Física Geral - Laboratório

Estimativas e erros em medidas diretas (II)
Níveis de confiança, compatibilidade e combinação

Resumo: estimativa do valor esperado

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro (unidade)}}$$

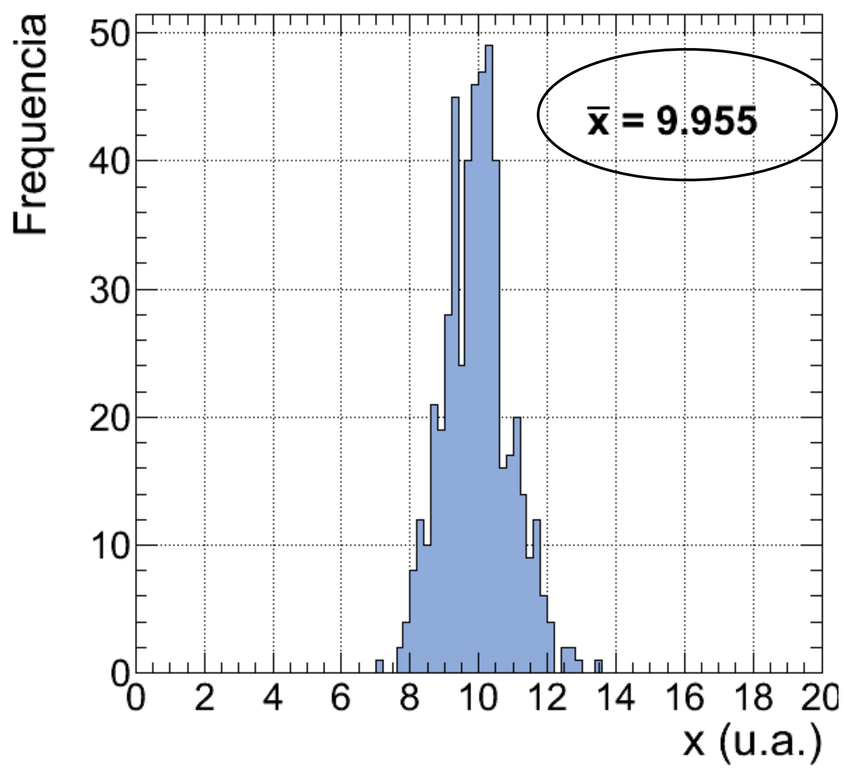
$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

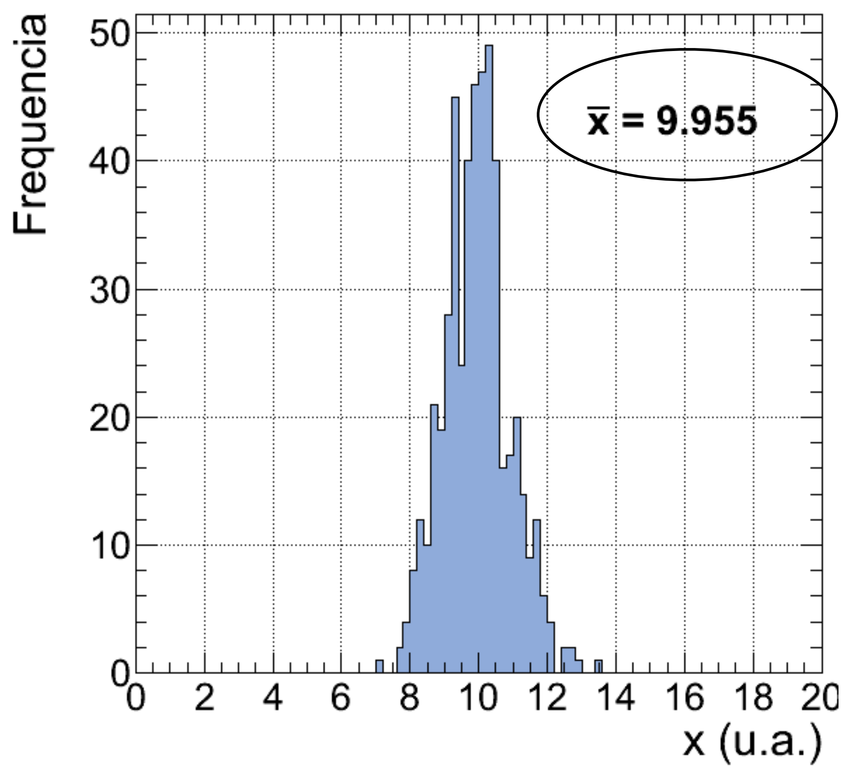
Estimativa do erro de cada medida $\longrightarrow$ $$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

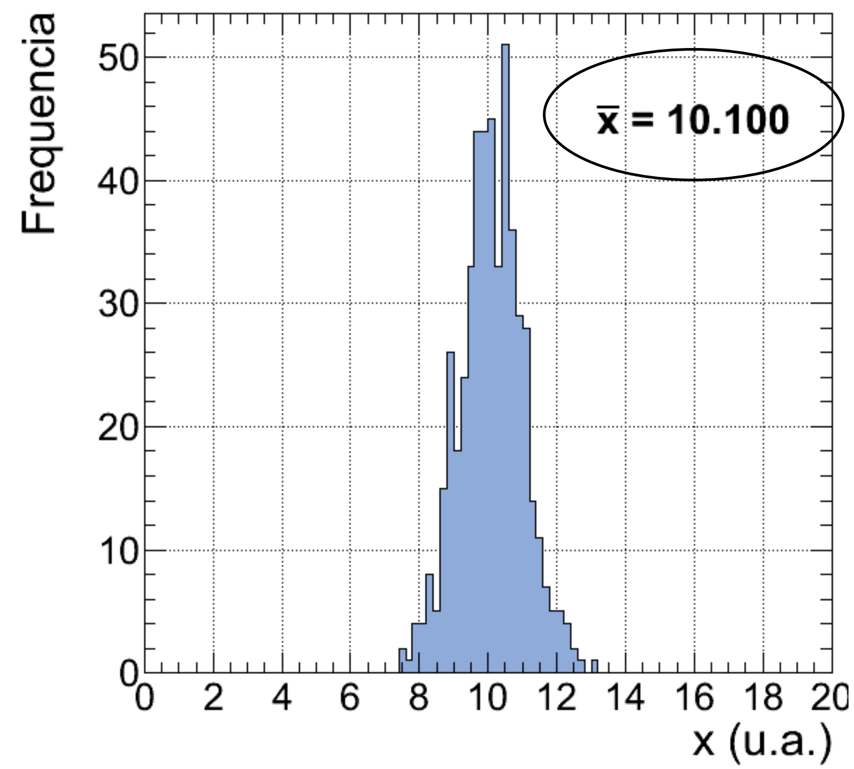
Estimativa do erro da média $\longrightarrow$ $$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Resumo: Erro da média

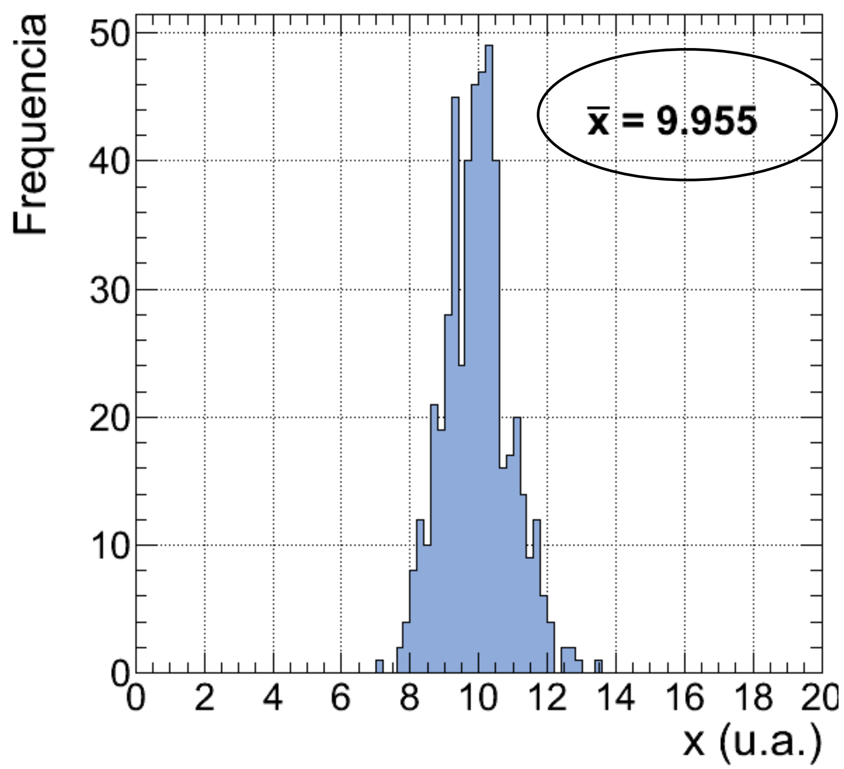


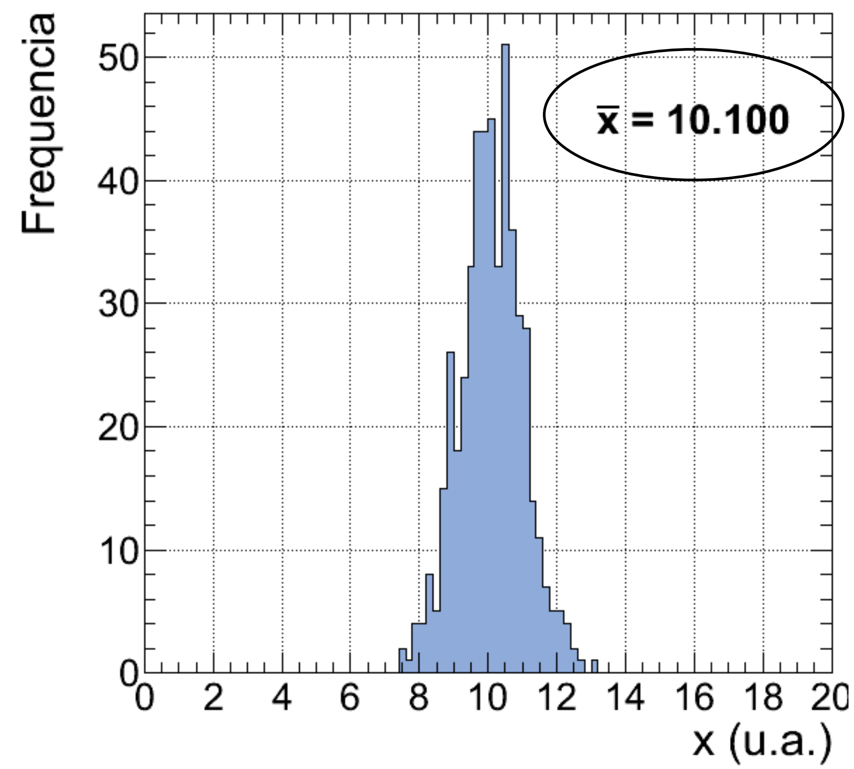
Resumo: Erro da média

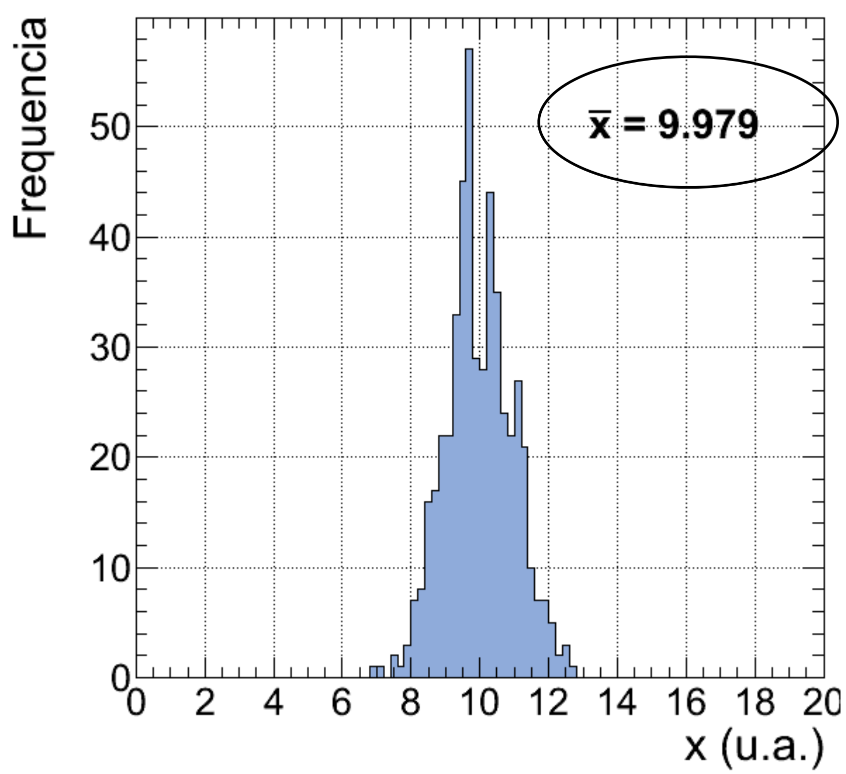




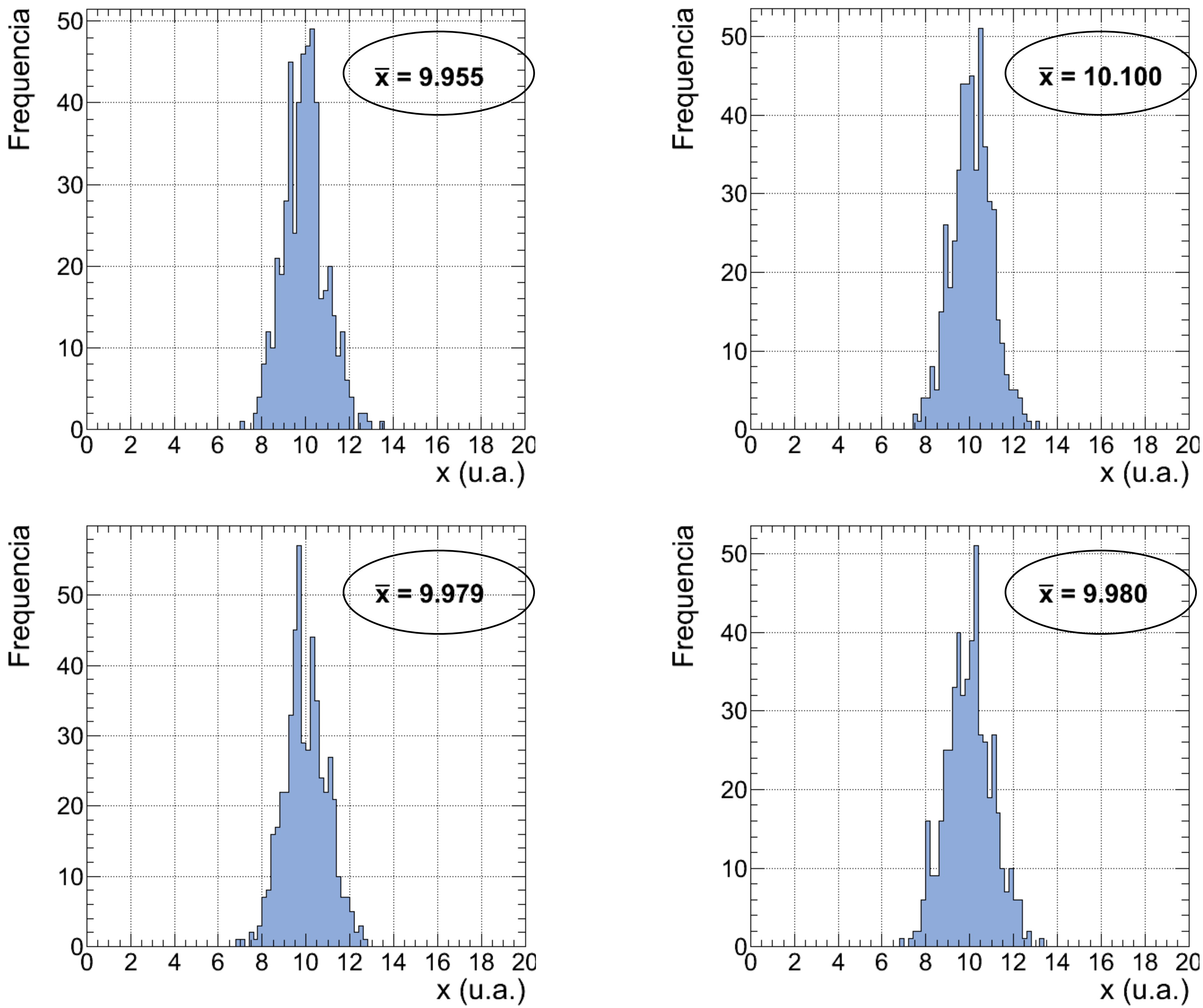
Resumo: Erro da média



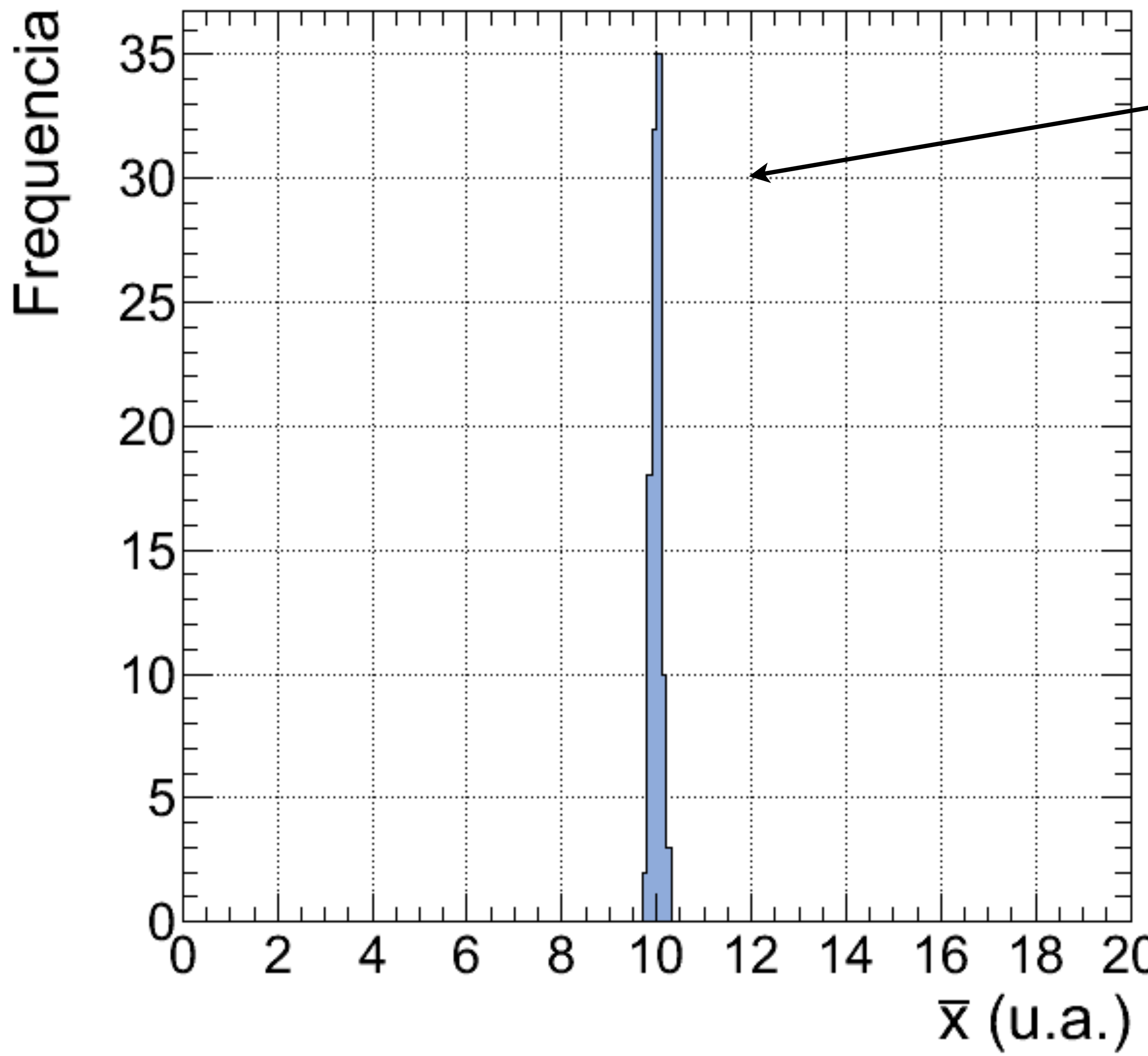




Resumo: Erro da média



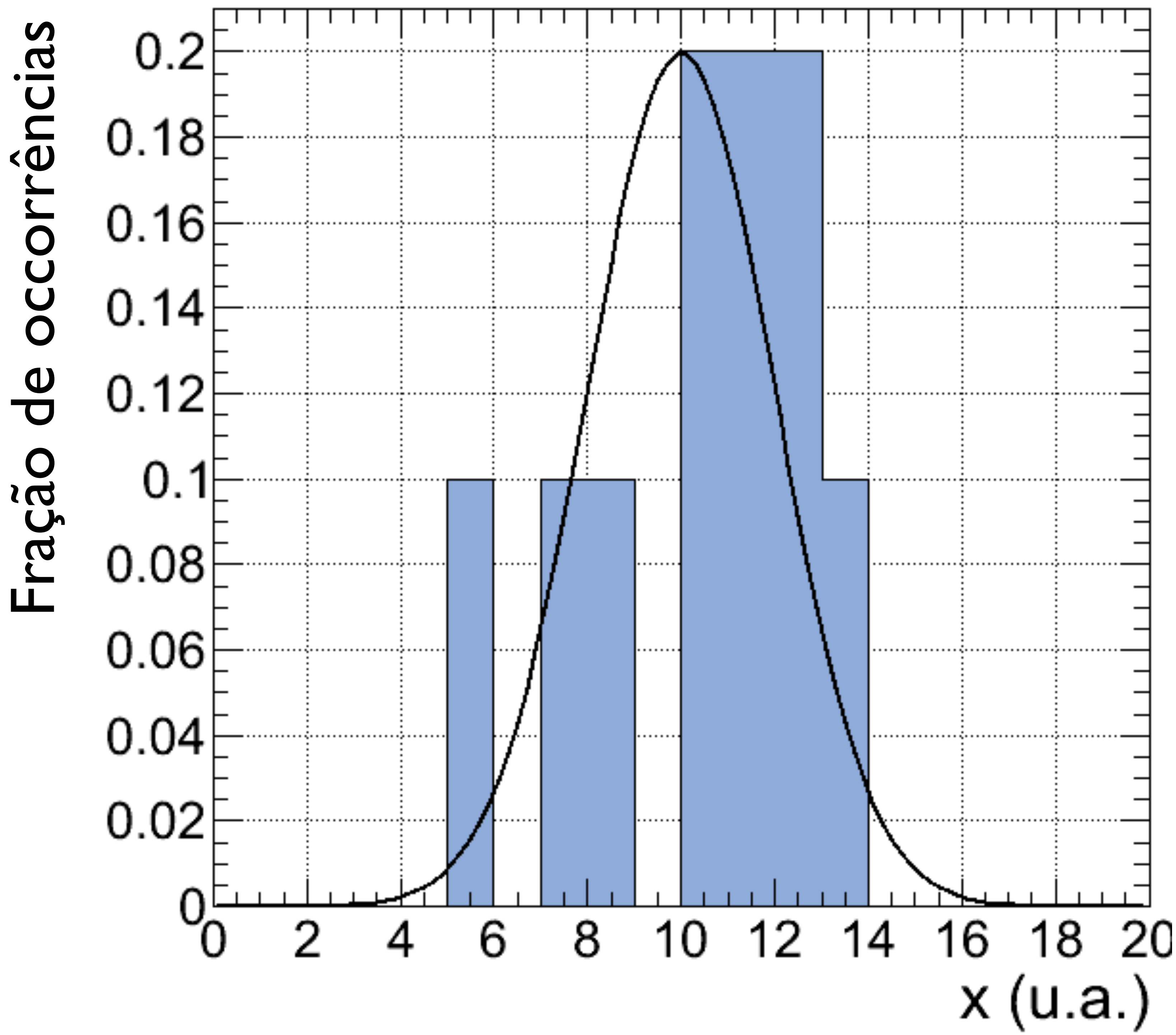
Resumo: Erro da média



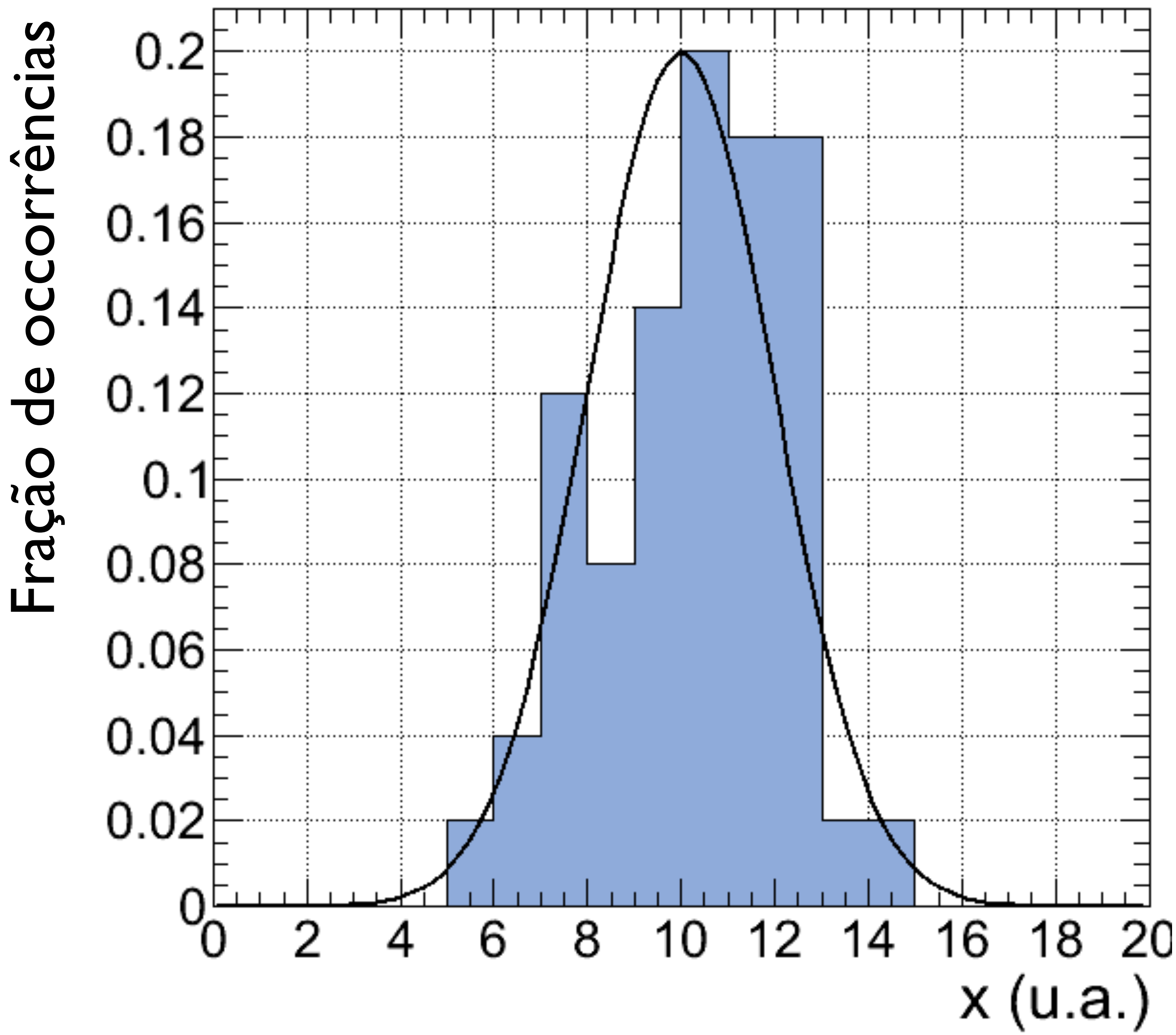
Distribuição das médias de 100 "experimentos", cada um com 100 medidas

Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana

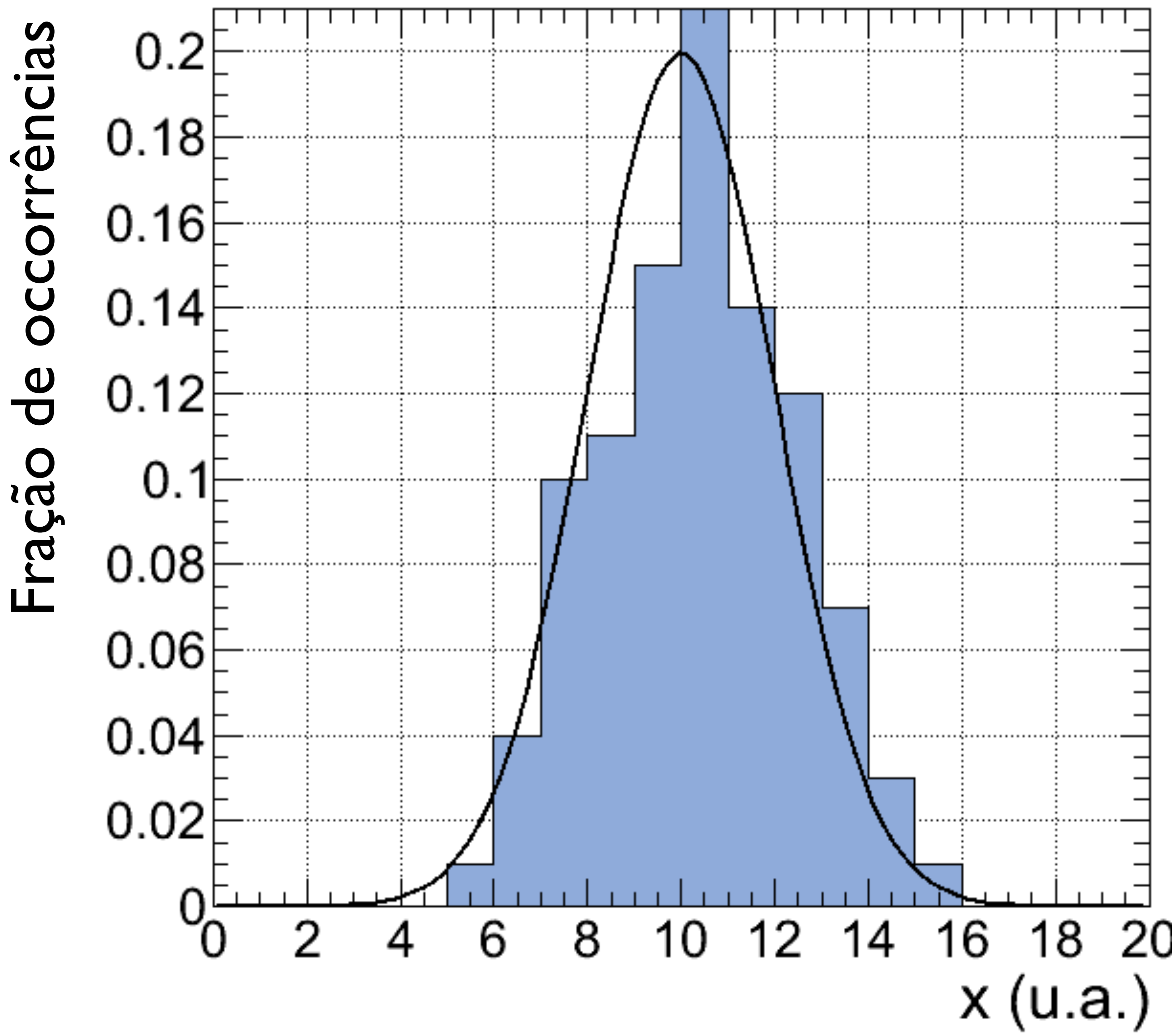
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



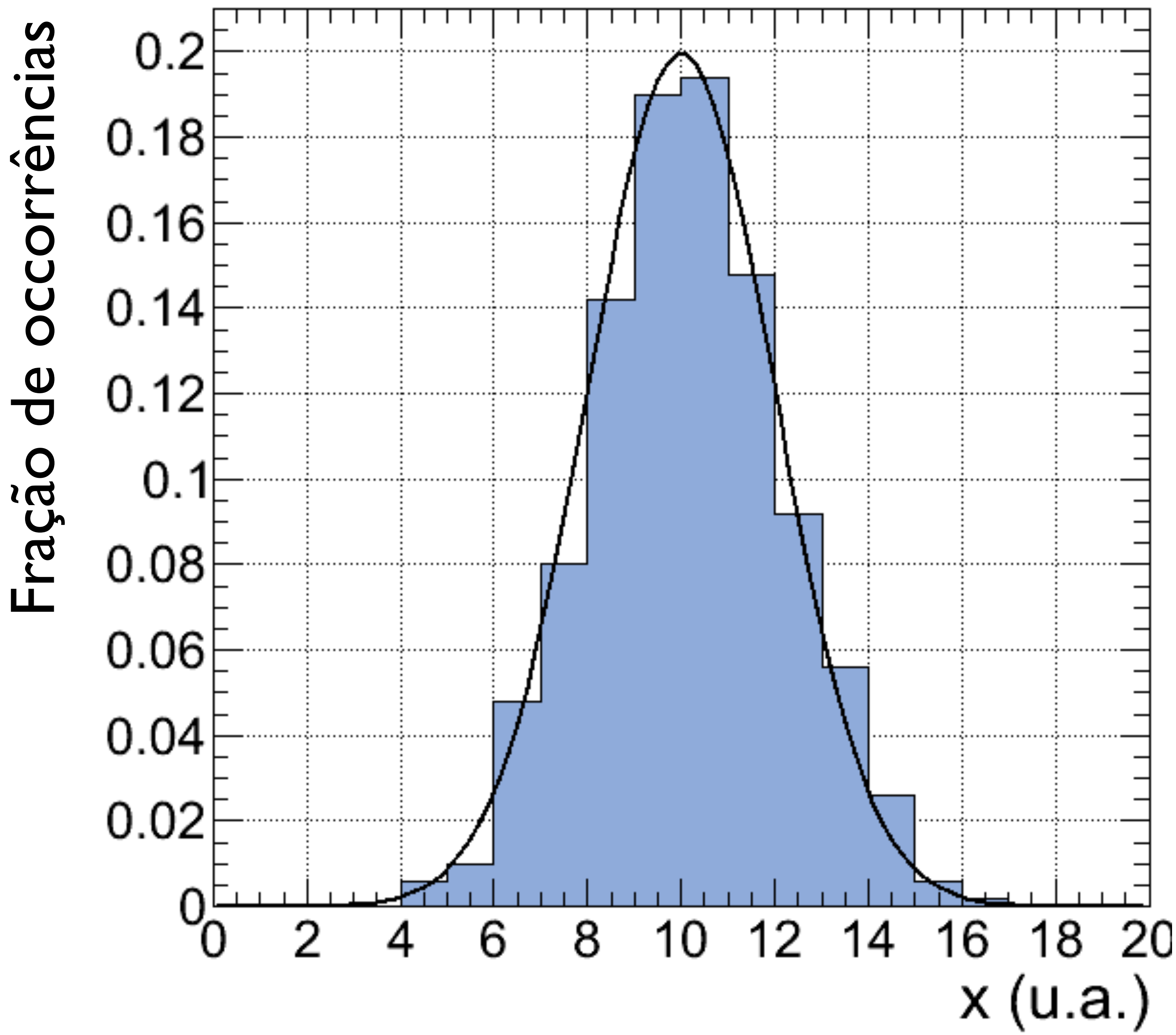
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



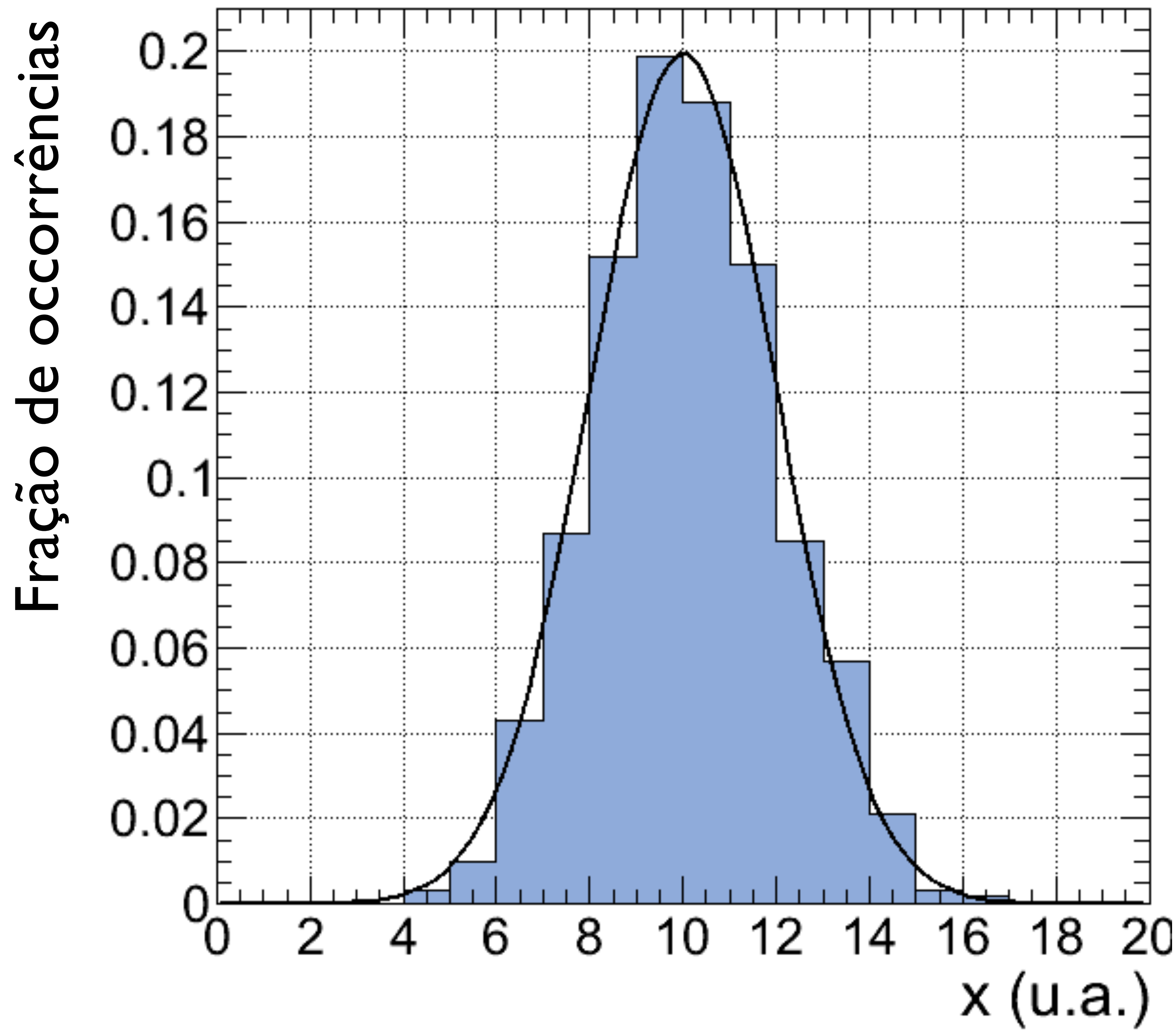
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana

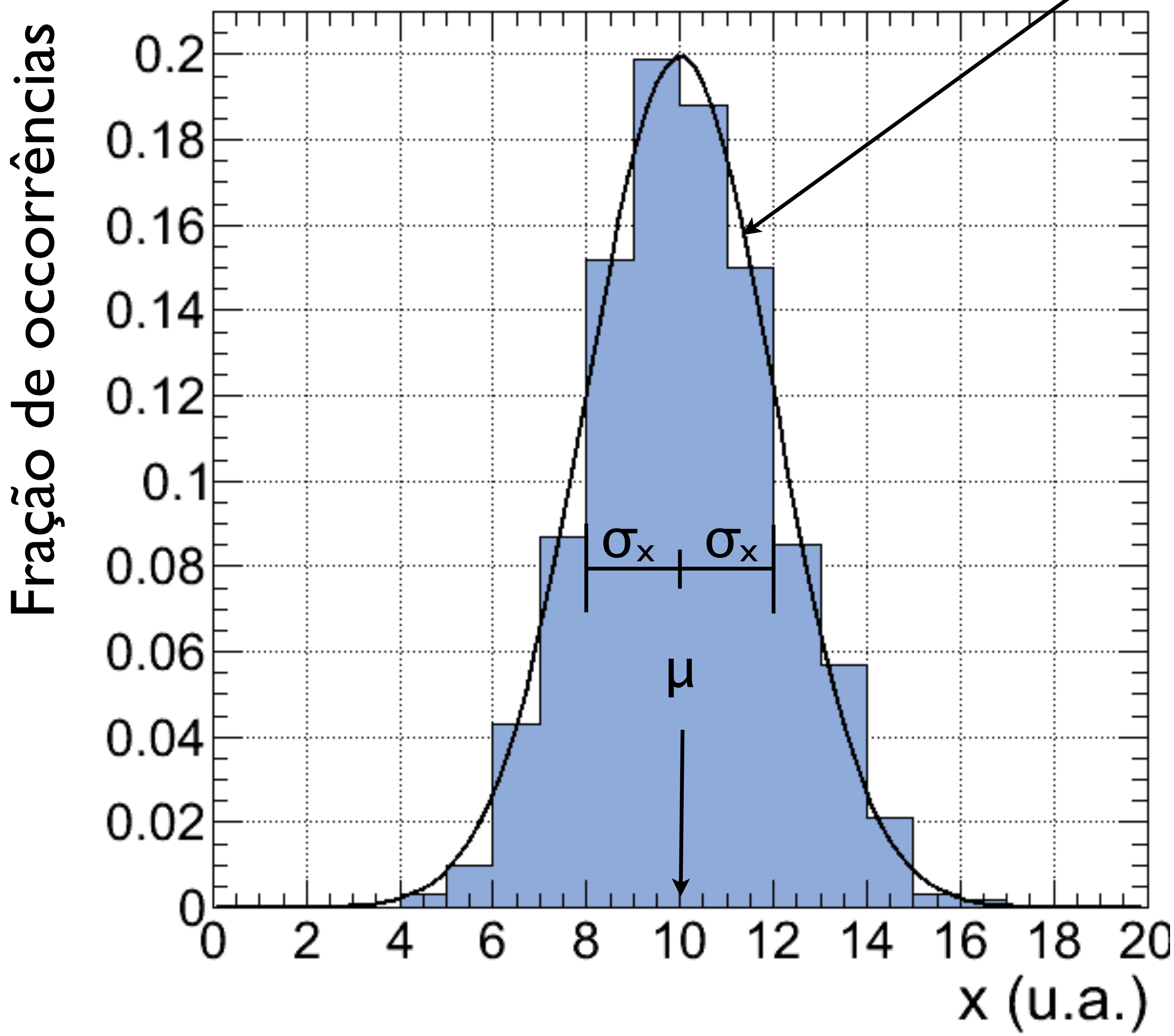


Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



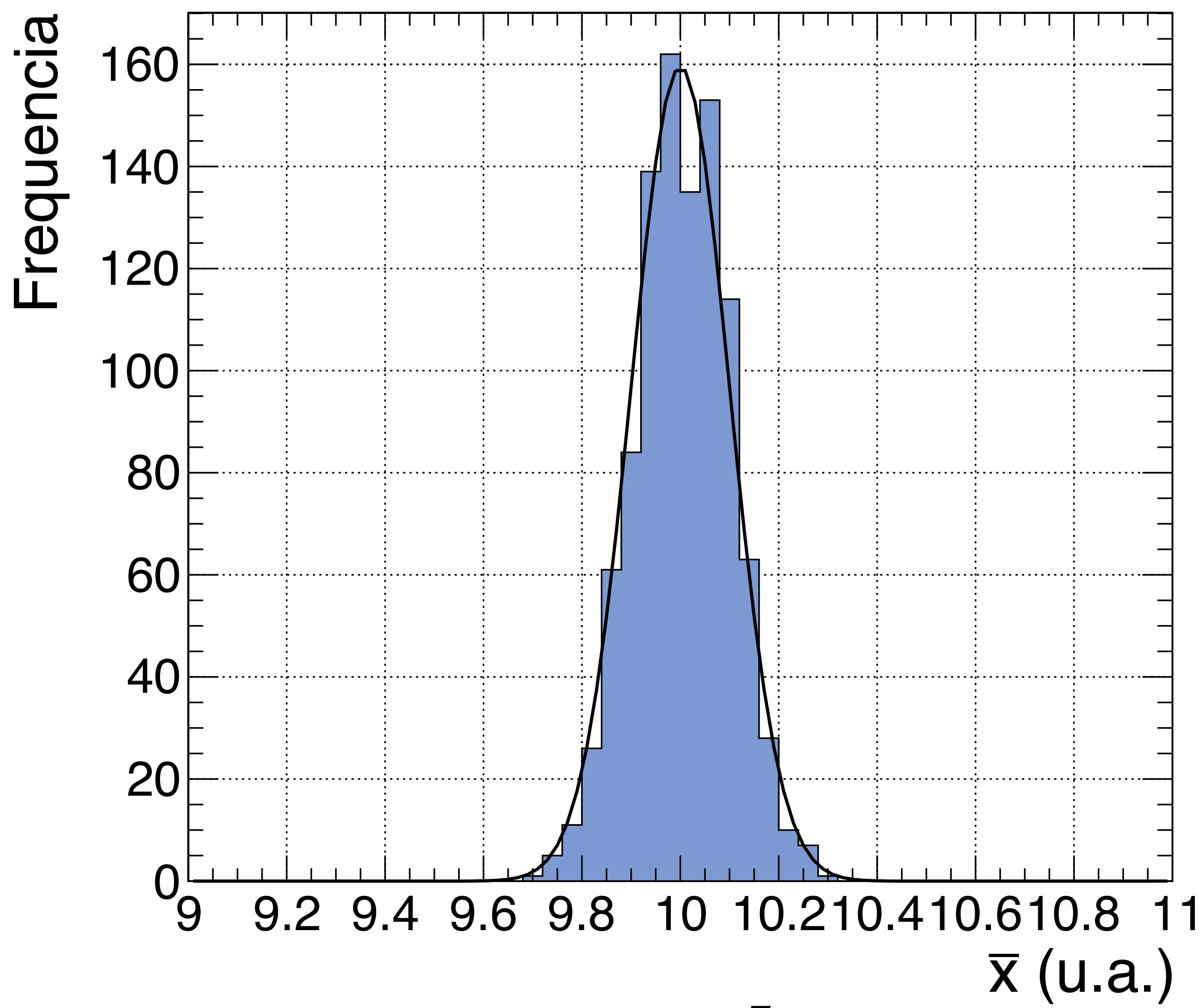
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana

$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$



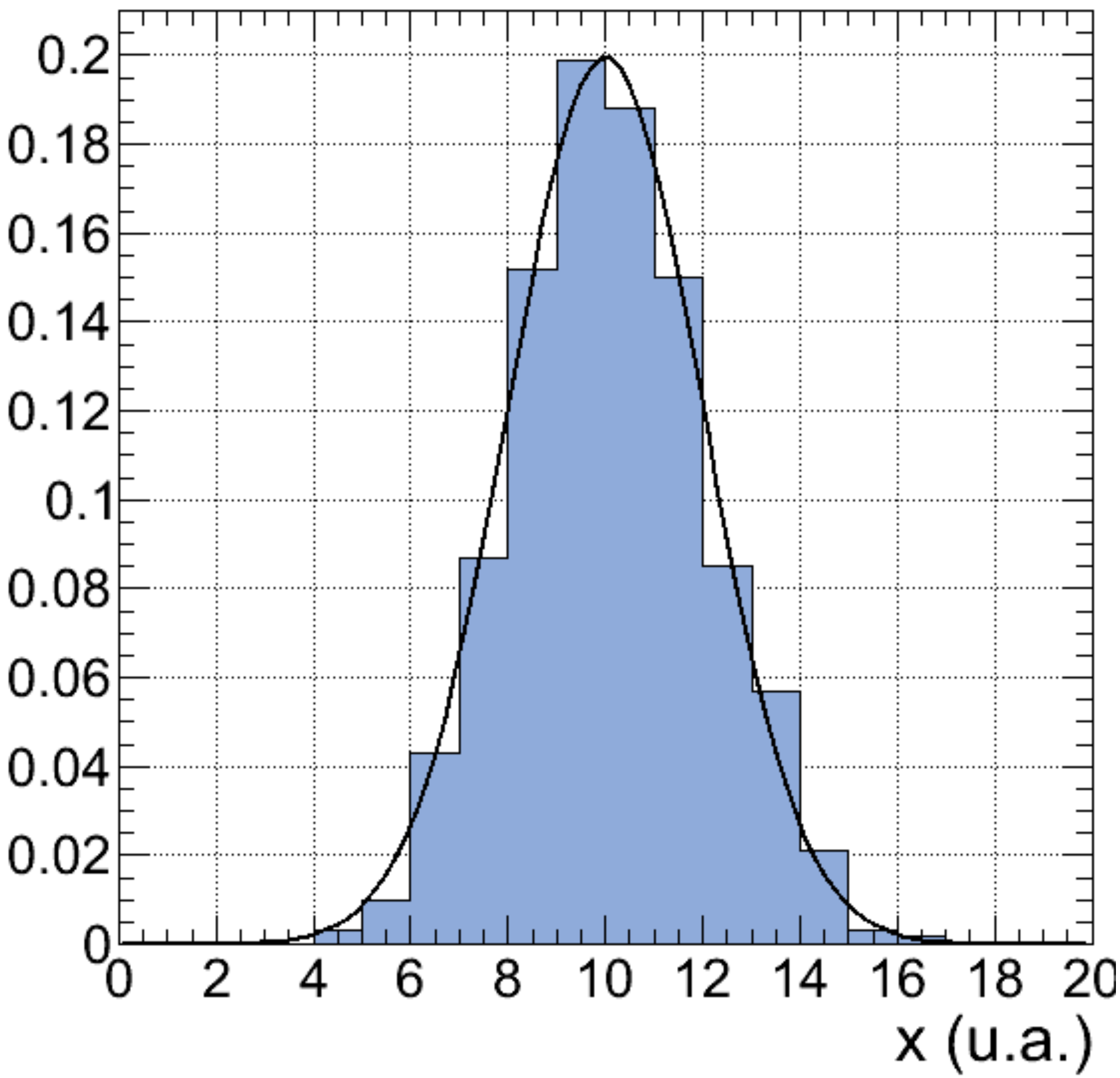
Lei dos Erros

"Lei dos Erros": Para um número indefinidamente grande de medidas a distribuição das frequências das médias se aproxima de uma distribuição Gaussiana

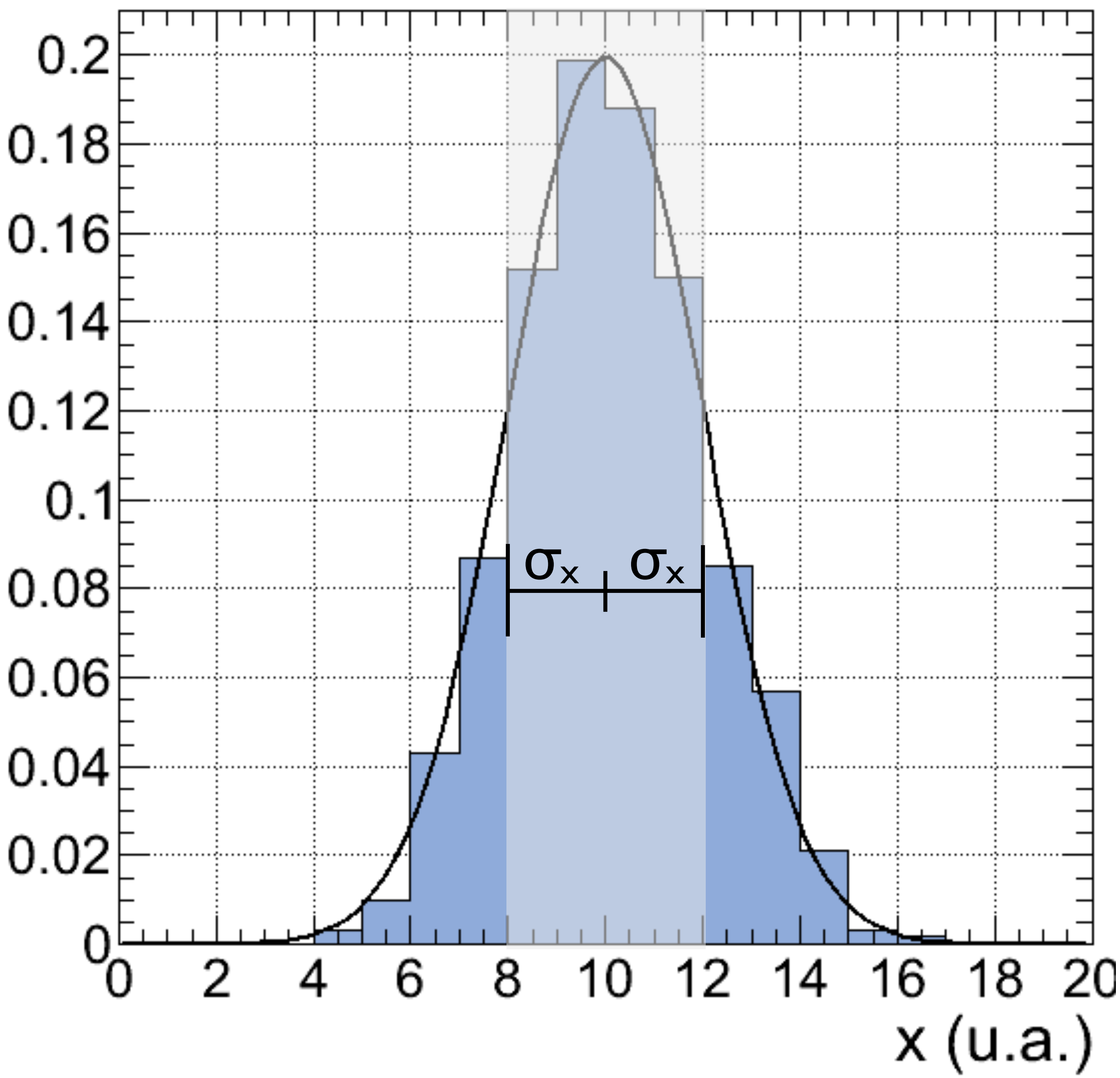


$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

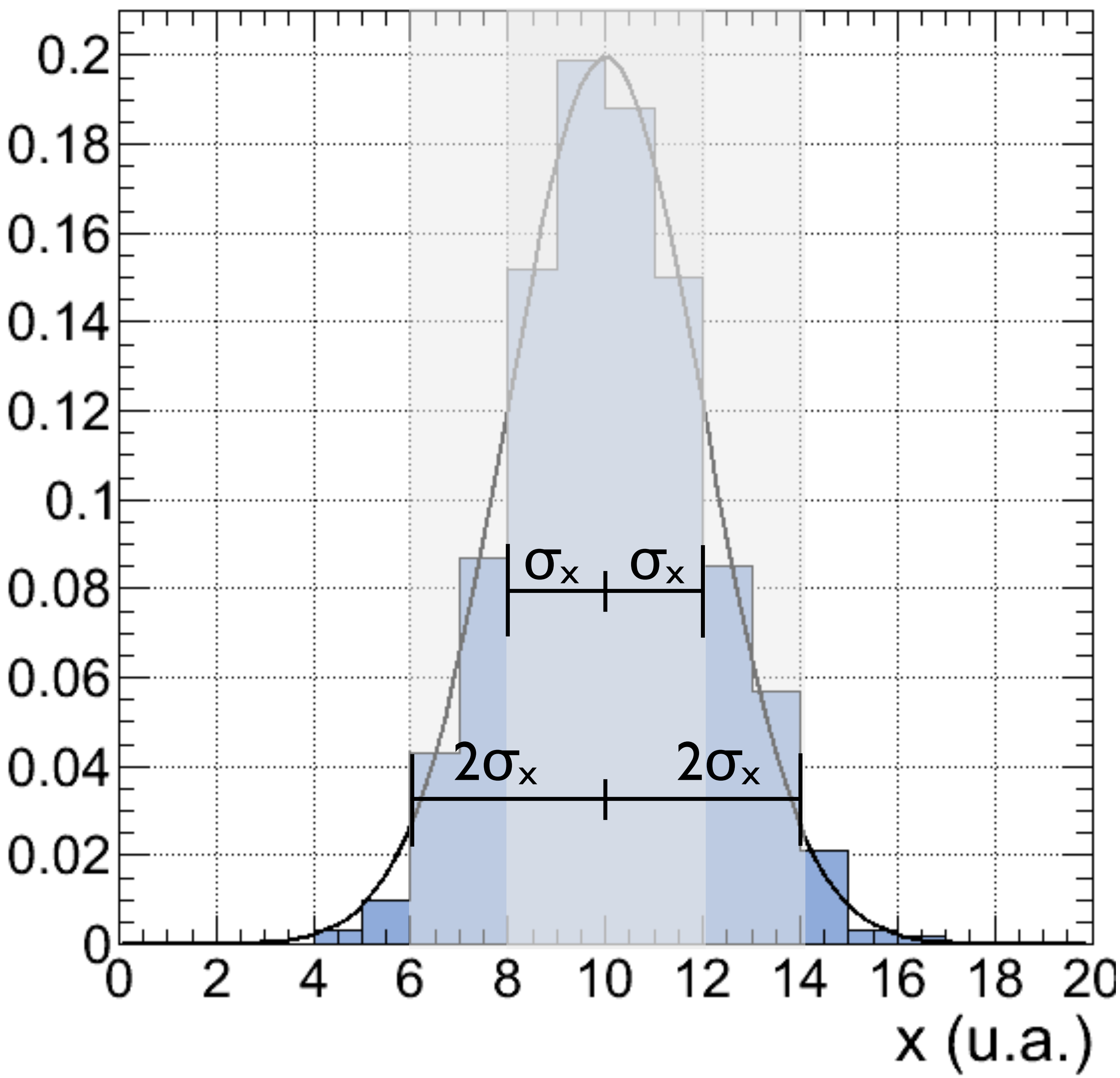
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



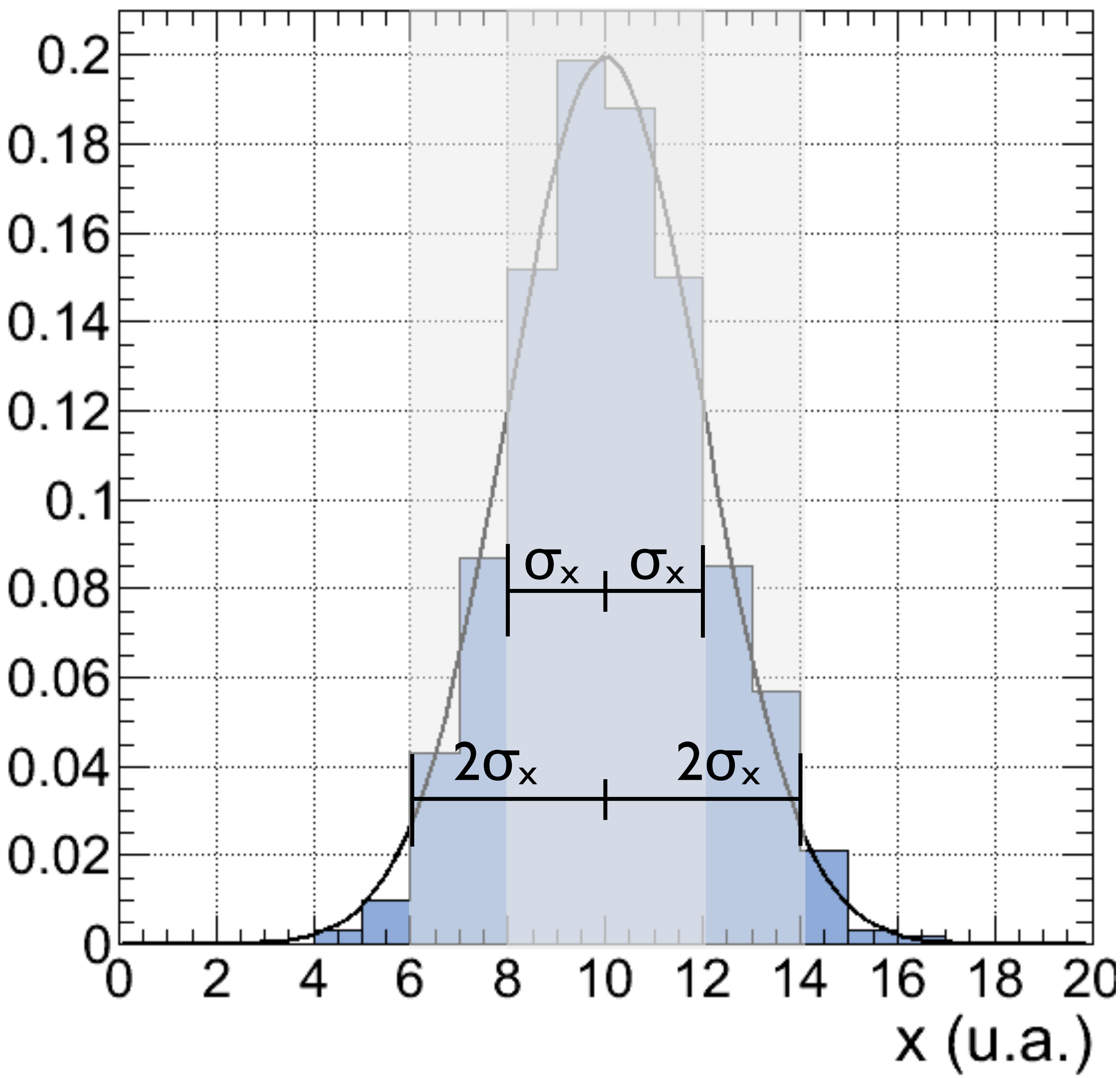
Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



Incertezas aleatórias: distribuição Gaussiana



68,3% da área entre $(\mu - \sigma_x)$ e $(\mu + \sigma_x)$

95,5% da área entre $(\mu - 2\sigma_x)$ e $(\mu + 2\sigma_x)$

99,7% da área entre $(\mu - 3\sigma_x)$ e $(\mu + 3\sigma_x)$

...

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

$$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \pm \textit{erro (unidade)}}$$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

$\boxed{\textit{estimativa do valor esperado} \;\pm\; \textit{erro (unidade)}}$

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

As estimativas do valor esperado e de seu erro associado definem um intervalo ao qual atribuímos um *nível de confiança*

Se as estimativas se distribuem de acordo com uma distribuição Gaussiana (Lei dos Erros), os valores dos níveis de confiança são determinados pela sua área correspondente

Intervalo e nível de confiança (Dist. Gaussiana)

Intervalo de Confiança	Nível de Confiança (cl)
$(\overline{x} - 0{,}67\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 0{,}67\,\sigma_{\overline{x}})$	50,0 %
$(\overline{x} - 1{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}00\,\sigma_{\overline{x}})$	68,3 %
$(\overline{x} - 1{,}65\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}65\,\sigma_{\overline{x}})$	90,0 %
$(\overline{x} - 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}})$	95,0 %
$(\overline{x} - 2{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 2{,}00\sigma_{\overline{x}})$	95,5 %
$(\overline{x} - 3{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 3{,}00\,\sigma_{\overline{x}})$	99,7 %

Intervalo de confiança a nível de confiança de 68,3%

Intervalo de confiança a nível de confiança de 95,5%

Em geral para um intervalo de confiança [a,b], o nível de confiança pode ser interpretado como a fração de ocorrências em que o valor esperado μ se encontra neste intervalo, se o experimento for repetido um grande número de vezes.

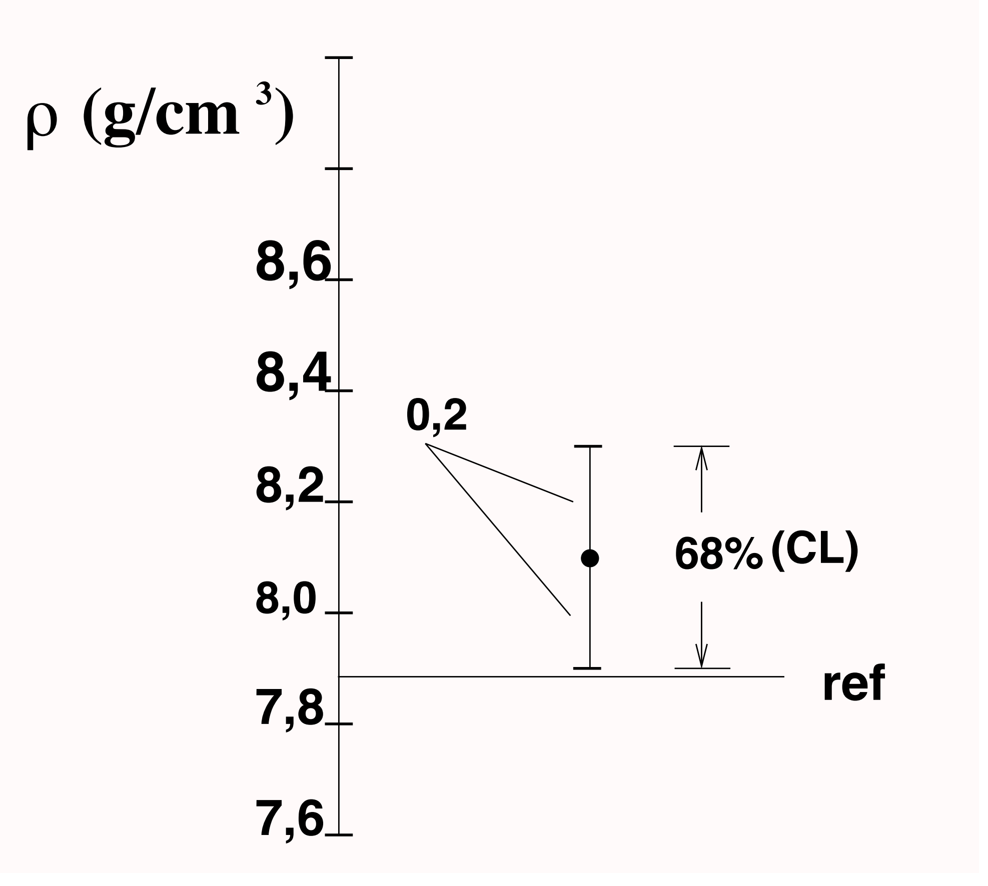
Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{ref} = 7{,}86$ g/cm^3

Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3

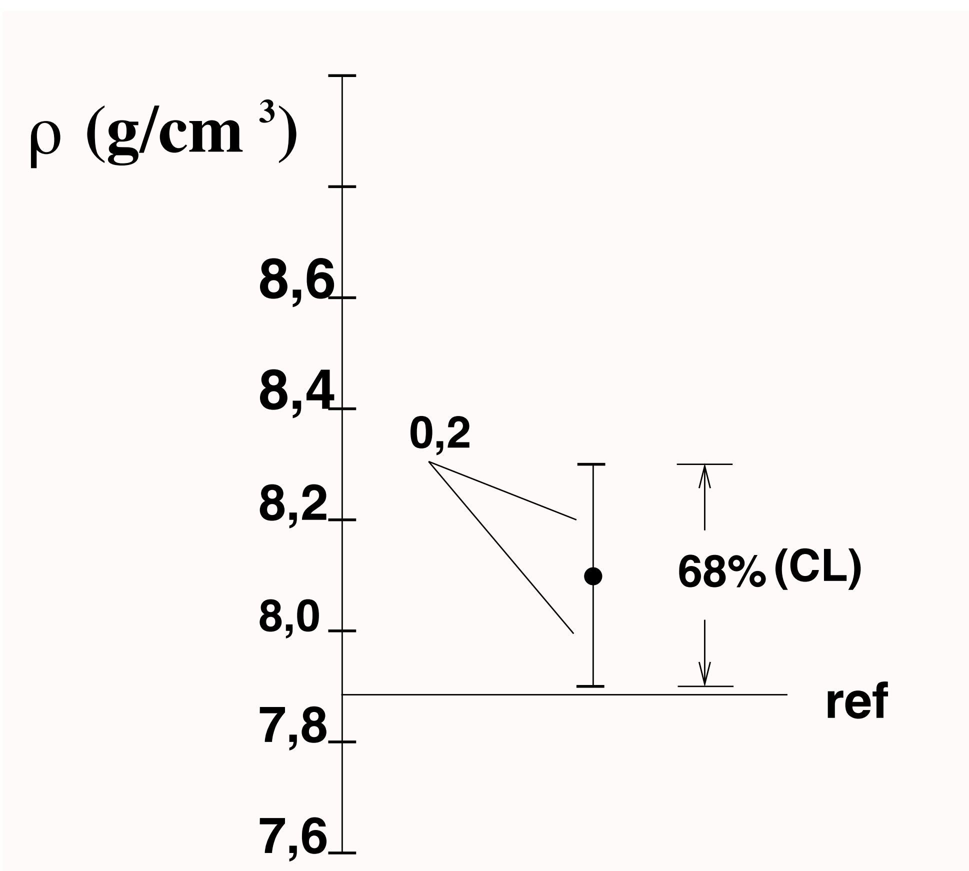
Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



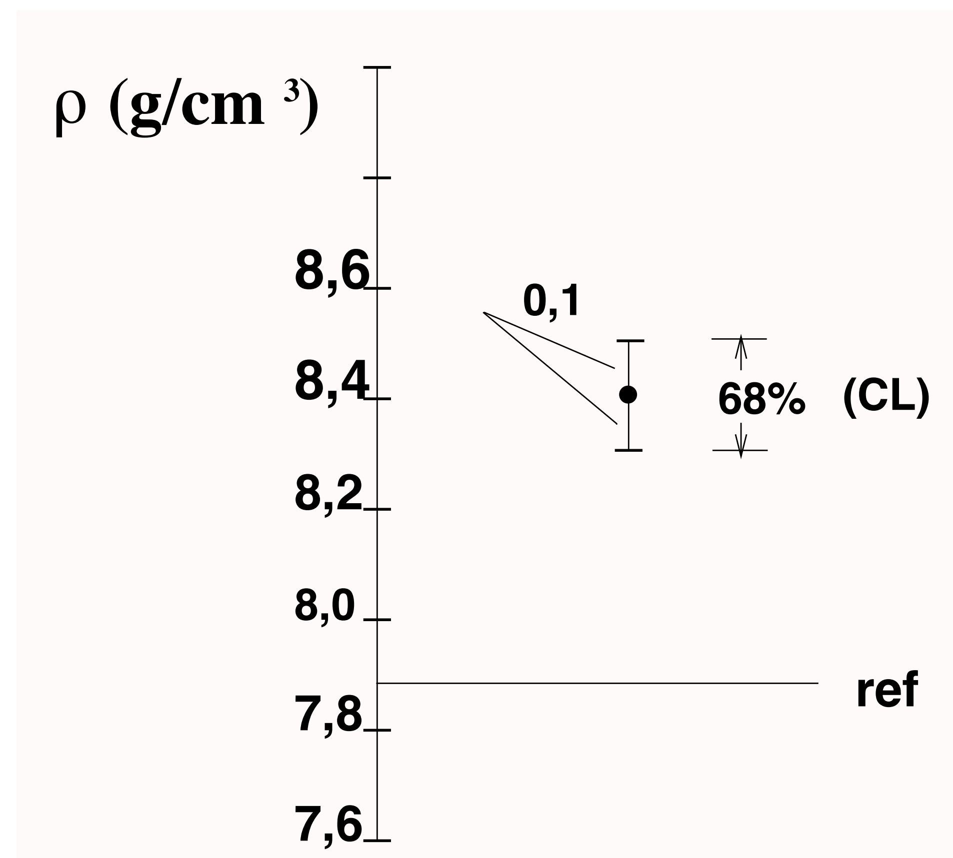
Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{ref} = 7{,}86\ g/cm^3$

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2\ g/cm^3$



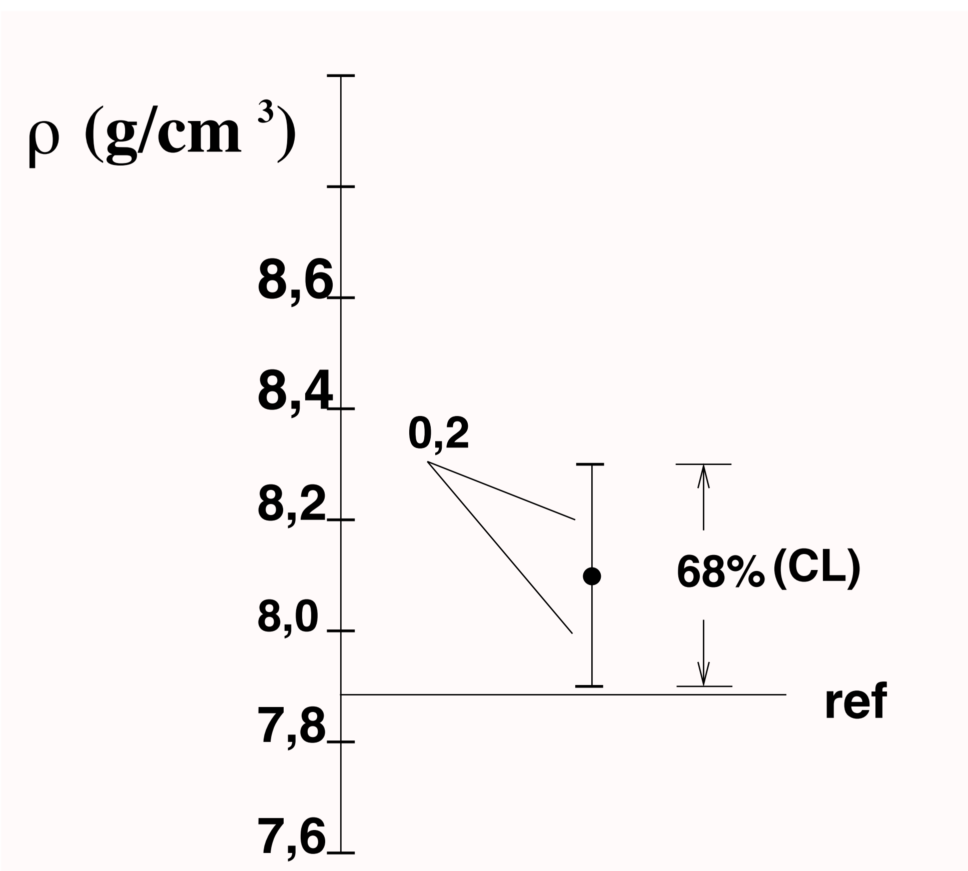
Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1\ g/cm^3$



Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

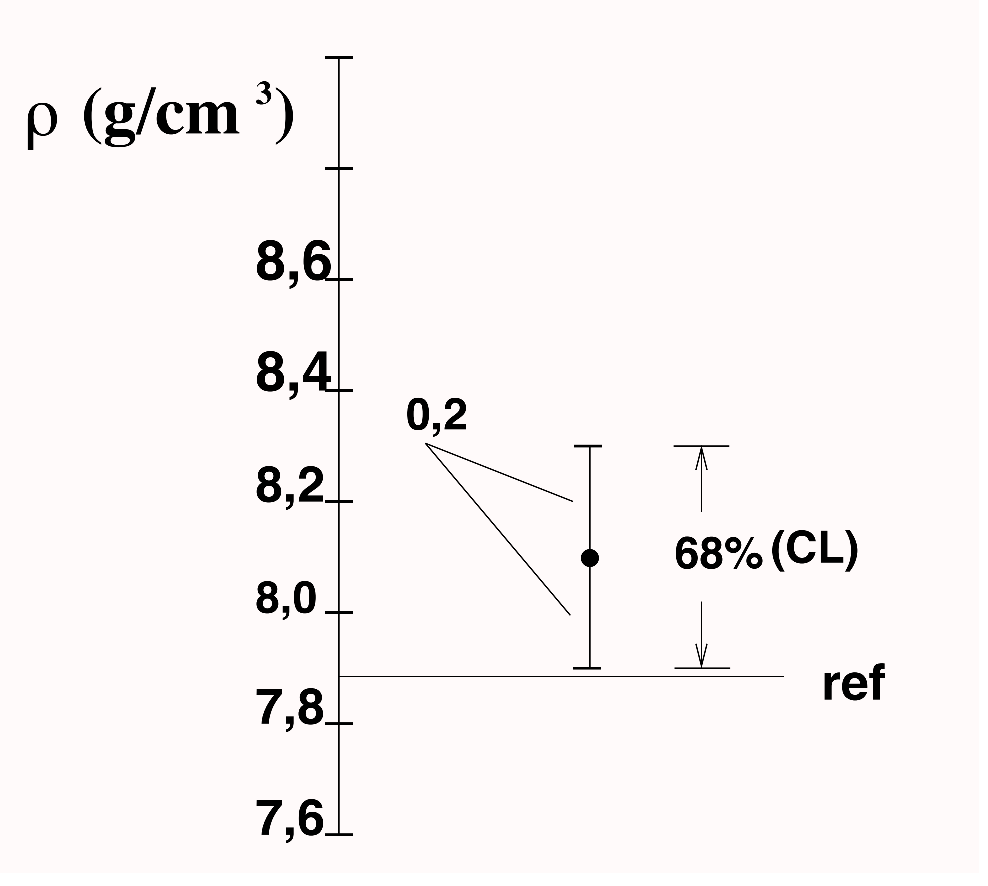
Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3

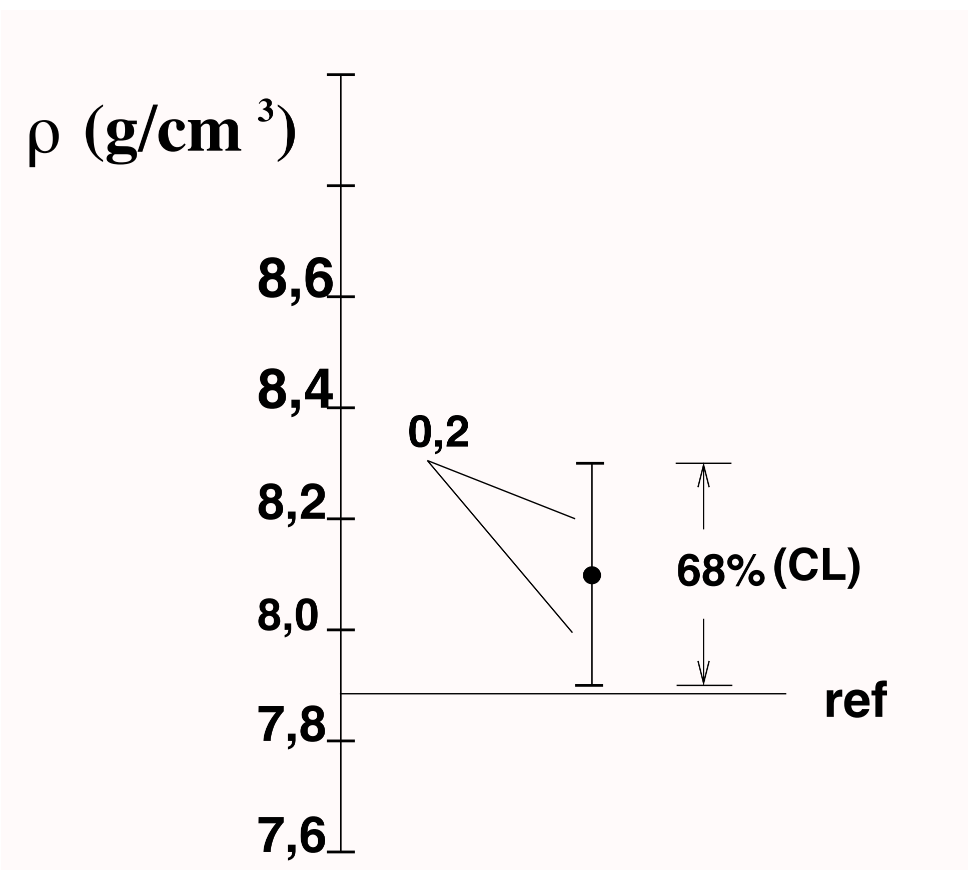


Discrepância
$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8{,}1 - 7{,}86 | = 0{,}24 \sim 1\sigma$

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



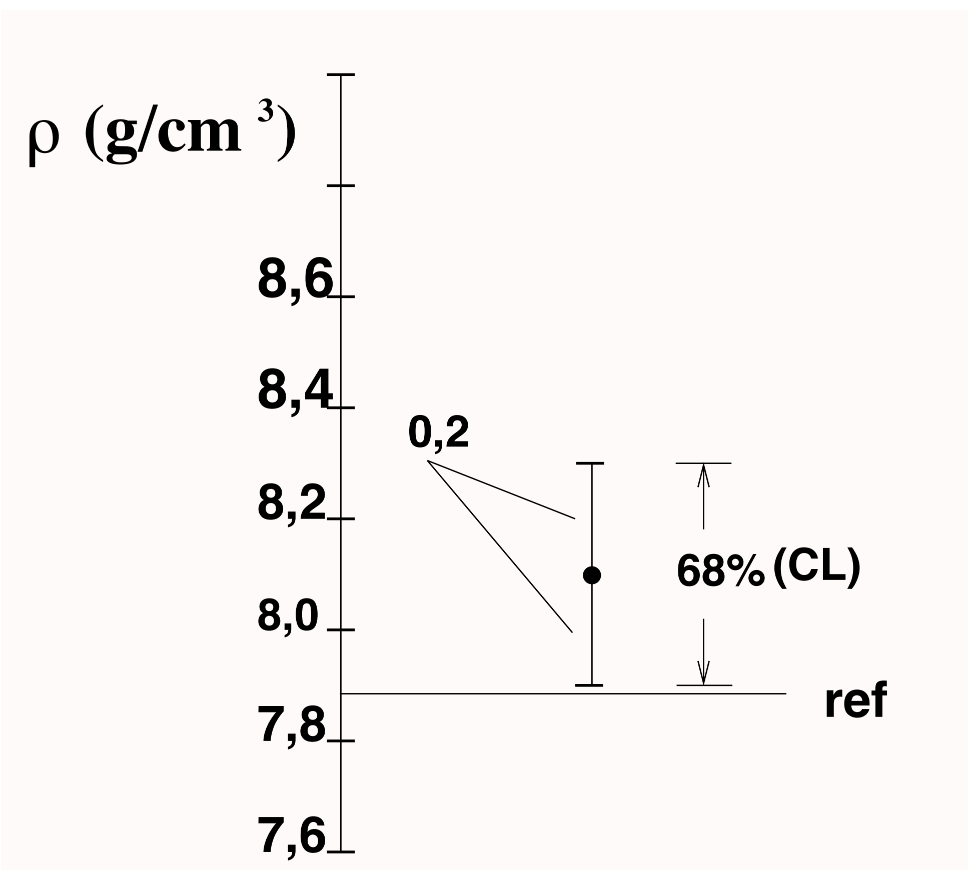
Discrepância
$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8{,}1 - 7{,}86 | = 0{,}24 \sim 1\sigma$

Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectiva de apenas ~68% de que o intervalo contenha o valor esperado

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 1:
$\rho_1 = 8{,}1 \pm 0{,}2$ g/cm^3



Discrepância
$| \rho_1 - \rho_{ref} | = | 8{,}1 - 7{,}86 | = 0{,}24 \sim 1\sigma$

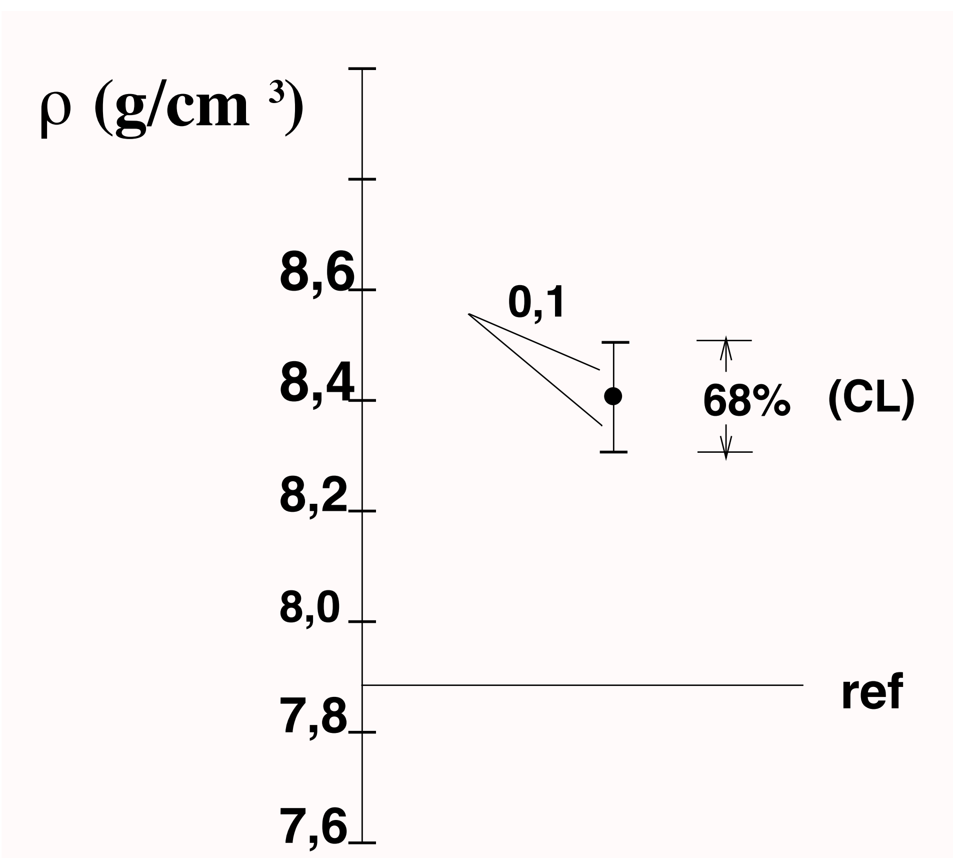
Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectiva de apenas ~68% de que o intervalo contenha o valor esperado

A discrepância não é *estatisticamente significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

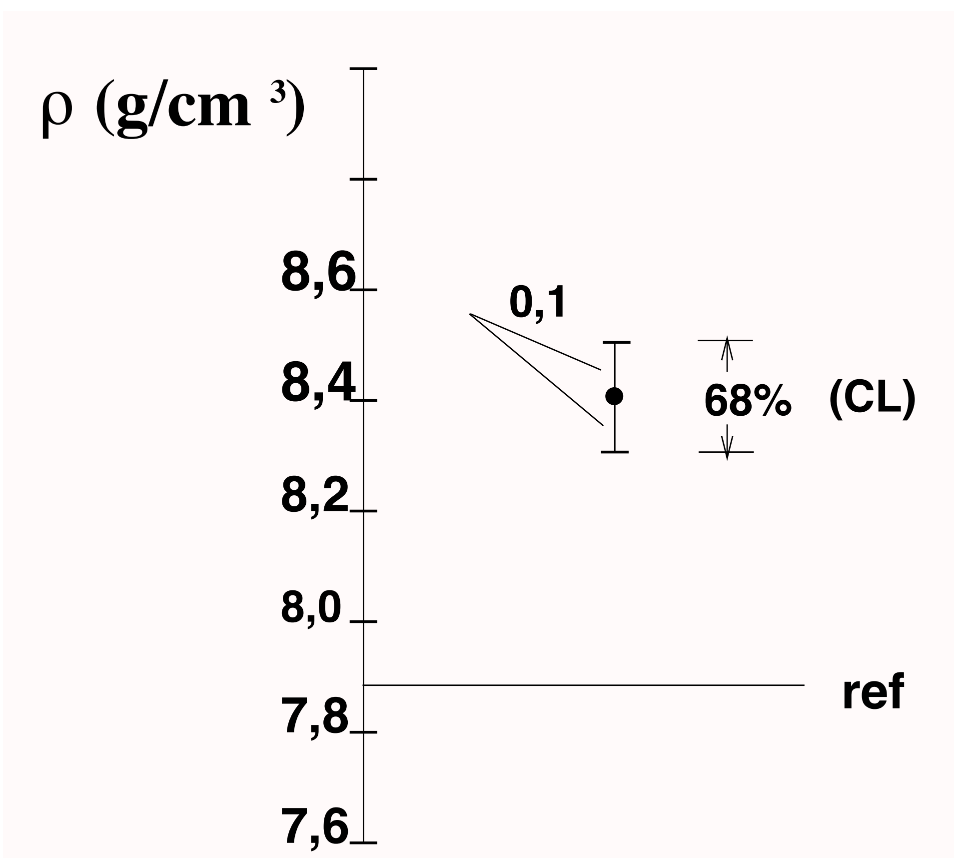
Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3

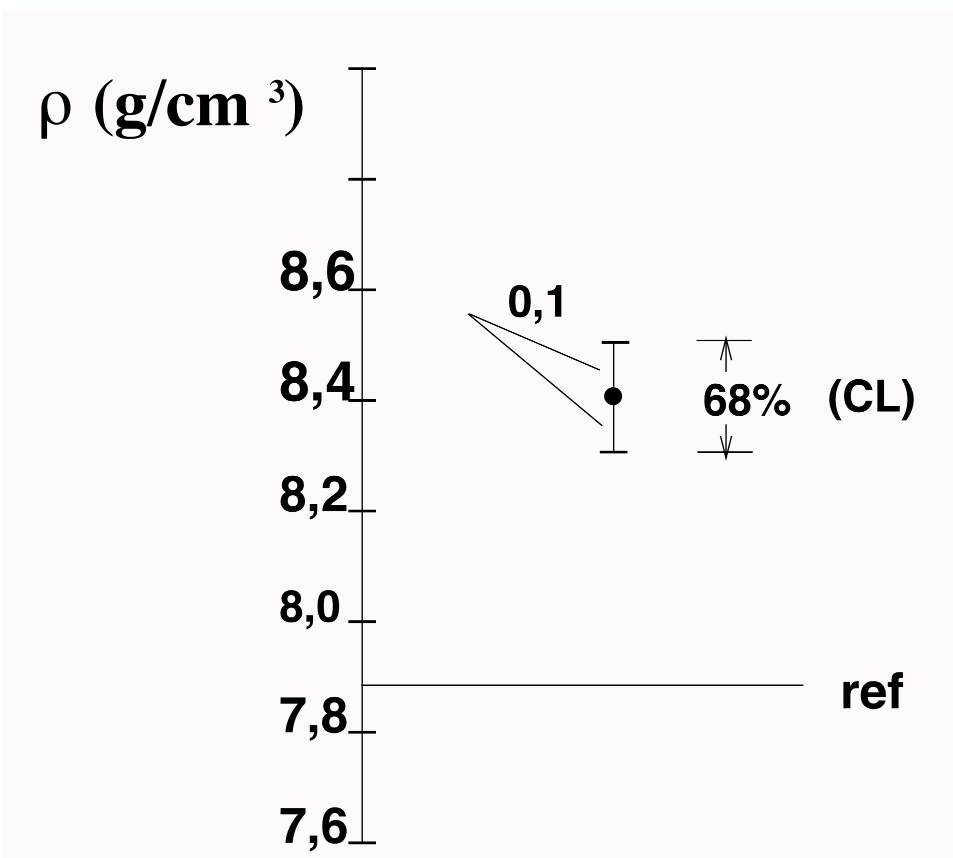


Discrepância
$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8{,}4 - 7{,}86 | = 0{,}54 > 3\sigma$

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



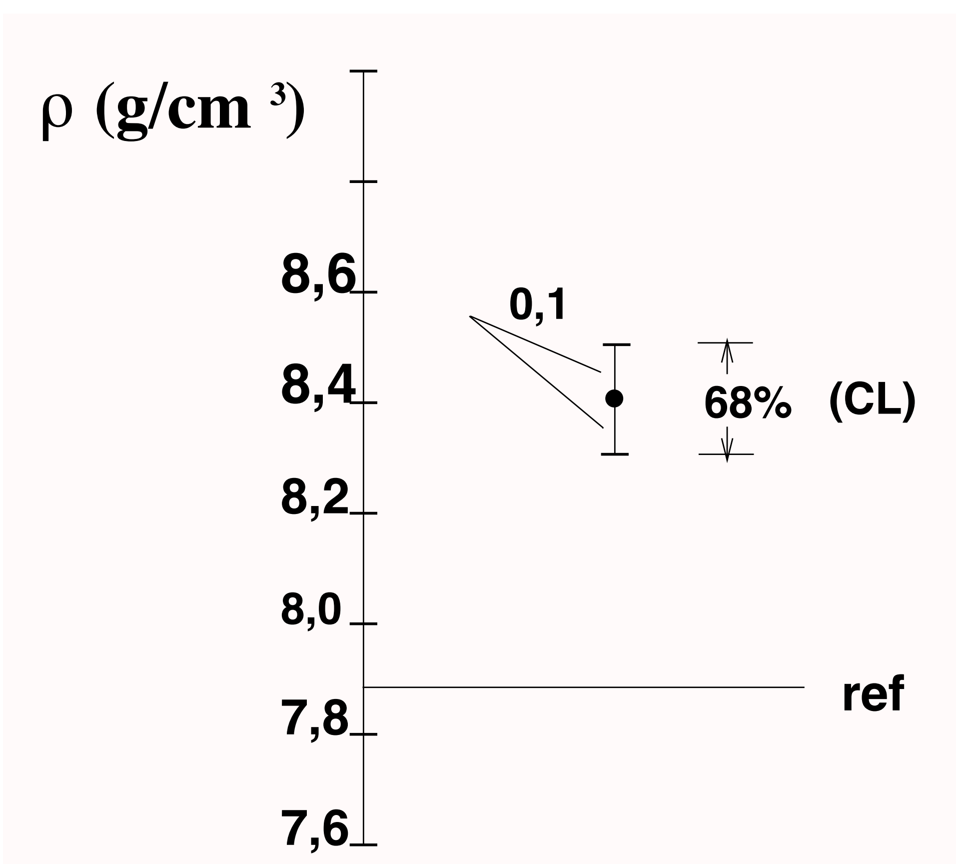
Discrepância
$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8{,}4 - 7{,}86 | = 0{,}54 > 3\sigma$

Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável (< 1%) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:
$\rho_2 = 8{,}4 \pm 0{,}1$ g/cm^3



Discrepância
$| \rho_2 - \rho_{ref} | = | 8{,}4 - 7{,}86 | = 0{,}54 > 3\sigma$

Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável (< 1%) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

<u>Regra prática</u>: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\mathrm{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \textit{Inconclusivo}$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Discrepância: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Erro associado: $\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Discrepância: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

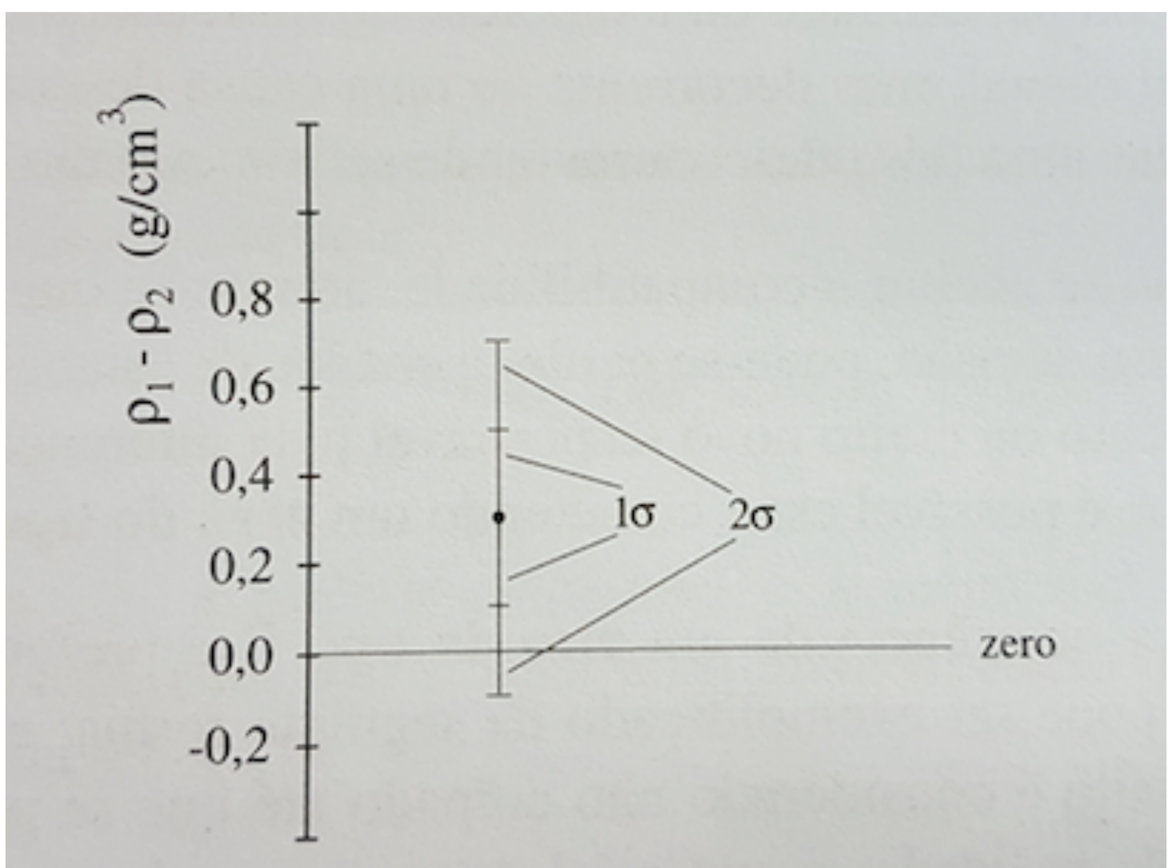
Erro associado: $\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}$

Erro da diferença $x_1 - x_2$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm³):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm³ ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm³



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0{,}3\ \mathrm{g/cm^3}$$

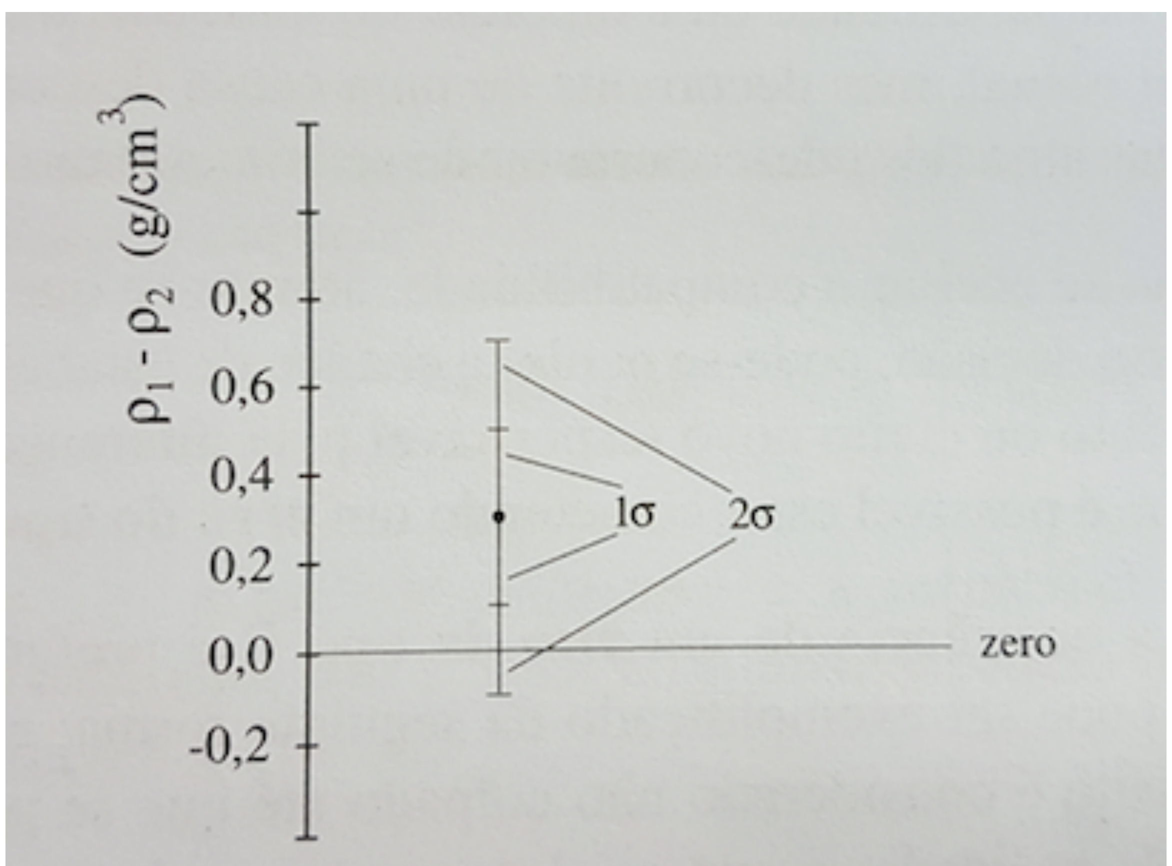
Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}1)^2} \approx 0{,}2\ \mathrm{g/cm^3}$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm³):
ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm³ ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm³



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0{,}3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}1)^2} \approx 0{,}2 \text{ g/cm}^3$$

Podemos dizer que as estimativas são compatíveis *entre si*.
A discrepância não é significativa.

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo (ρ_{ref} = 7,86 g/cm^3):

ρ_1 = 8,1 ± 0,2 g/cm^3 $\quad$ ρ_2 = 8,4 ± 0,1 g/cm^3

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0{,}2)^2} + \frac{1}{(0{,}1)^2}}} = 0{,}08944 \text{ g/cm}^3$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0{,}2}\right)^2 \cdot 8{,}1 + \left(\frac{\sigma}{0{,}1}\right)^2 \cdot 8{,}4 = 8{,}3400 \text{ g/cm}^3$$

$$\Rightarrow \rho = (8{,}34 \pm 0{,}09) \ \text{ g/cm}^3$$