

# Física Geral - Laboratório

Estimativas e erros em medidas diretas (I)



# Experimentos: medidas diretas

Experimento de medidas diretas de uma grandeza:

- ❑ Aquisição de um conjunto de dados através de medições repetidas e independentes de uma mesma grandeza
- ❑ Medições independentes realizadas nas mesmas condições experimentais, ambientais, etc.
- ❑ Objetivo: Estimativa do valor esperado da grandeza sendo medida

# Experimentos: medidas diretas

Experimento de medidas diretas de uma grandeza:

- ❑ Aquisição de um conjunto de dados através de medições repetidas e independentes de uma mesma grandeza
- ❑ Medições independentes realizadas nas mesmas condições experimentais, ambientais, etc.
- ❑ Objetivo: Estimativa do valor esperado da grandeza sendo medida

No processo de medição de uma grandeza, há inevitavelmente incertezas

- ❑ Imperfeições instrumentais, limitações observacionais, condições ambientais, etc.
- ❑ Hipóteses, modelos teóricos
- ❑ Natureza possivelmente aleatória do fenômeno

# Valor esperado de uma grandeza

Valor esperado: valor hipotético,  $\mu$ , de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas indefinidamente

# Valor esperado de uma grandeza

Valor esperado: valor hipotético,  $\mu$ , de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas indefinidamente

É claro que não podemos repetir uma medição infinitamente..

Dessa forma, fazemos uma estimativa para o valor esperado, a partir de um conjunto finito de medidas da grandeza

Chamamos esse conjunto finito de uma amostra de todos os possíveis valores para as medidas, ou população

# Resultado de uma medição

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$$x \pm \epsilon_x (\text{unidade})$$

# Estimativa do valor esperado

A partir de medições de uma grandeza, com instrumentos bem calibrados e procedimentos apropriados, e para um grande número de medidas diretas, a média da distribuição de frequência dos dados tende ao valor esperado da grandeza

A distribuição de frequência dos dados é chamada de distribuição amostral

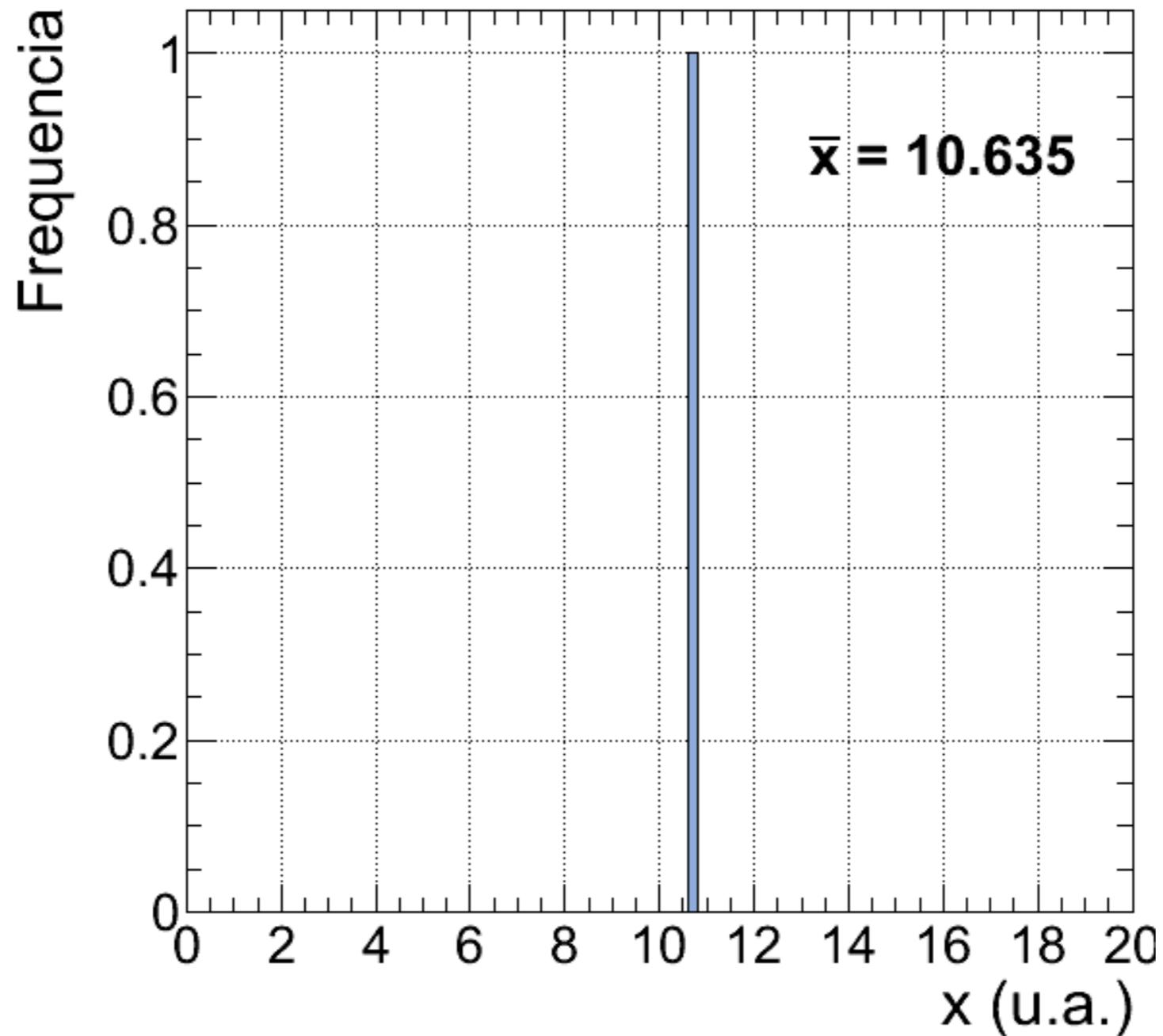
Ou seja, a melhor estimativa para o valor esperado de uma grandeza,  $x$ , a partir de uma amostra  $\{x_i\}$  de dados, é a média

$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$

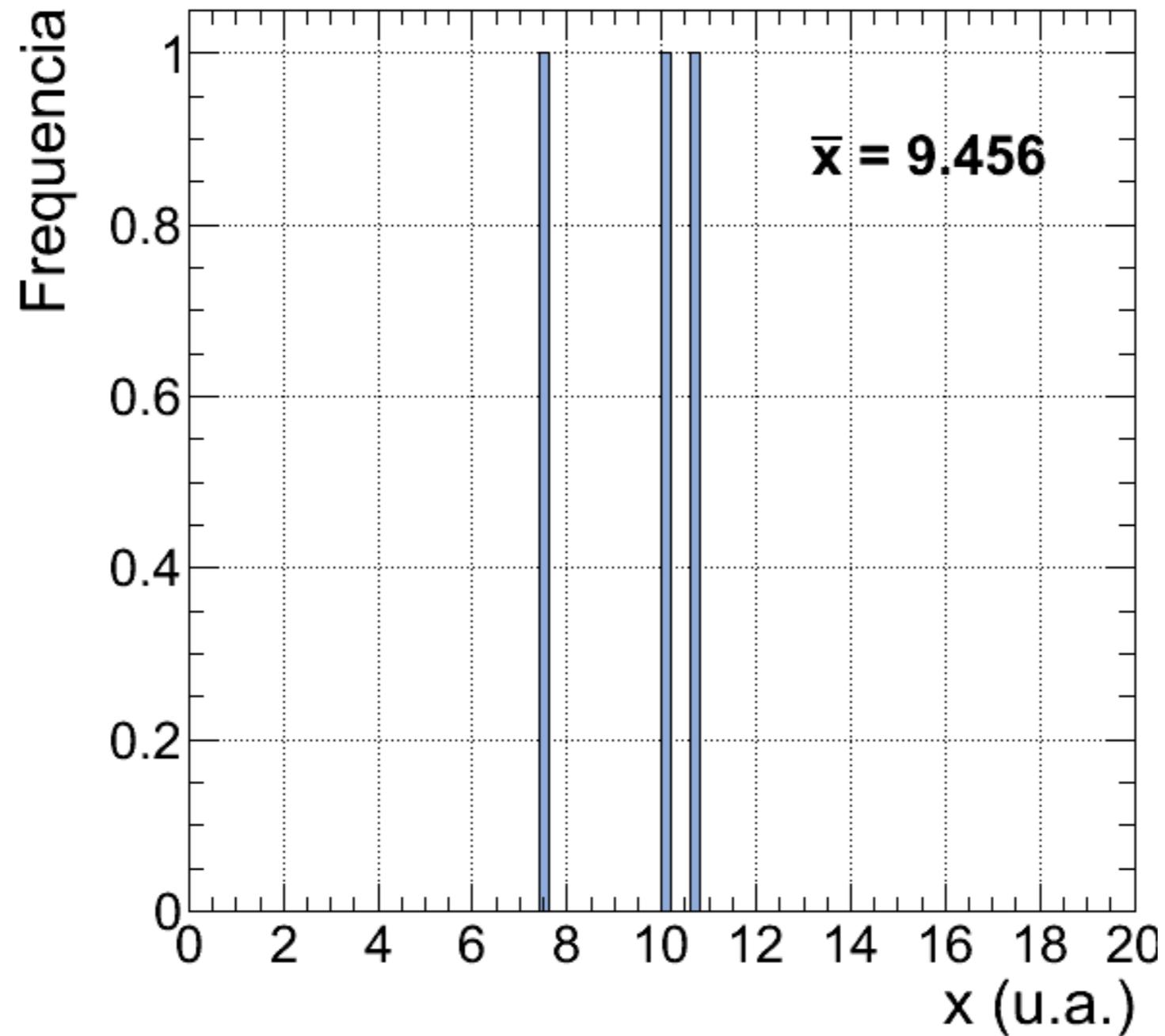
(Podemos pensar no *limite* para um número grande de medidas, ou seja,  $N \rightarrow \infty$ )

# Estimativa do valor esperado

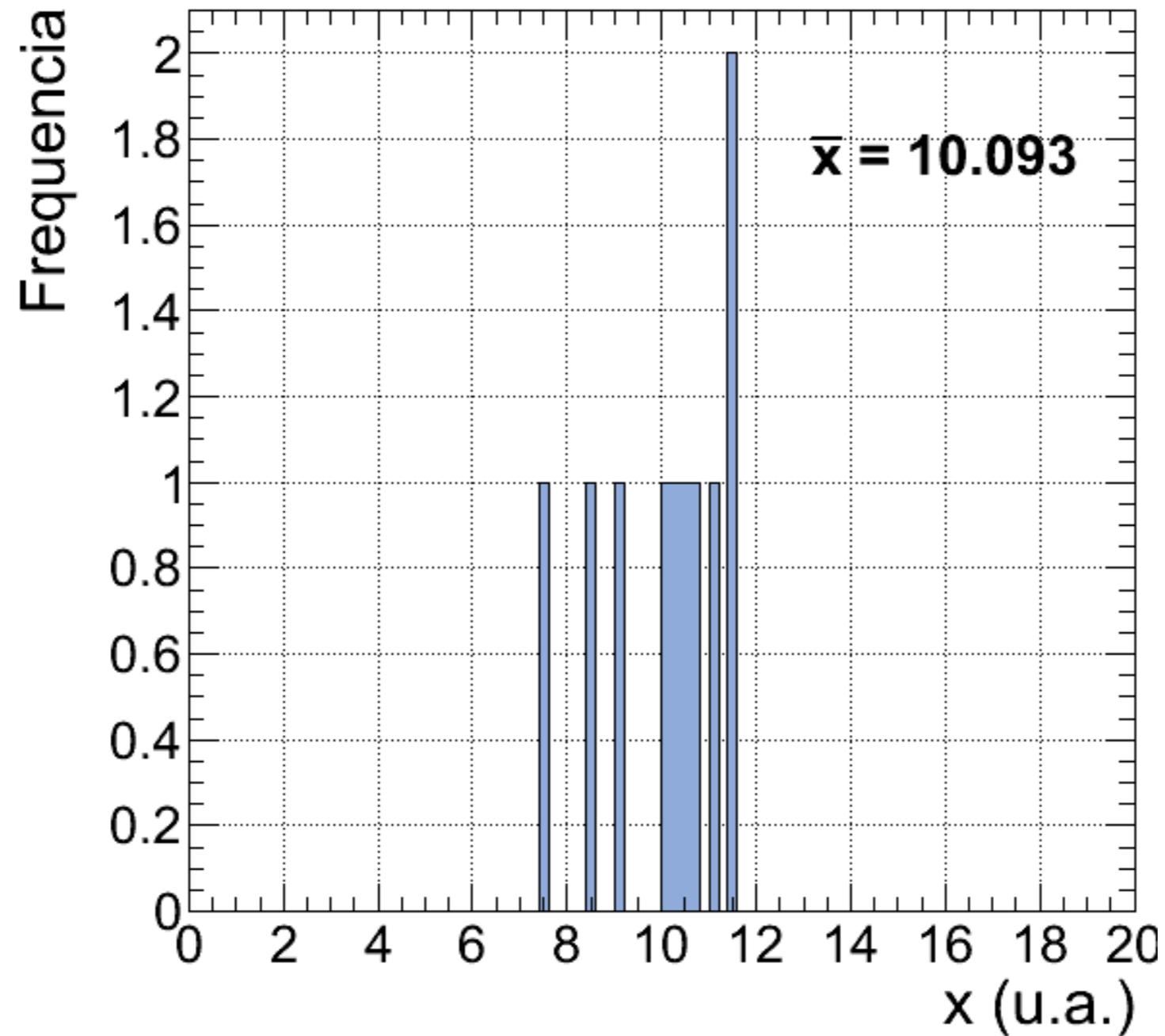
# Estimativa do valor esperado



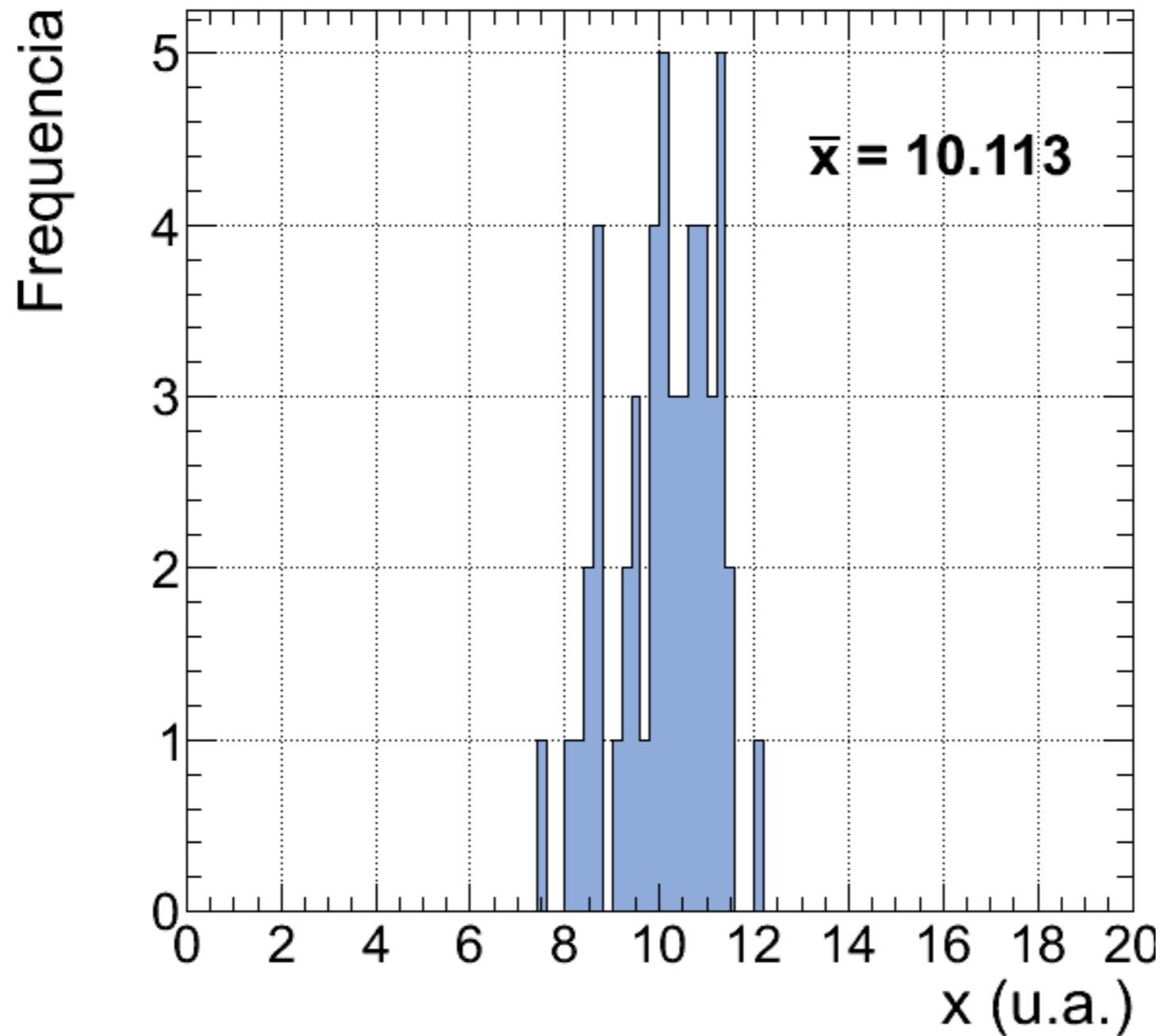
# Estimativa do valor esperado



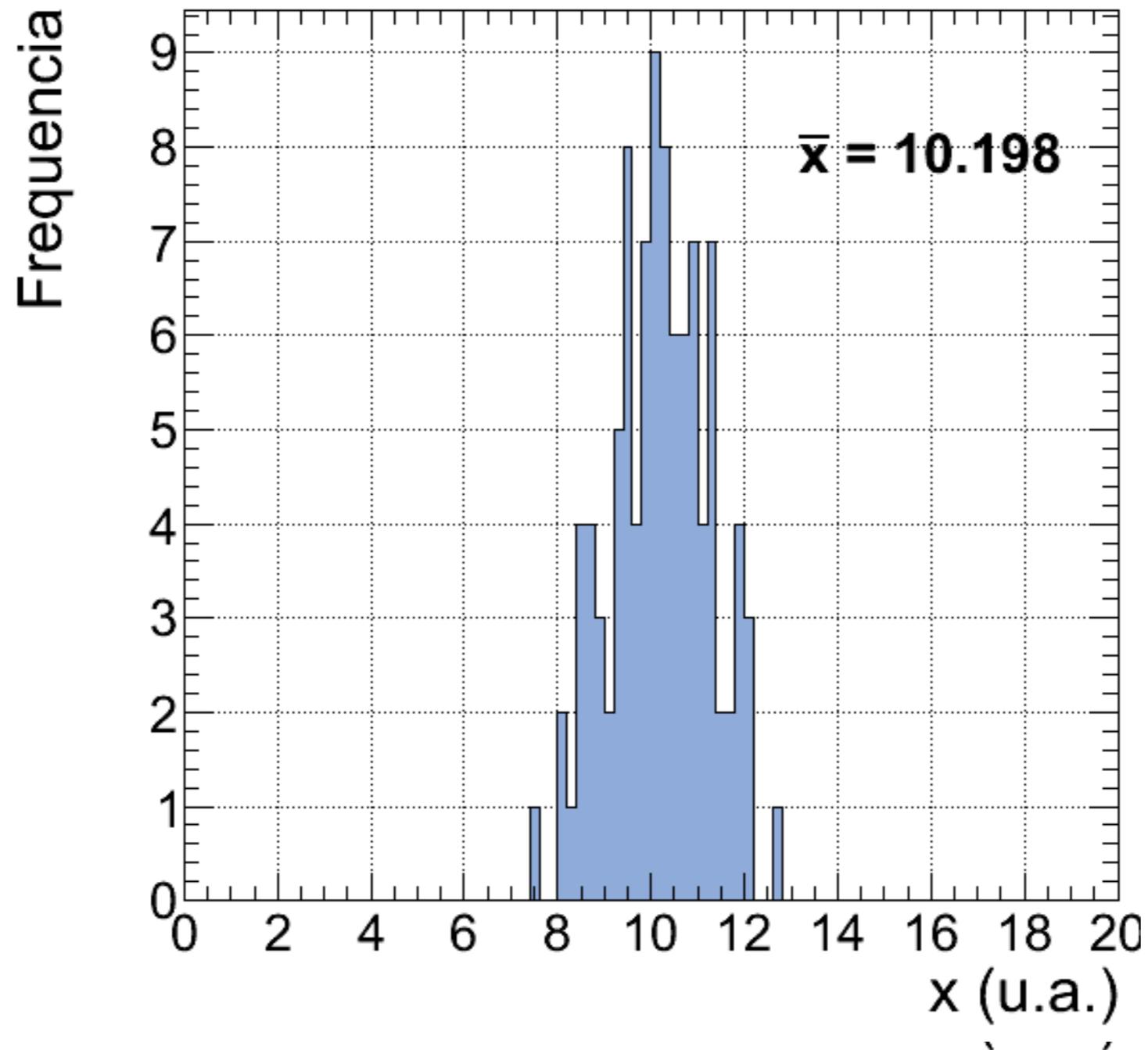
# Estimativa do valor esperado



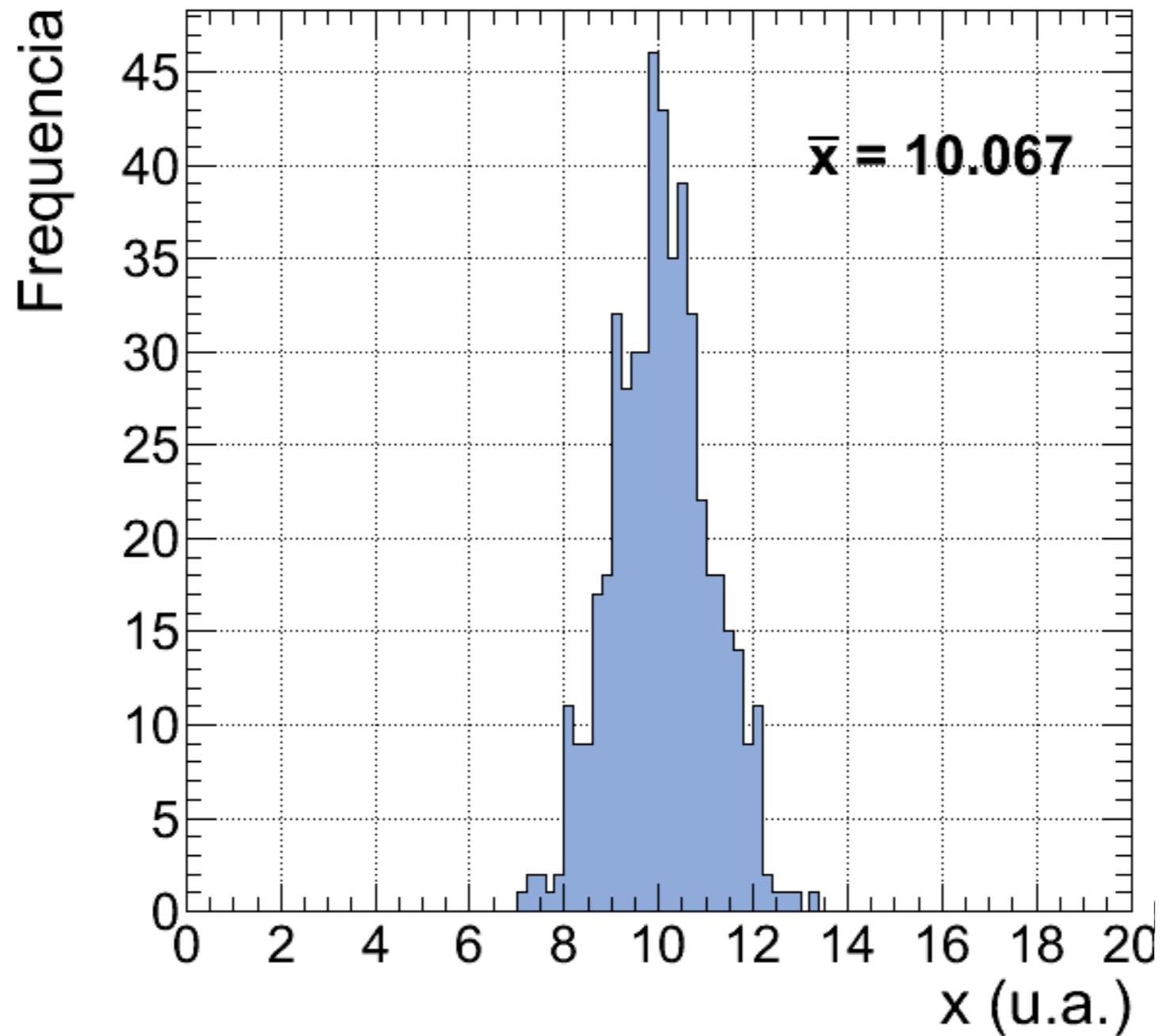
# Estimativa do valor esperado



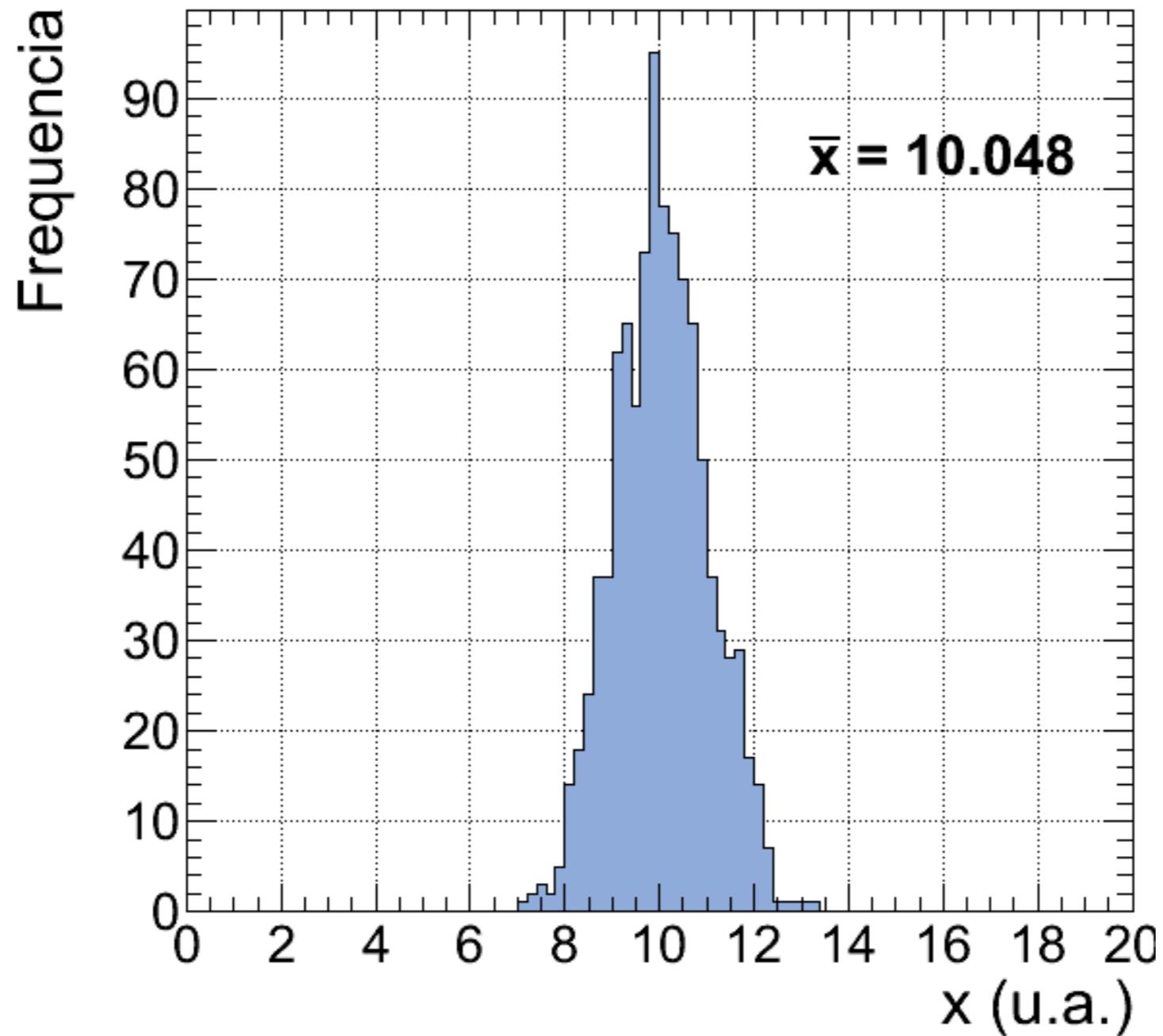
# Estimativa do valor esperado



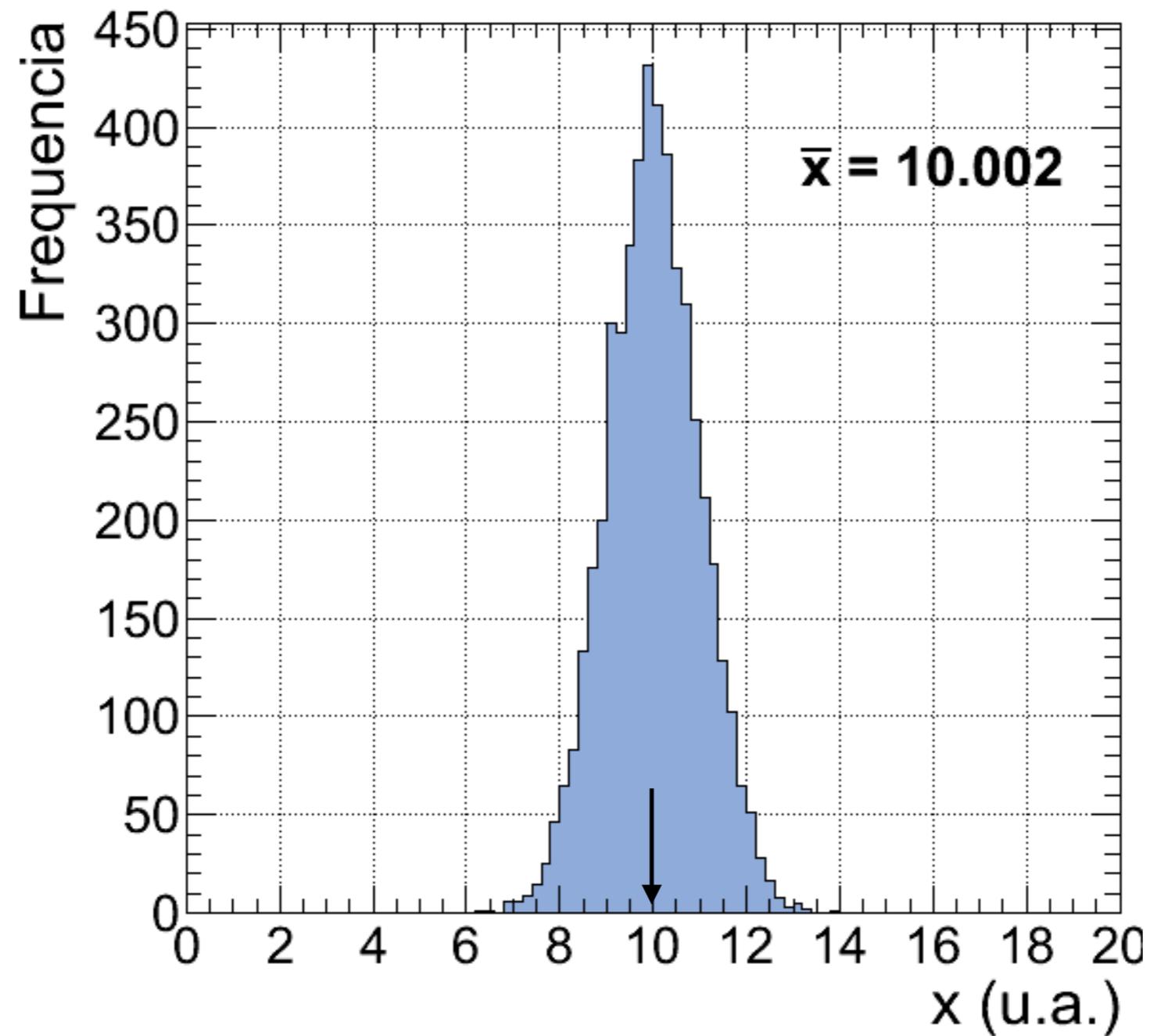
# Estimativa do valor esperado



# Estimativa do valor esperado



# Estimativa do valor esperado



# Exemplo: Medida do comprimento de uma mesa

N medidas do comprimento de uma mesa

Medida	L (cm)
1	149.81
2	149.90
3	150.10
4	150.50
5	149.80
6	149.80
7	149.71
8	150.21
9	149.75
10	150.10
11	150.15
12	150.10
13	150.00
14	150.40
15	149.91
16	150.10
17	150.09
18	150.00

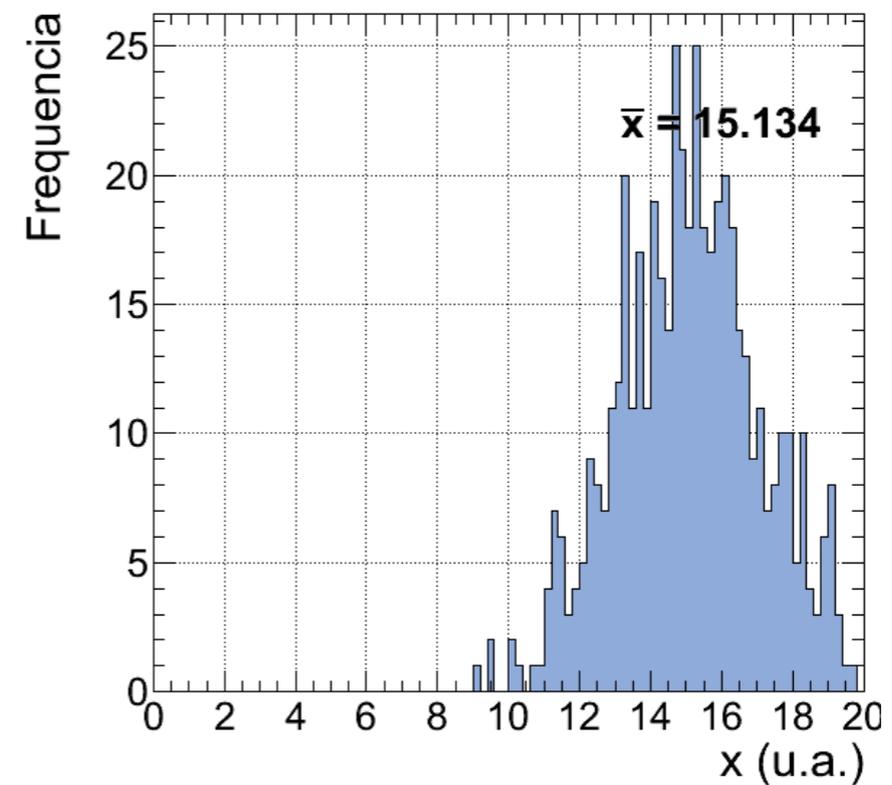
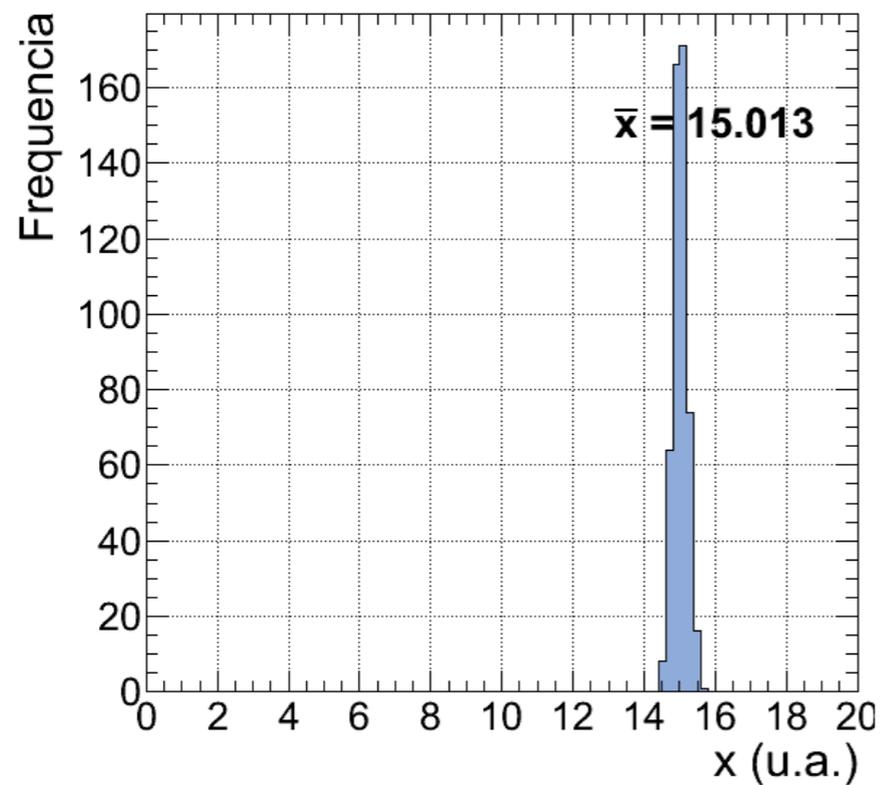
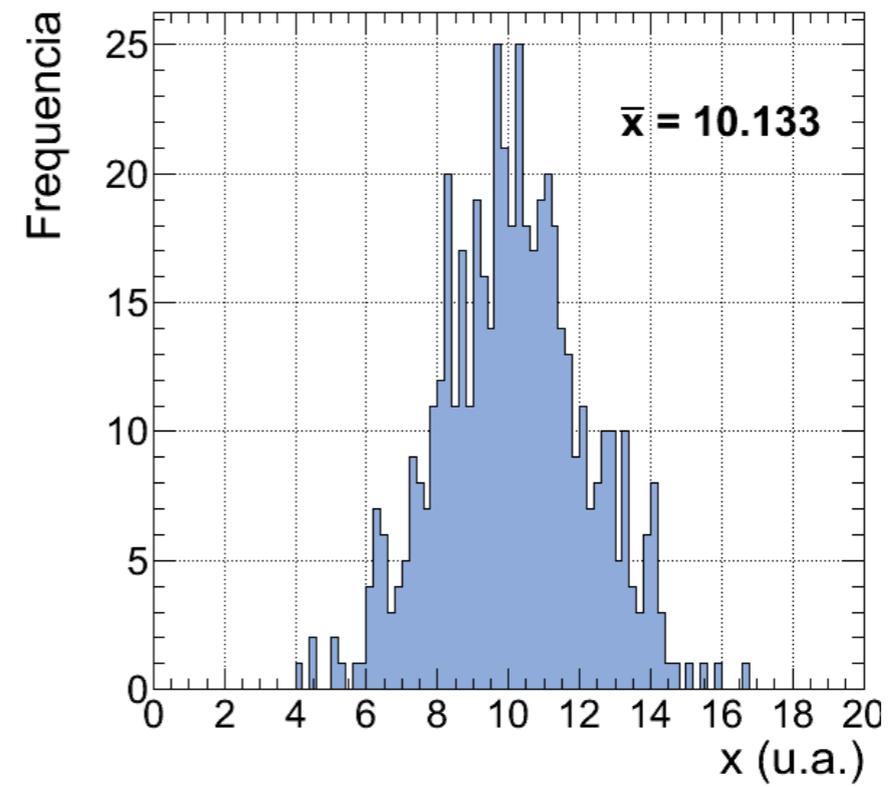
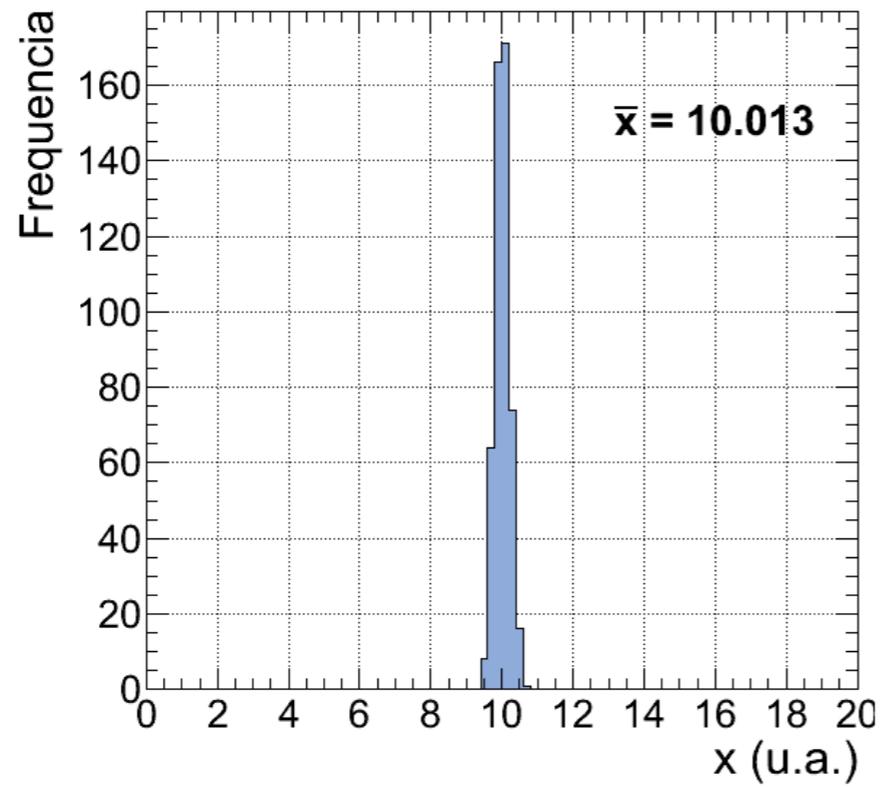
# Incertezas aleatórias e sistemáticas

*Incertezas aleatórias:* devido a flutuações inevitáveis no processo de medição, que provocam a dispersão das medidas em torno da média

*Incertezas sistemáticas:* desvios em geral regulares, devido a imperfeições instrumentais, observacionais, ou do modelo teórico

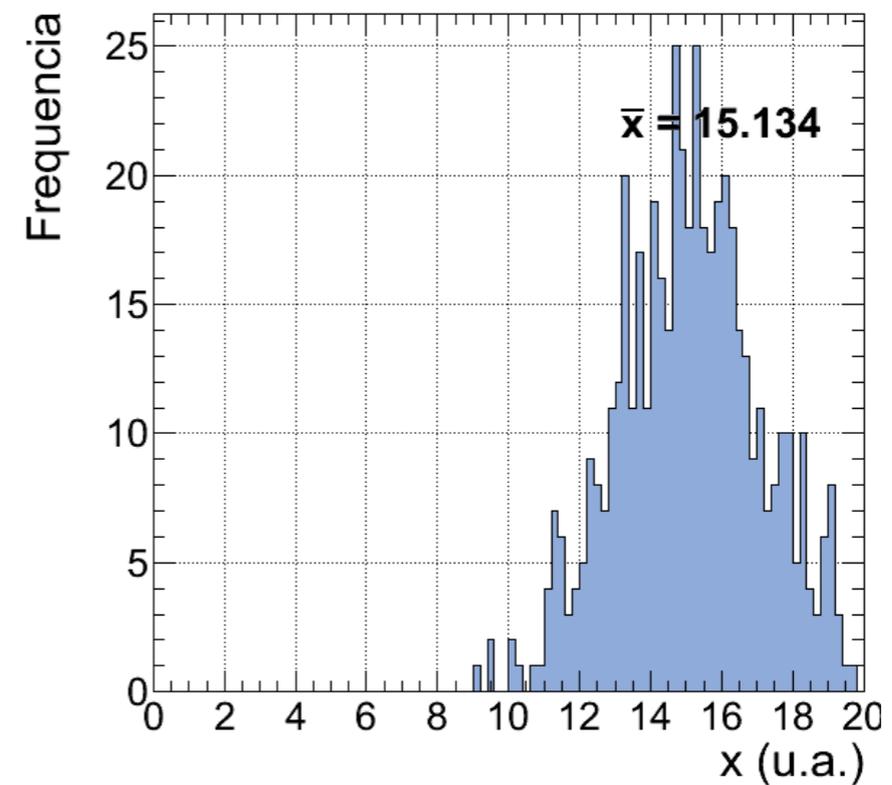
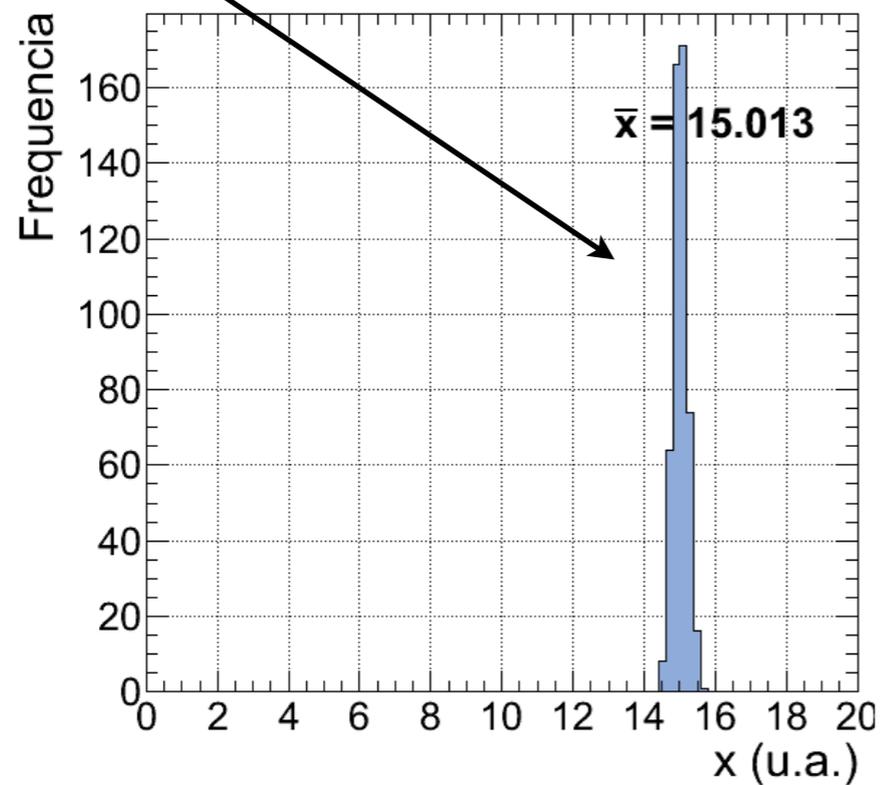
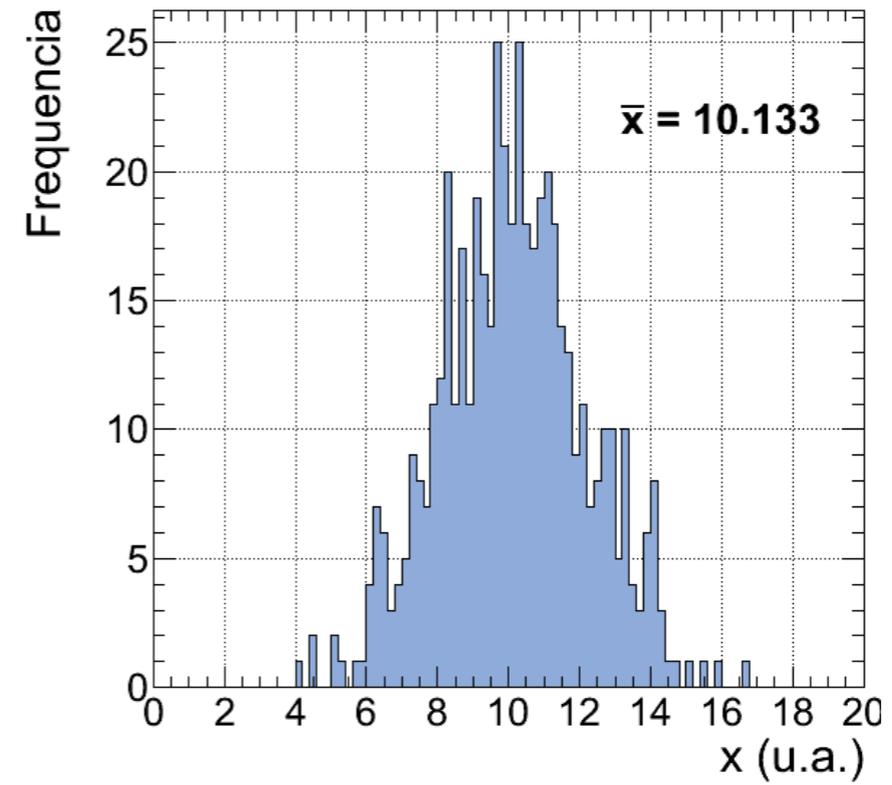
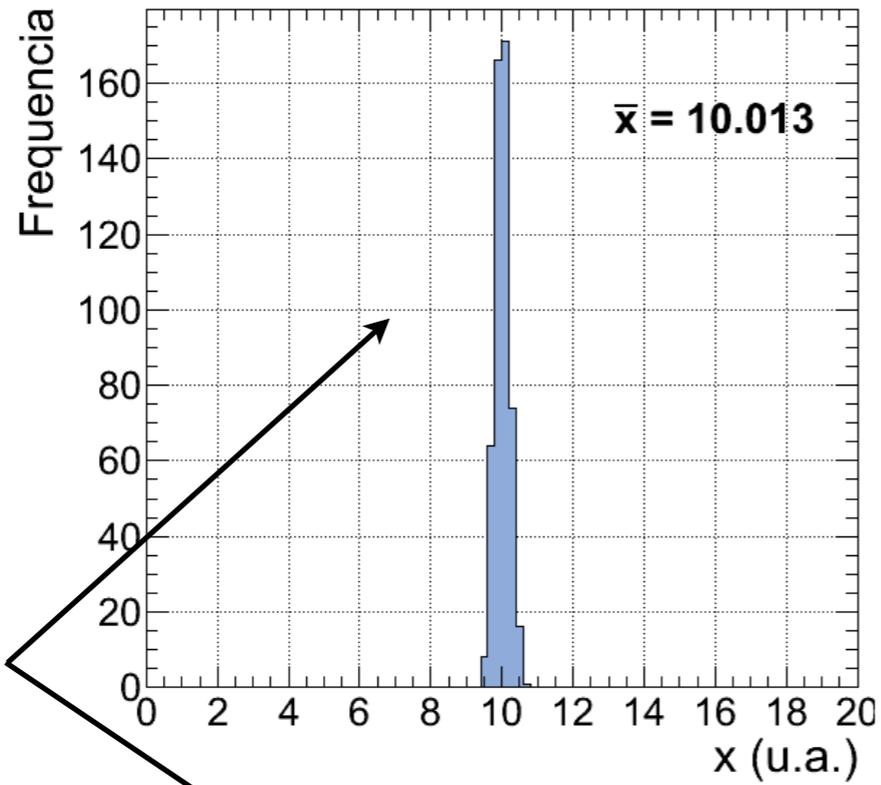
As *incertezas aleatórias* estão associadas à precisão do experimento, enquanto as *incertezas sistemáticas*, com a sua exatidão

# Medições: precisão e exatidão



# Medições: precisão e exatidão

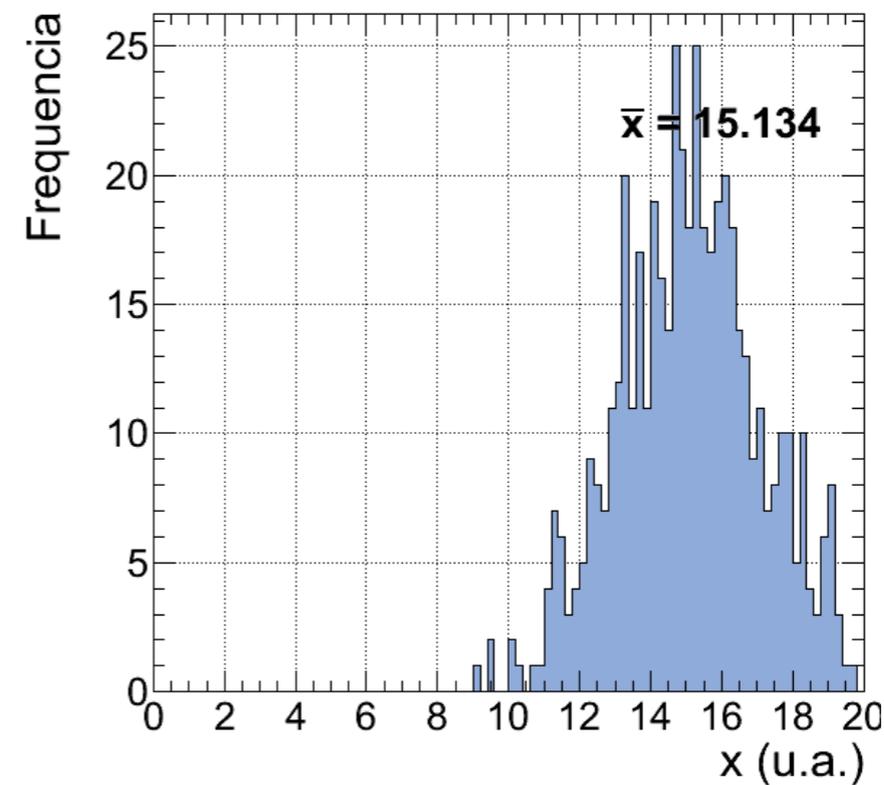
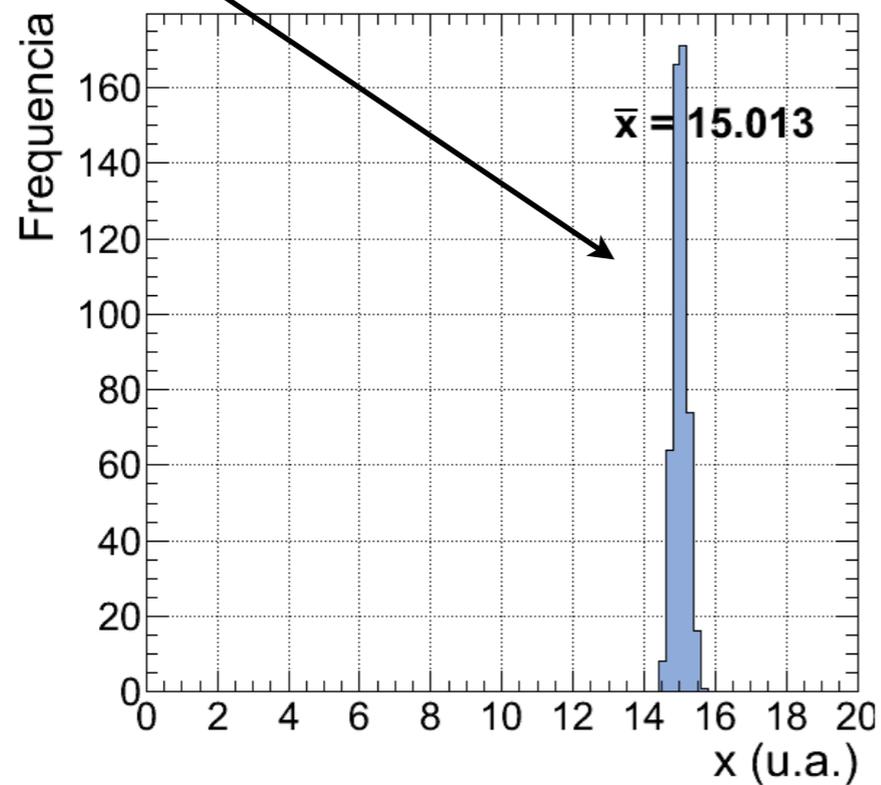
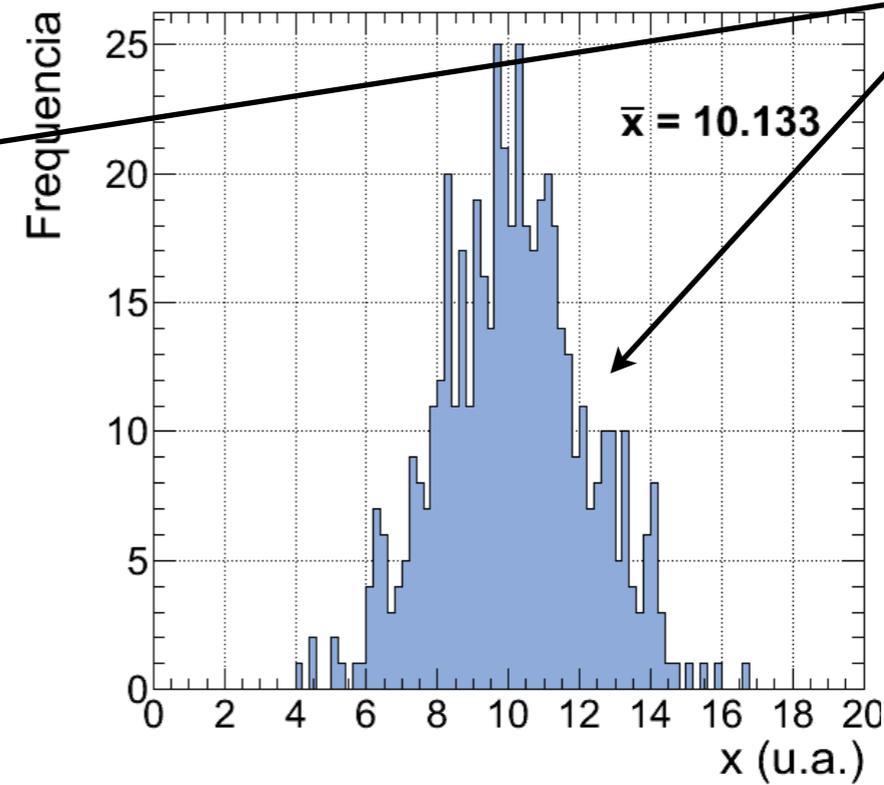
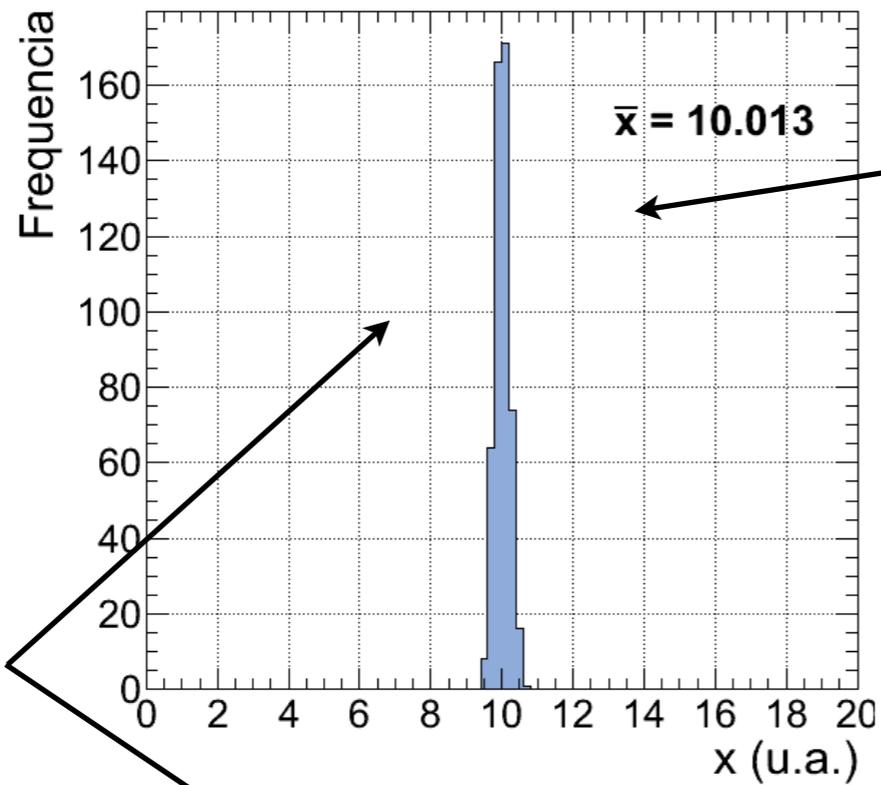
preciso



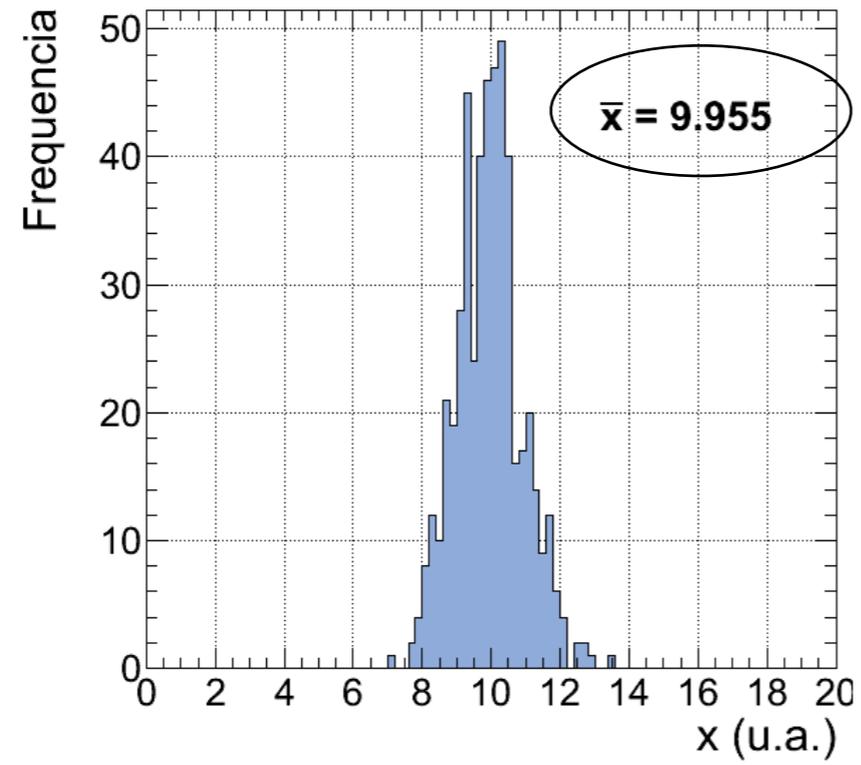
# Medições: precisão e exatidão

preciso

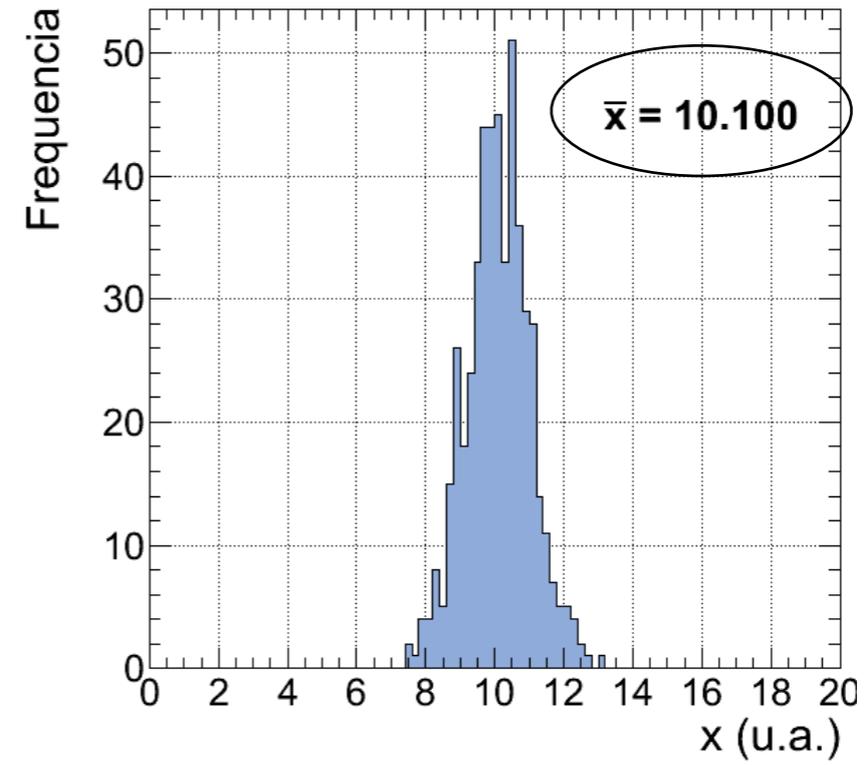
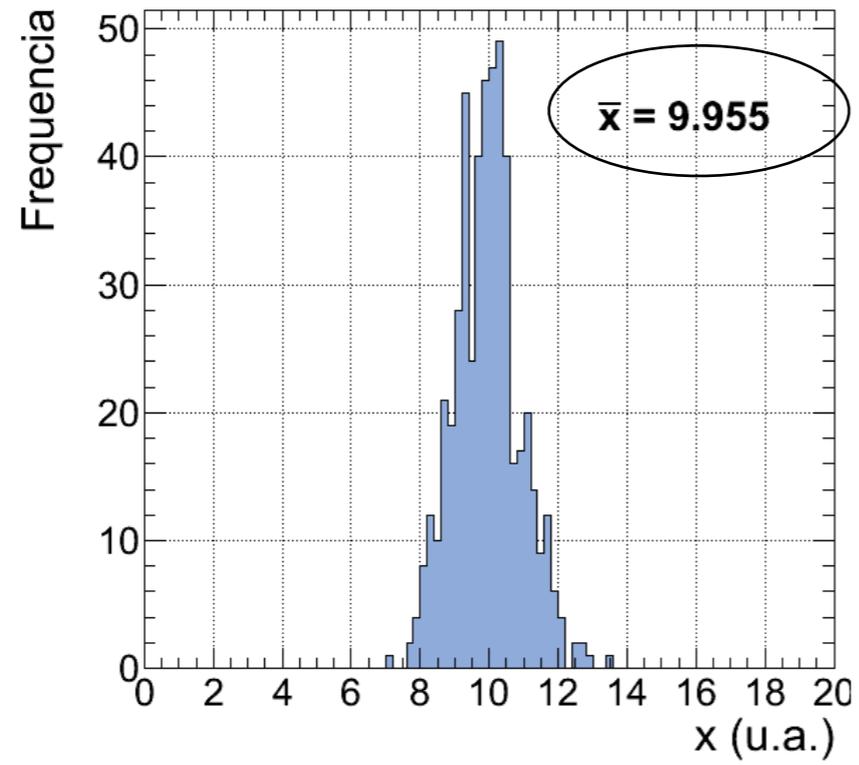
exato



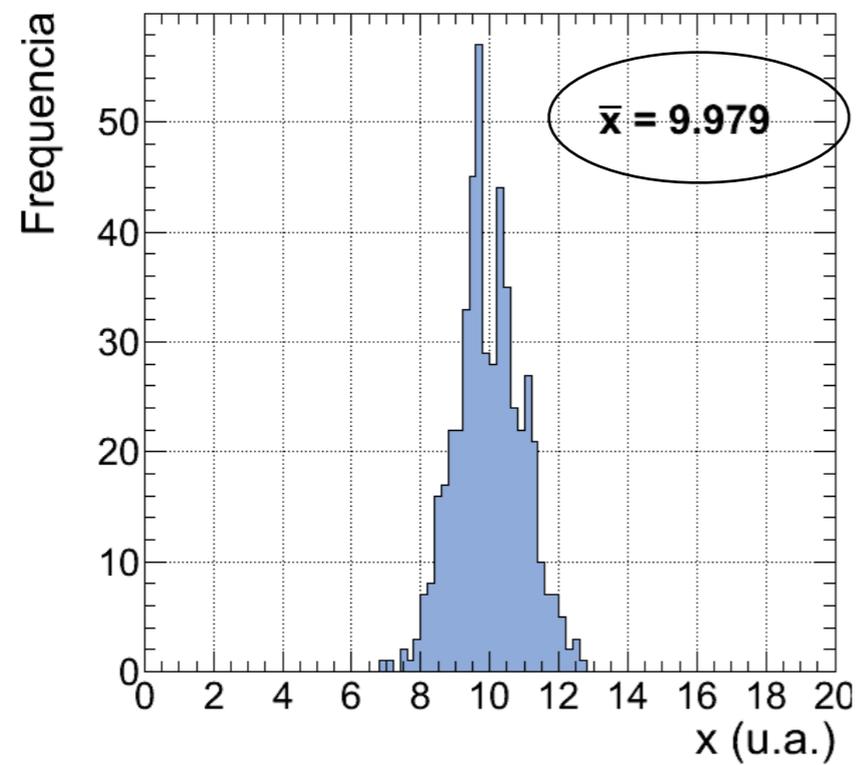
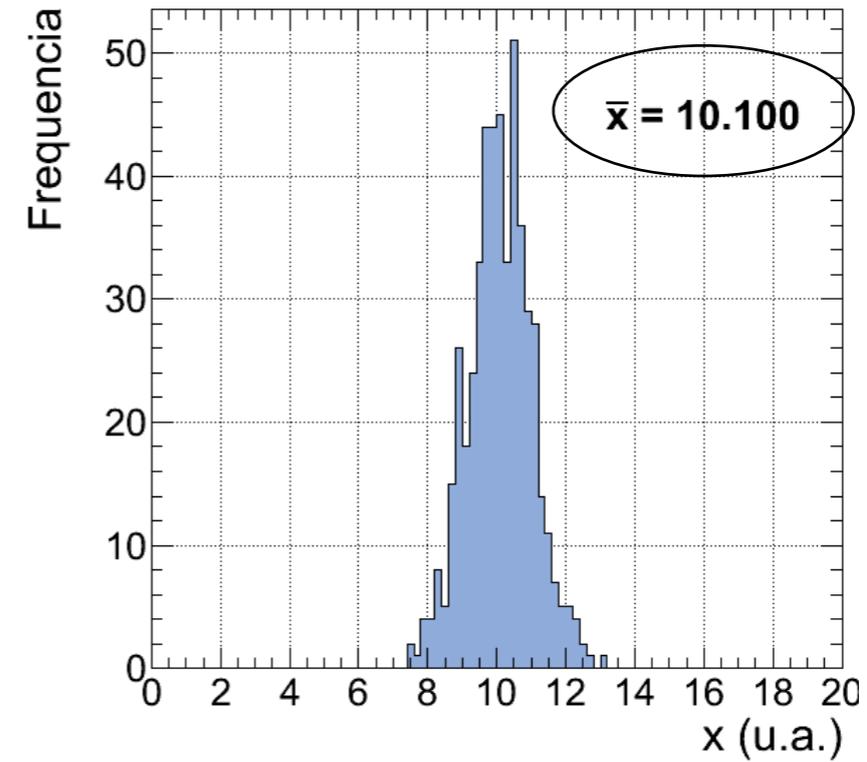
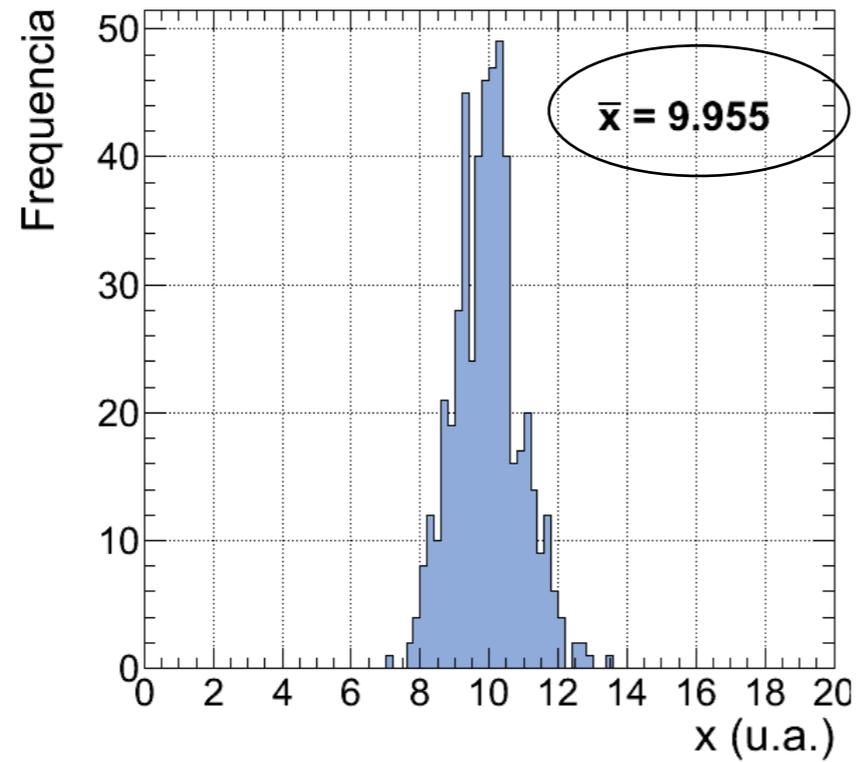
# Erro da média



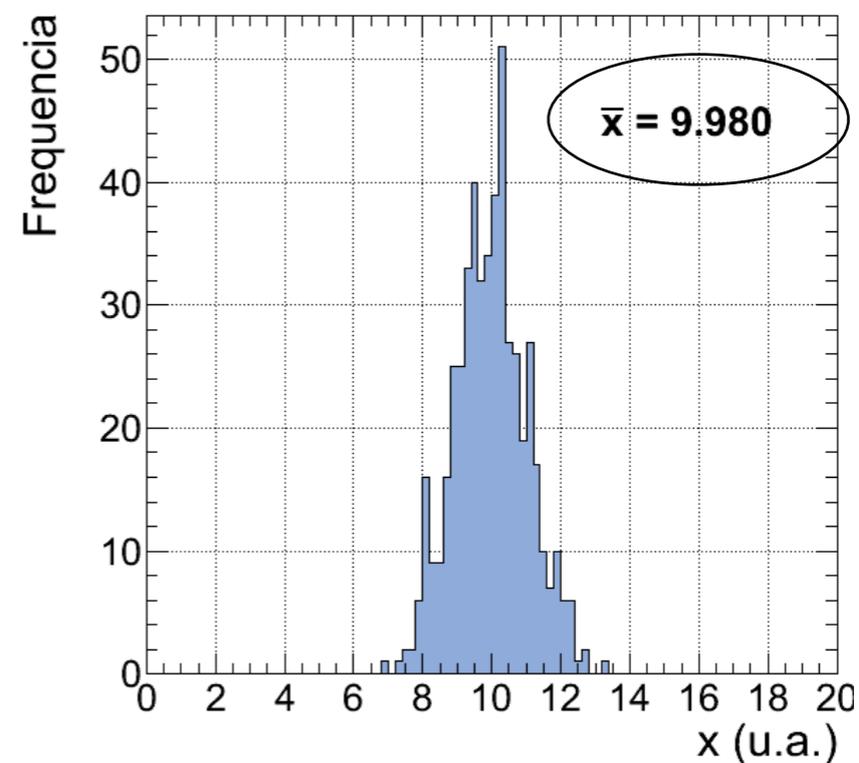
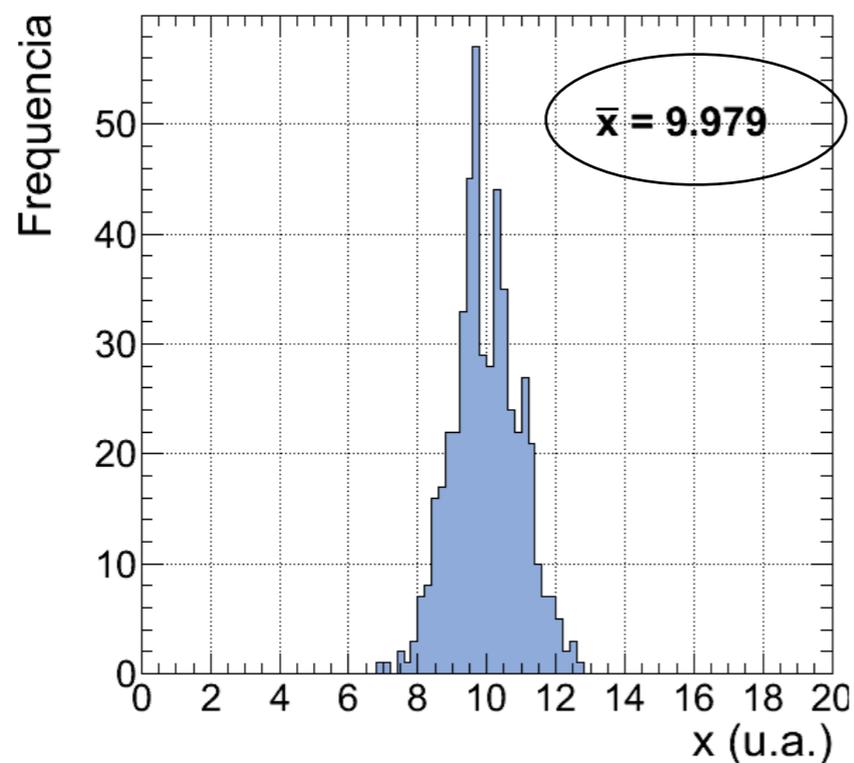
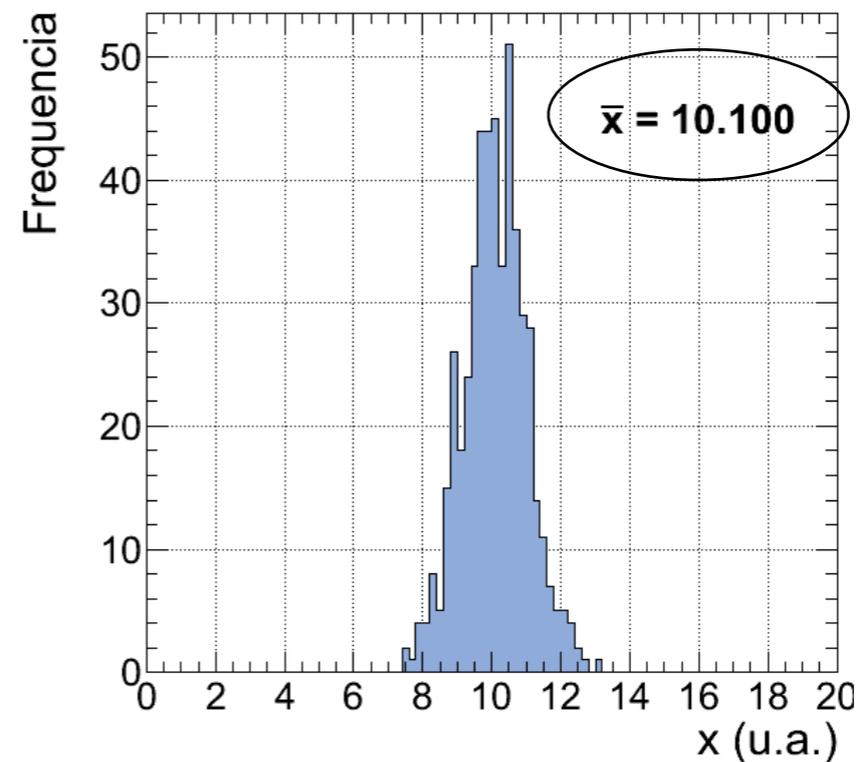
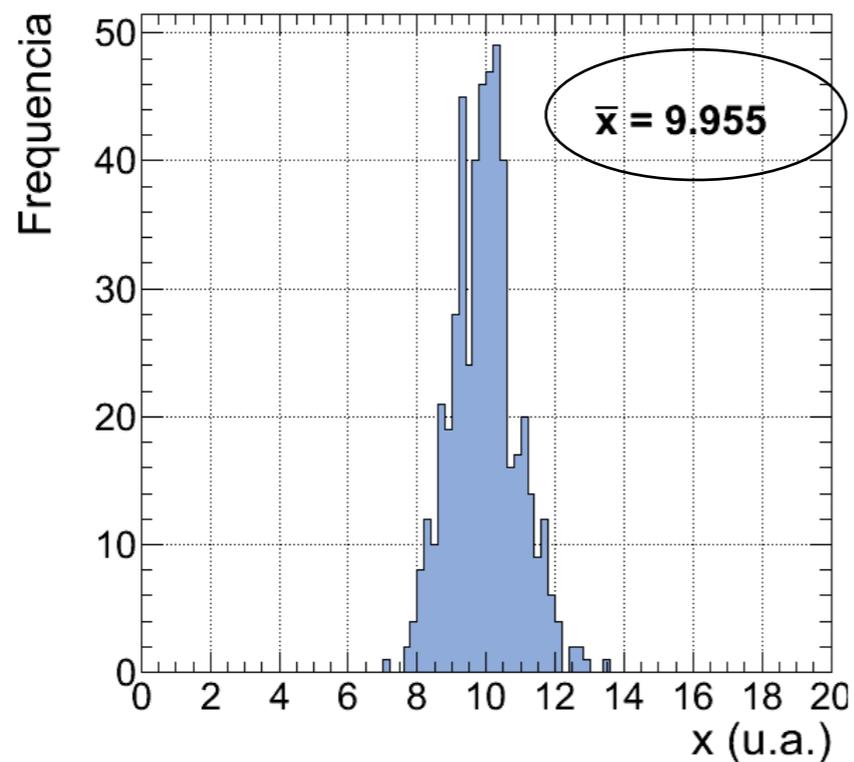
# Erro da média



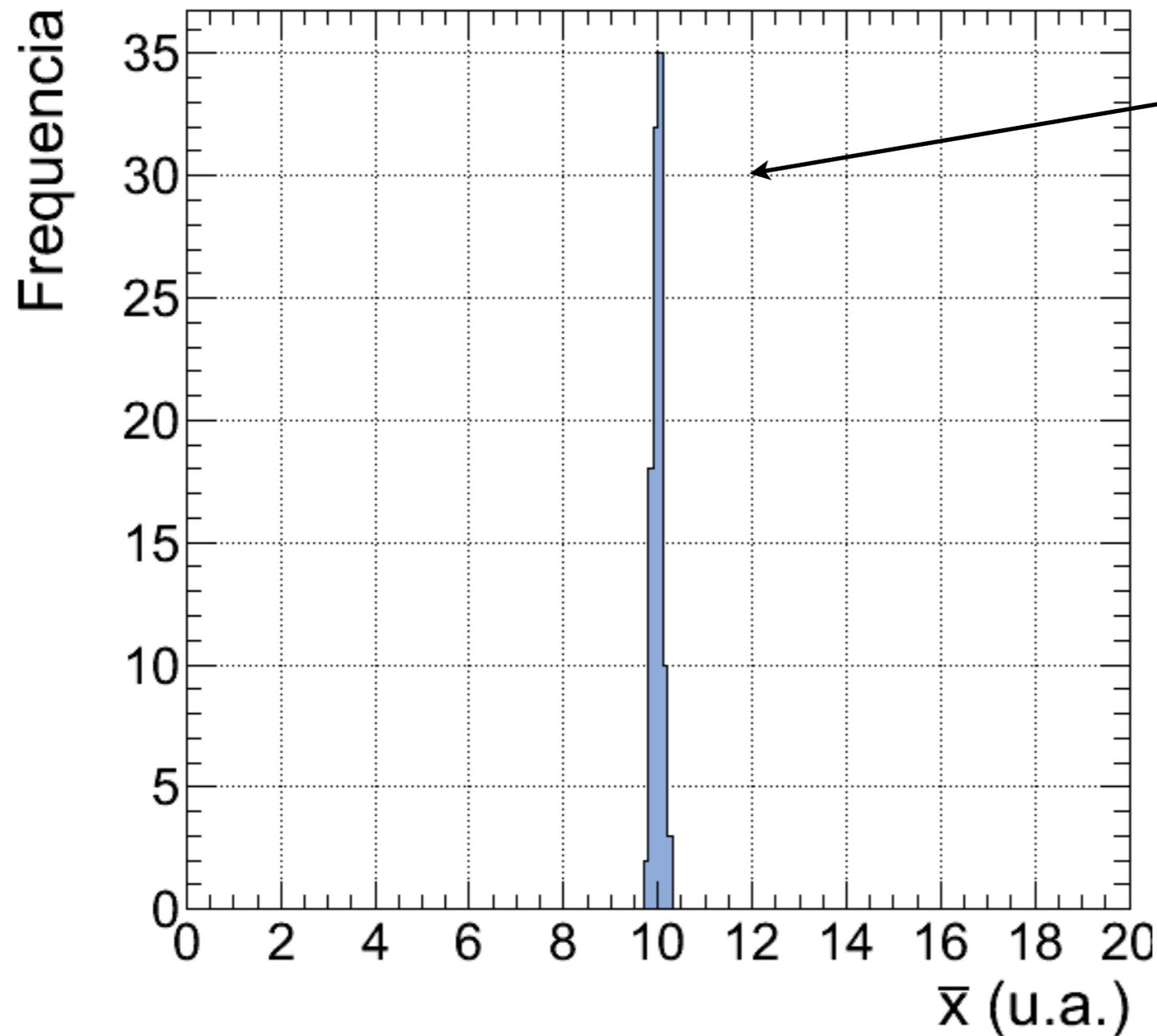
# Erro da média



# Erro da média



# Erro da média



Distribuição das médias de 100 “experimentos”, cada um com 100 medidas

Note que o “erro da média” é menor que o “erro da medida”

# Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de  $N$  medidas diretas.

Vamos estimar primeiramente o erro relativo a cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_x$$

O erro da média pode ser estimado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

# Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de  $N$  medidas diretas.

Vamos estimar primeiramente o erro relativo a cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_x$$

“desvio padrão experimental”  
ou “amostral”

O erro da média pode ser estimado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

desvio padrão

# Estimativa do erro da medida e da média

Podemos também estimar o erro da média a partir de uma única bateria de  $N$  medidas diretas.

Vamos estimar primeiramente o erro relativo a cada medida como:

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma_x$$

“desvio padrão experimental”  
ou “amostral”

O erro da média pode ser estimado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

desvio padrão

Note: O desvio padrão experimental ( $s_x$ ) será comumente representado igualmente por  $\sigma_x$  dependendo do contexto.

# Estimativa do erro da medida e da média

Para um número grande de medidas:

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

# Estimativa do erro da medida e da média

Para um número grande de medidas:

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow s_x \approx \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Quanto maior o número de medidas em um experimento, menor o erro estimado “da média”

Resultado de uma medição:

Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

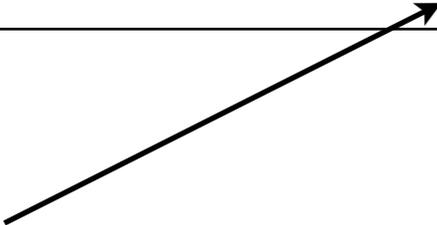
*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

Resultado de uma medição:

Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$\bar{x}$

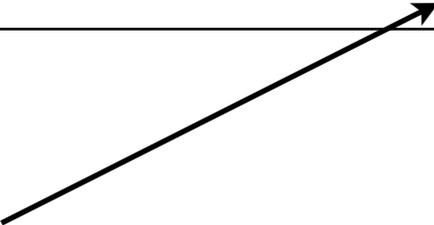


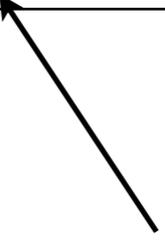
Resultado de uma medição:

Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$\bar{x}$



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$


# Resultado de uma medição: Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$\bar{x}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Note que aqui estamos estimando o que definimos antes como *incertezas aleatórias*. Incertezas aleatórias podem ser reduzidas por repetição (maior número  $N$  de medidas).

*Incertezas sistemáticas*, no entanto, não podem em geral ser reduzidas por mera repetição. Elas dependem do entendimento do instrumento e das técnicas de medição. A partir de um número suficientemente grande de medidas, elas passam a ser *dominantes*.

## Resultado de uma medição:

Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$\bar{x}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Exemplo:

$$\bar{x} = 10,0835$$



$$\bar{x} = 10,08 \pm 0,07 \text{ (unid.)}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0,072$$

# Resultado de uma medição: Estimativa do valor esperado de um conjunto de medidas

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Exemplo:

$$\bar{x} = 10,0835 \quad \longrightarrow \quad \bar{x} = 10,08 \pm 0,07 \text{ (unid.)}$$
$$\sigma_{\bar{x}} = 0,072$$

Número de algarismos significativos  
determinado pelo valor da incerteza

# Aproximações

$$3,870001 \rightarrow 3,87$$

$$3,874999 \rightarrow 3,87$$

$$3,875001 \rightarrow 3,88$$

$$3,879999 \rightarrow 3,88$$

$$3,875000\dots \rightarrow ?$$

Convenção “ímpar”:

$$3,875000 \rightarrow 3,87$$

$$3,885000 \rightarrow 3,89$$

$$3,895000 \rightarrow 3,89$$

Convenção “par”:

$$3,875000 \rightarrow 3,88$$

$$3,885000 \rightarrow 3,88$$

$$3,895000 \rightarrow 3,90$$

# Exemplo: Medida do comprimento de uma mesa

N medidas do comprimento de uma mesa

Medida	L (cm)
1	149.81
2	149.90
3	150.10
4	150.50
5	149.80
6	149.80
7	149.71
8	150.21
9	149.75
10	150.10
11	150.15
12	150.10
13	150.00
14	150.40
15	149.91
16	150.10
17	150.09
18	150.00

# Atividade de aula (Roteiro)

- 1- Faça a medição dos valores de resistência de 100 resistores de mesmo valor nominal, em cinco grupos de 20 medidas cada;
- 2- Represente o conjunto de dados completo em um histograma e calcule a média e o desvio padrão;
- 3- Represente os conjuntos de dados de 20 medidas cada em histogramas e calcule a média e o desvio padrão para cada;
- 4- Represente o novo conjunto de dados composto pelas médias de cada um dos cinco grupos em um histograma e calcule o desvio padrão (Pergunta: qual é o valor da média desses cinco valores?);
- 5- Calcule o erro da média do conjunto completo (100 medidas) e para cada um dos cinco conjuntos (20 medidas cada). Apresente a estimativa padrão do valor da resistência.

# Multímetro digital

Display digital de “3  
1/2” dígitos:

$d_{1/2}$	$d_3$	$d_2$	$d_1$
-----------	-------	-------	-------

Número de  
“contagens”: 0 - 1999

Funções:

Medição de tensão contínua (DC - V)

Medição de tensão alternada (AC - V)

Medição de corrente contínua (DC - A)

Medição de resistência ( $\Omega$ )

Possivelmente: Teste de continuidade,  
testes de diodos e transistores,...



# Multímetro digital

Função de medida de tensão contínua

Função de medida de resistência (a posição pode variar de multímetro para multímetro)

Conectores para pontas de prova



# Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	0	0	2
--	---	---	---

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução: 1 V

(Variação do dígito menos significativo)



# Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	0	1.	6
--	---	----	---

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução:  $0,1 \text{ V} = 100 \text{ mV}$



# Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

	1.	5	7
--	----	---	---

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução:  $0,01 \text{ V} = 10 \text{ mV}$



# Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

1.	5	7	1
----	---	---	---

DC

600 V

200 V

20 V

2 V

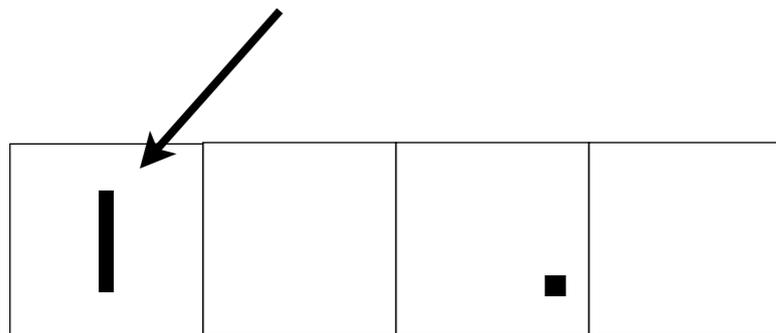
200 mV

Resolução:  $0,001 \text{ V} = 1 \text{ mV}$



# Exemplo: Medida da f.e.m. de uma pilha

Mostrador com dígito “1” à esquerda:  
valor acima do máximo da escala



DC

600 V

200 V

20 V

2 V

200 mV

Resolução:  $0,1 \text{ mV} = 100 \mu\text{V}$



# Como ler o código de cores de um resistor



COR	1ª Banda	2ª Banda	3ª Banda	Multiplicador	Tolerância
Preto	0	0	0	1Ω	
Castanho	1	1	1	10Ω	± 1%
Vermelho	2	2	2	100Ω	± 2%
Laranja	3	3	3	1KΩ	
Amarelo	4	4	4	10KΩ	
Verde	5	5	5	100KΩ	
Azul	6	6	6	1MΩ	
Violeta	7	7	7	10MΩ	
Cinza	8	8	8		
Branco	9	9	9		
Dourado					± 5%
Prateado					± 10%

Cor	Código
Preto	0
Castanho	1
Vermelho	2
Laranja	3
Amarelo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Cinza	8
Branco	9

Castanho	± 1%
Vermelho	± 2%
Dourado	± 5%
Prata	± 10%



Precisão

# Extras