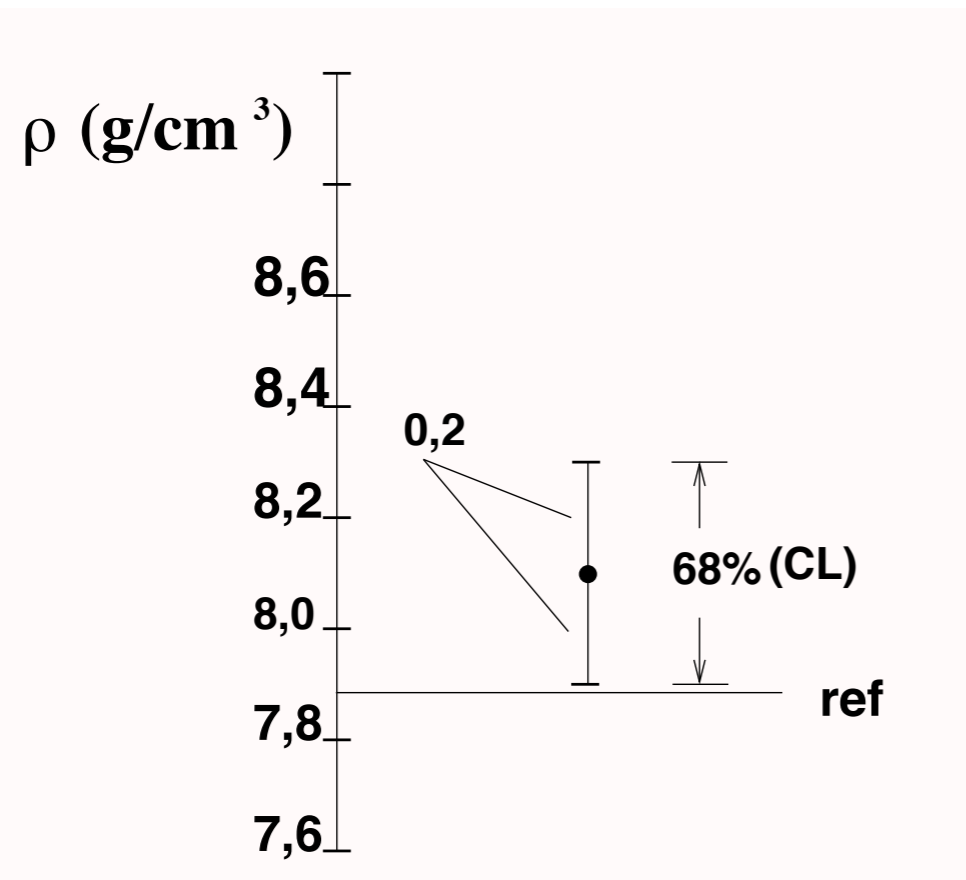
Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Resultado Exp. I:

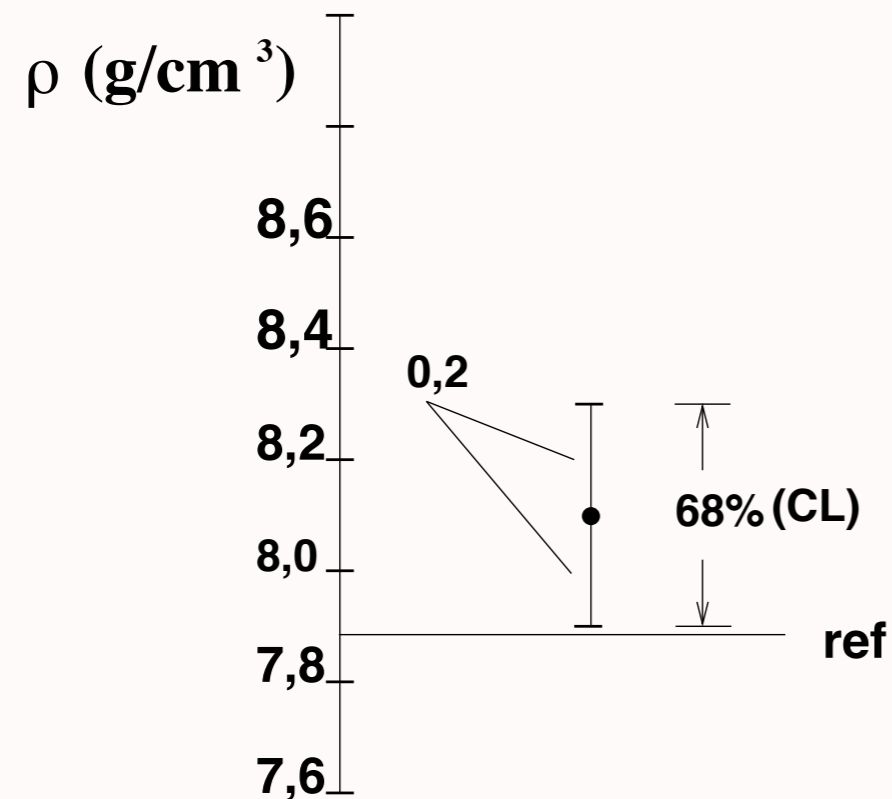
$$\rho_I = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



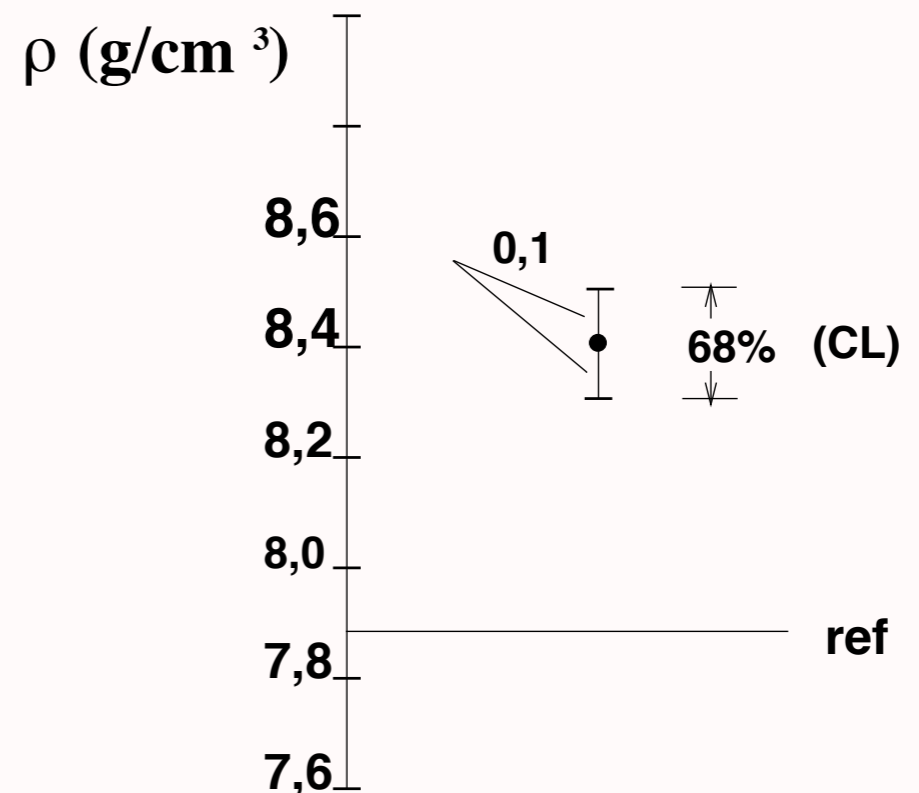
Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Resultado Exp. 1:
 $\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$



Resultado Exp. 2:
 $\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$

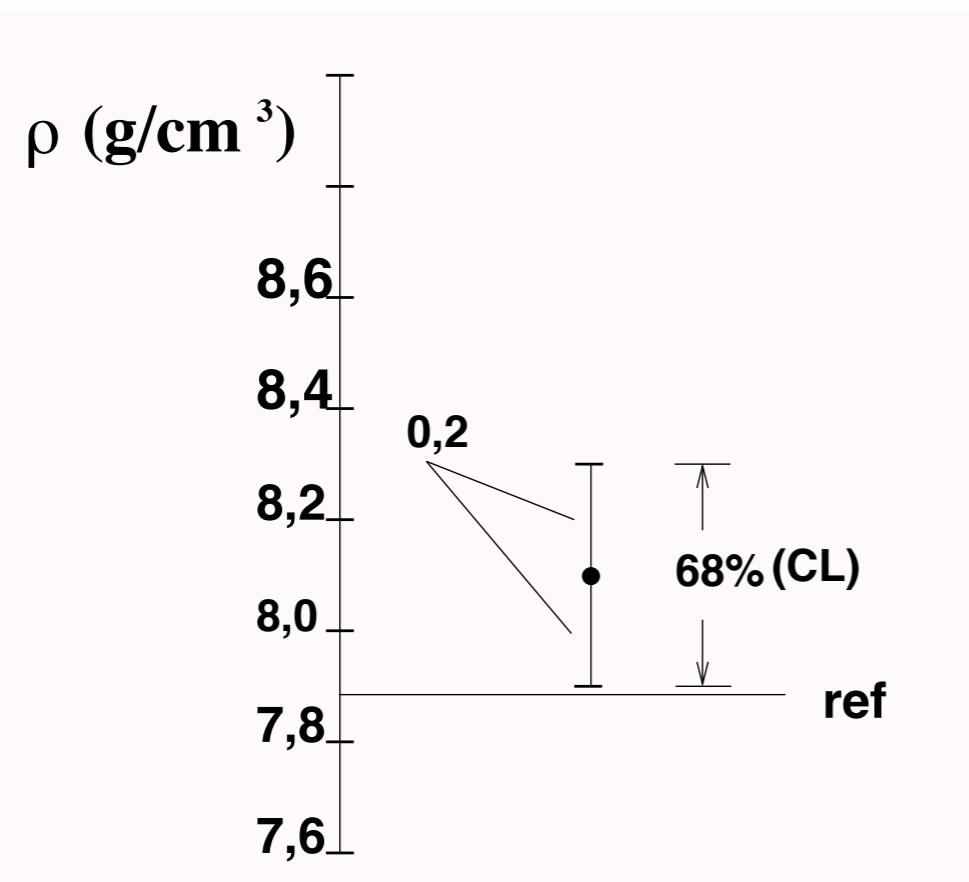


Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



Compatibilidade com um valor de referência

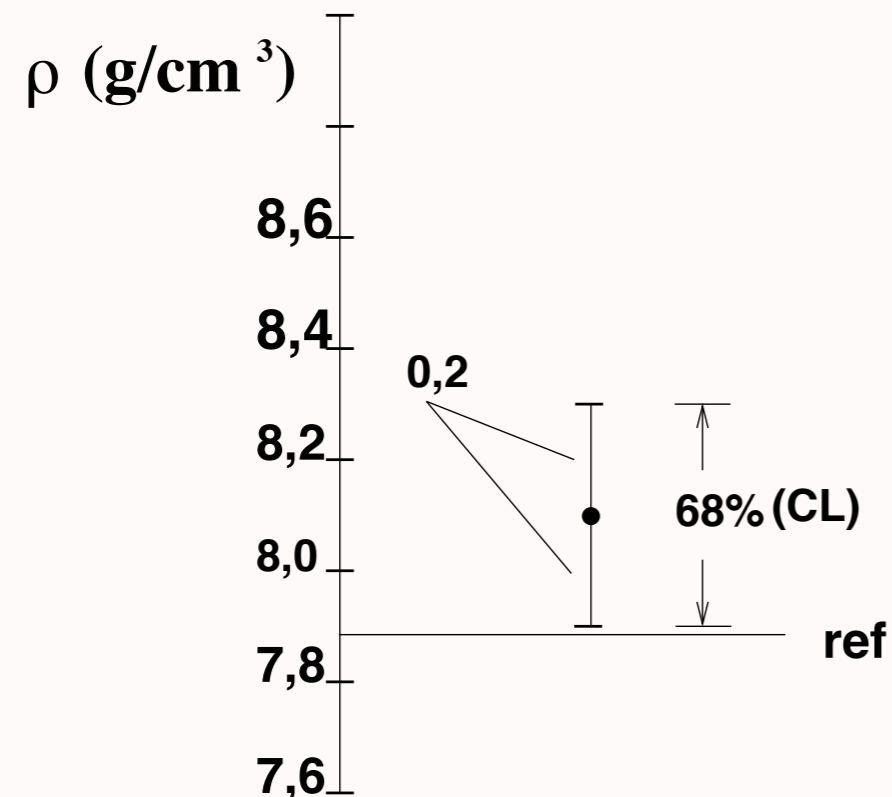
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



Compatibilidade com um valor de referência

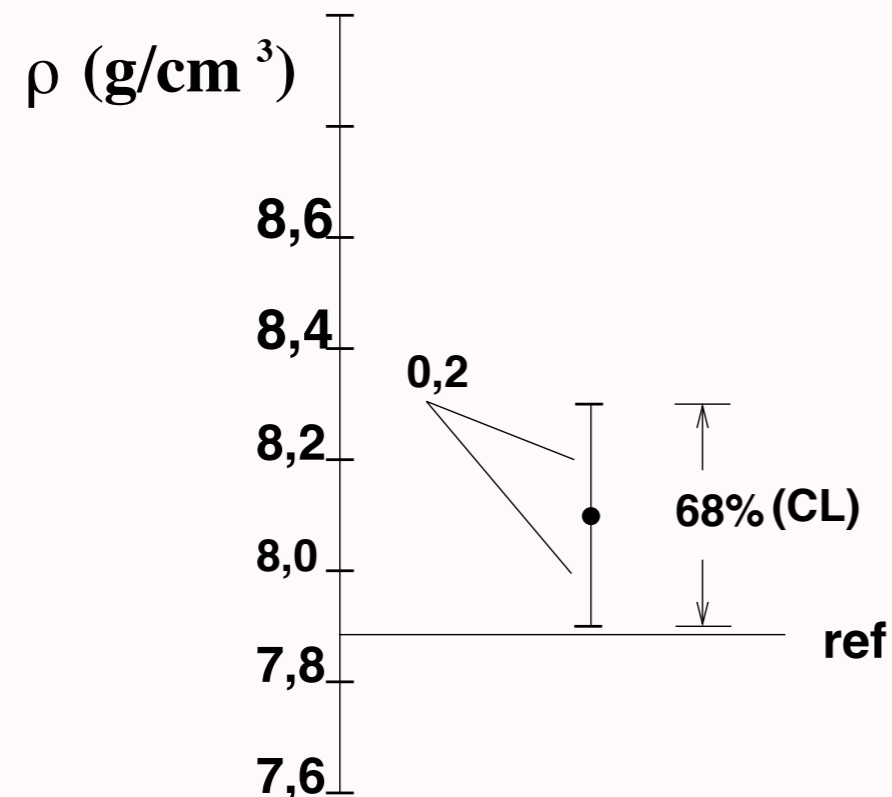
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



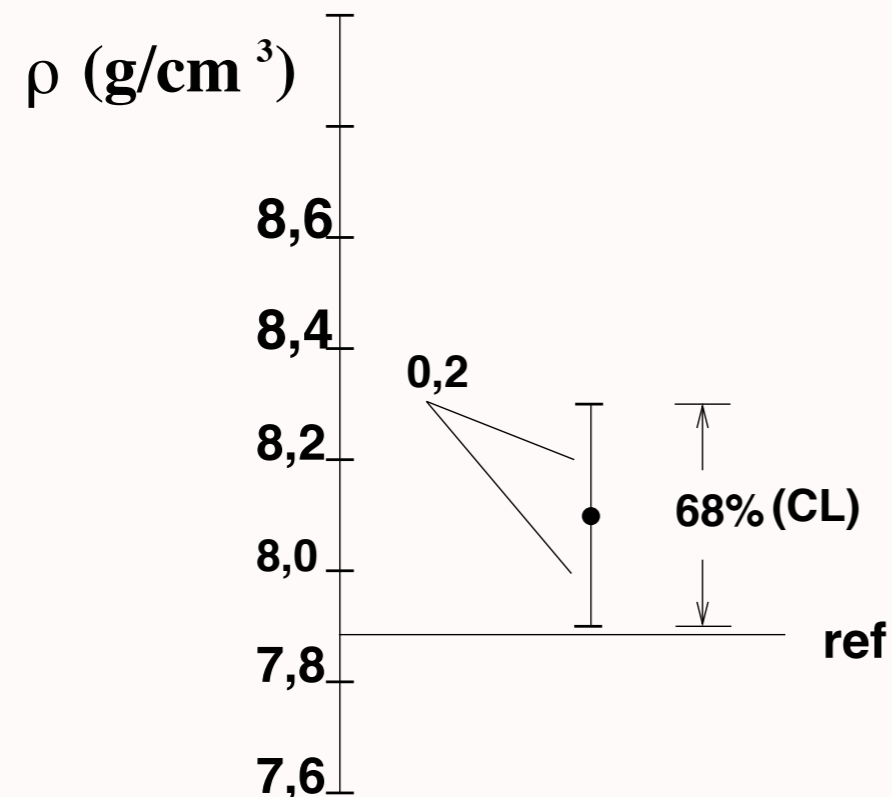
Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas $\sim 68\%$ de que o intervalo contenha o valor esperado

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$

Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas $\sim 68\%$ de que o intervalo contenha o valor esperado

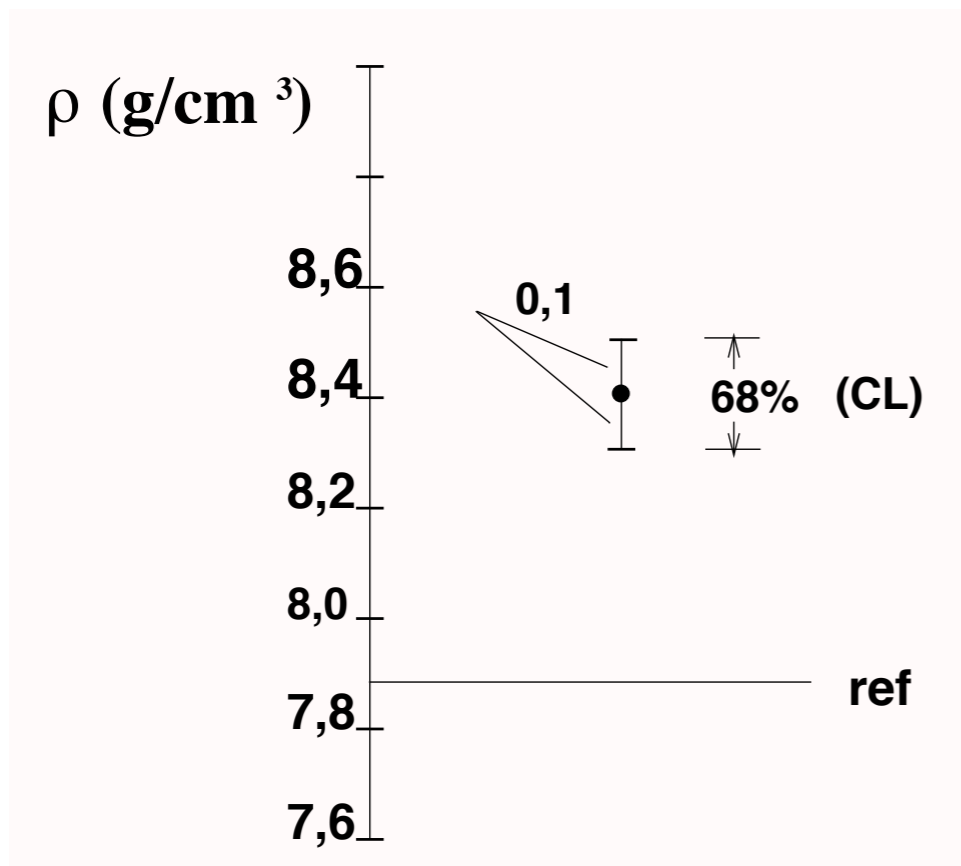
A discrepância não é estatisticamente significativa

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



Compatibilidade com um valor de referência

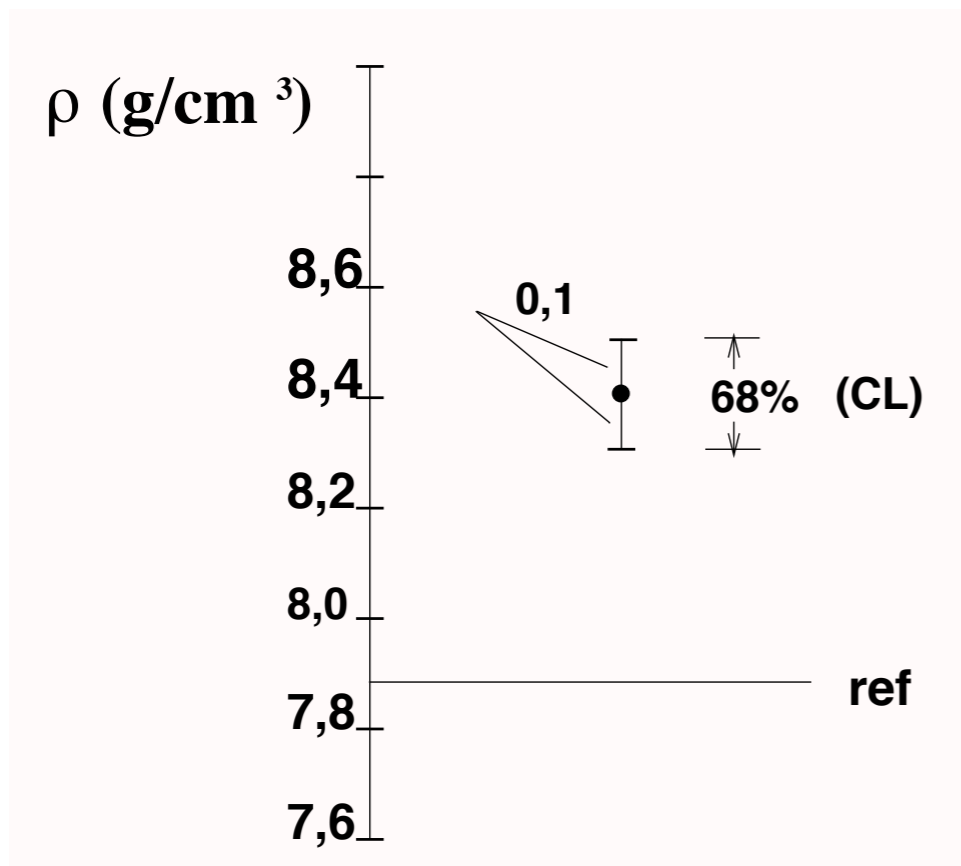
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Compatibilidade com um valor de referência

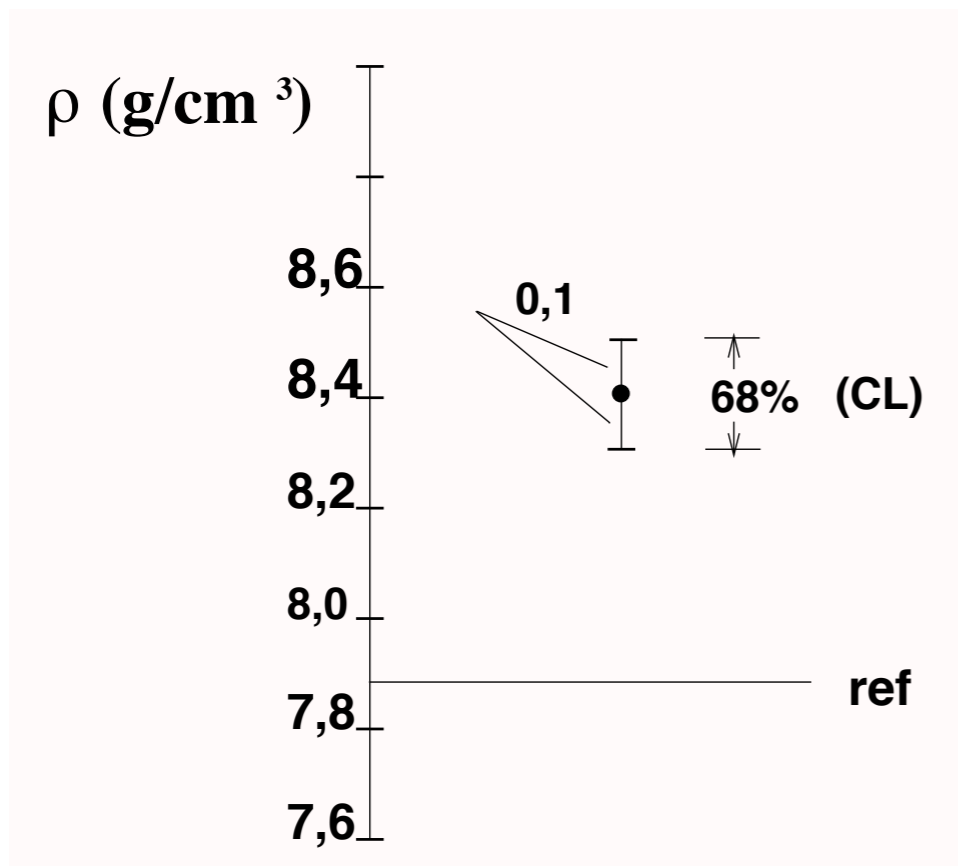
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável ($< 1\%$) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

Compatibilidade com um valor de referência

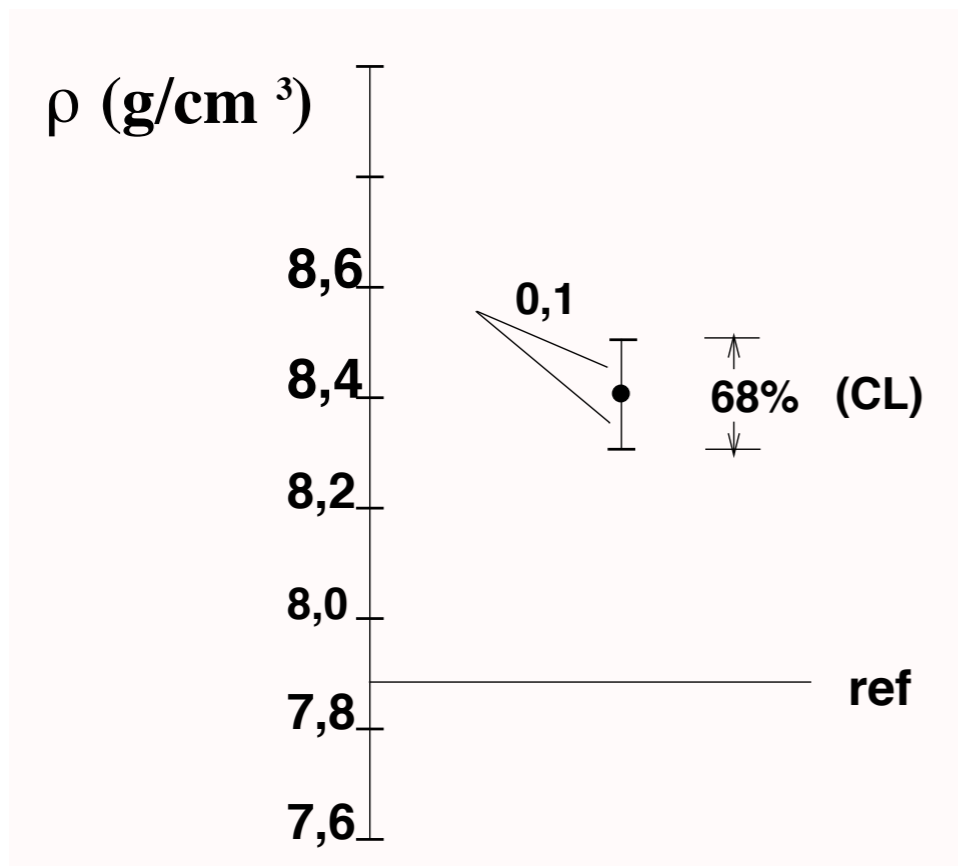
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável ($< 1\%$) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Regra prática: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Inconclusivo}$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Discrepância: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

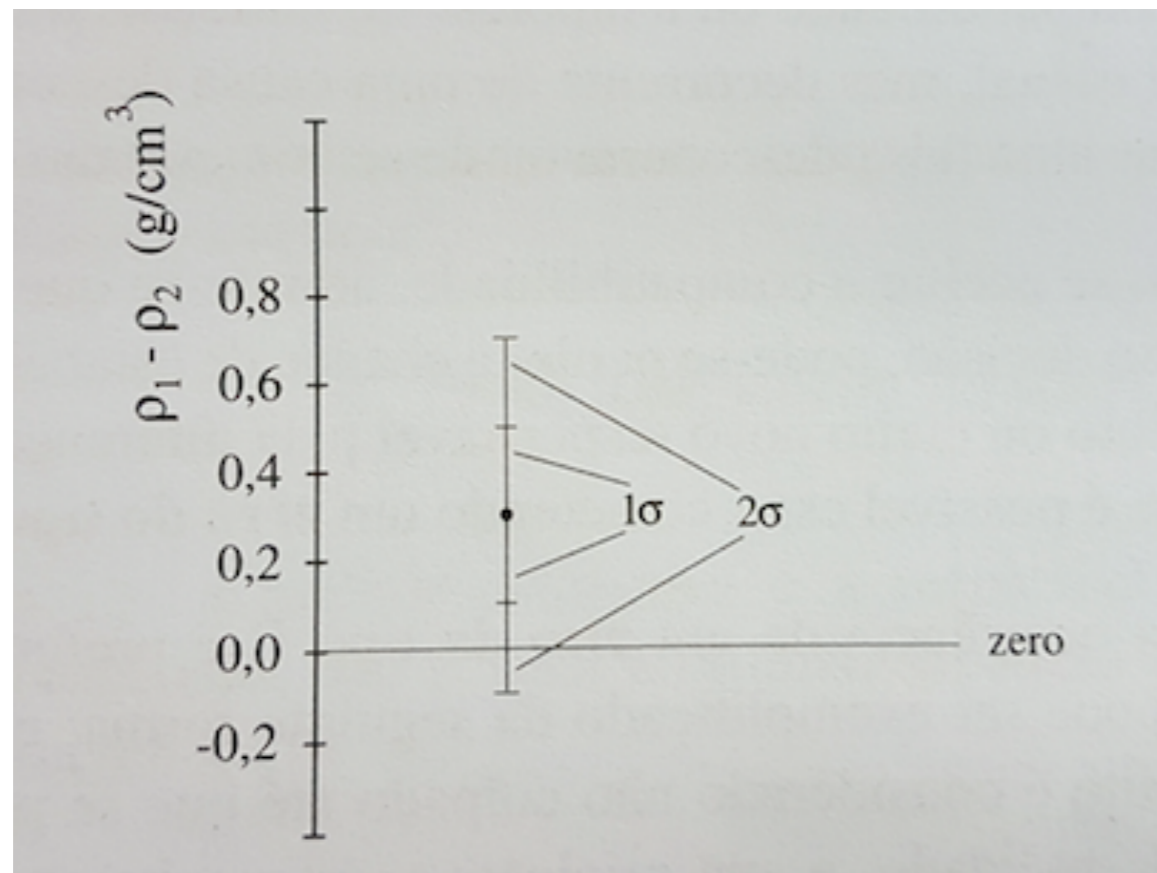
Erro associado: $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

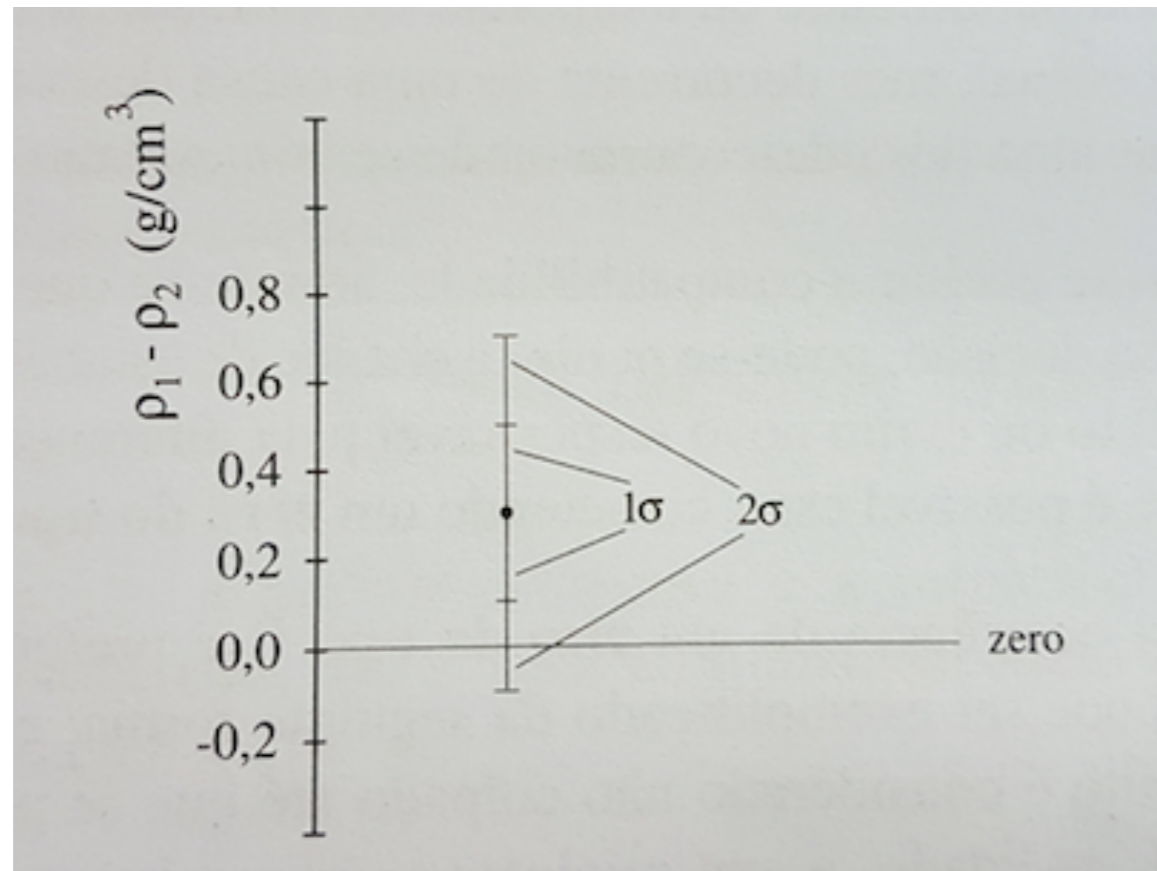
$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Podemos dizer que as estimativas são compatíveis *entre si*.

A discrepância não é significativa.

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Estimativa 1: } & \bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1} \\ \text{Estimativa 2: } & \bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2} \end{aligned} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944 \text{ g/cm}^3$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400 \text{ g/cm}^3$$

$$\Rightarrow \rho = (8,34 \pm 0,09) \text{ g/cm}^3$$