

# Física Geral - Laboratório (2014/1)

Estimativas e erros em medidas indiretas:  
Propagação de erros



# Experimentos de *medidas indiretas*

Medidas diretas: Estimativa do valor esperado de uma grandeza a partir de experimentos em que as medidas são lidas diretamente em uma escala, ou registradas por um dispositivo

Medidas indiretas: A estimativa do valor esperado de uma determinada grandeza é obtida a partir da medição (direta) de outras grandezas associadas

# Medidas indiretas

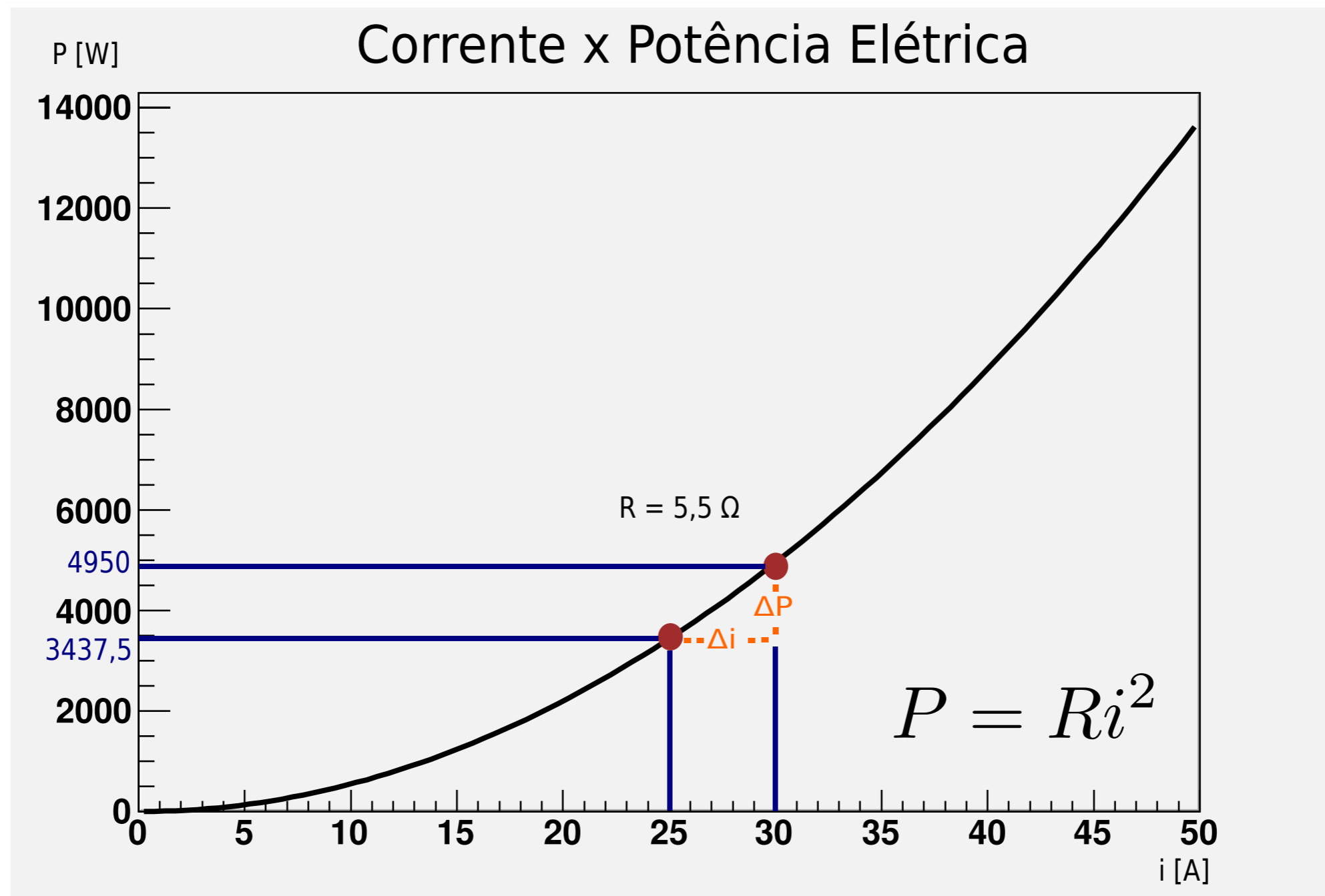
## □ Propagação de erros

$$u = f(x)$$

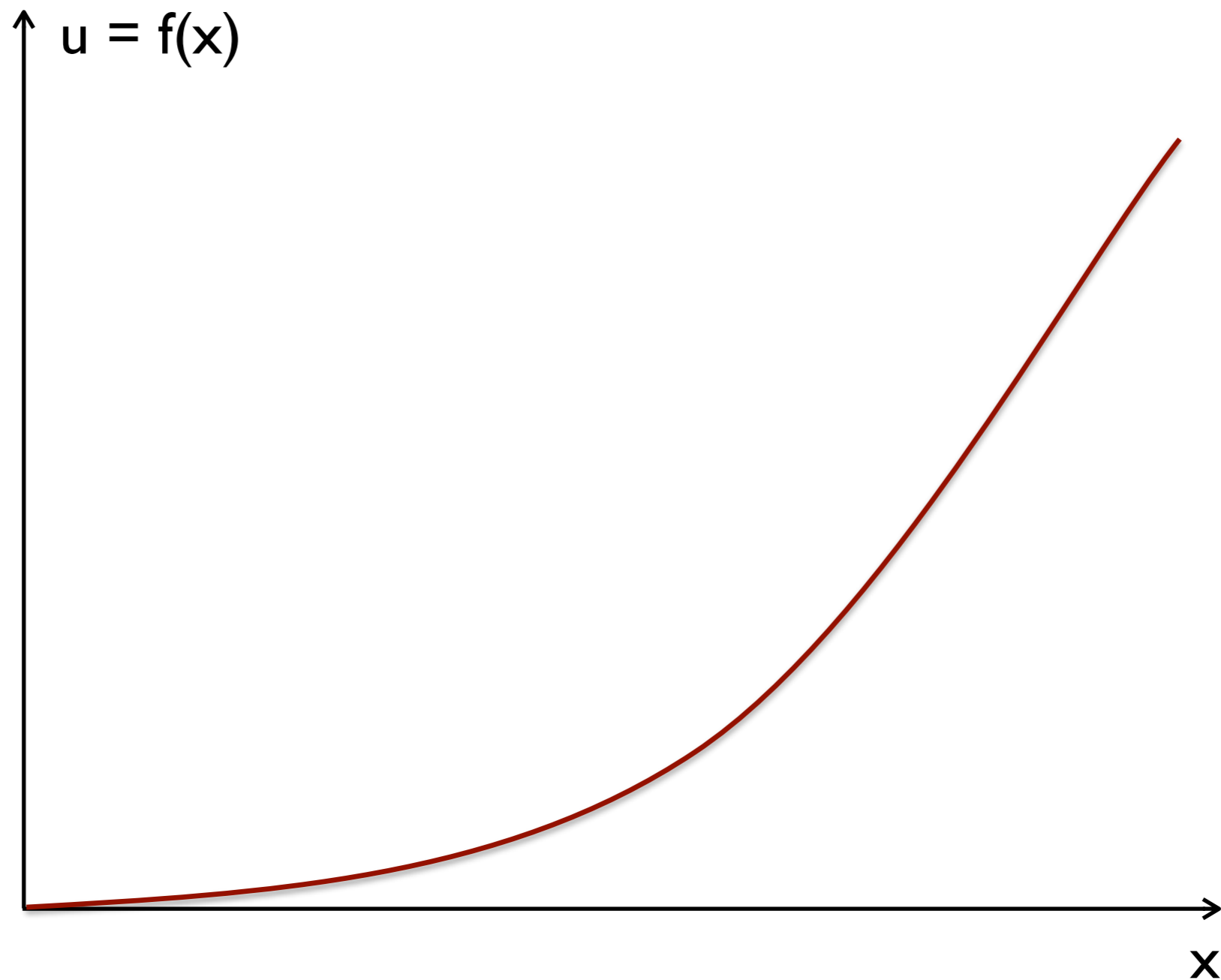
Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas diretas de uma grandeza  $x$ :  
 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

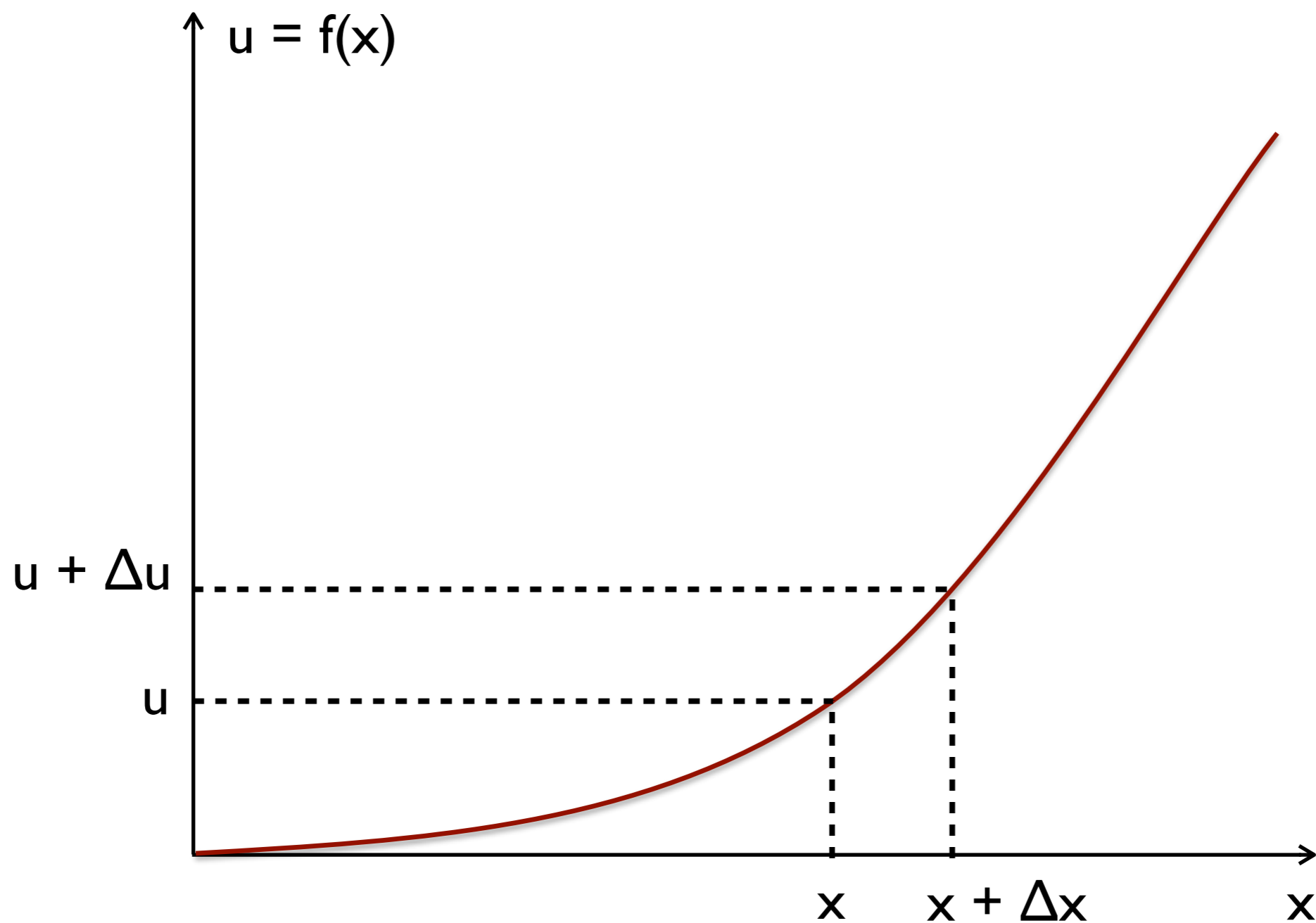
# Medidas indiretas - Propagação de erros



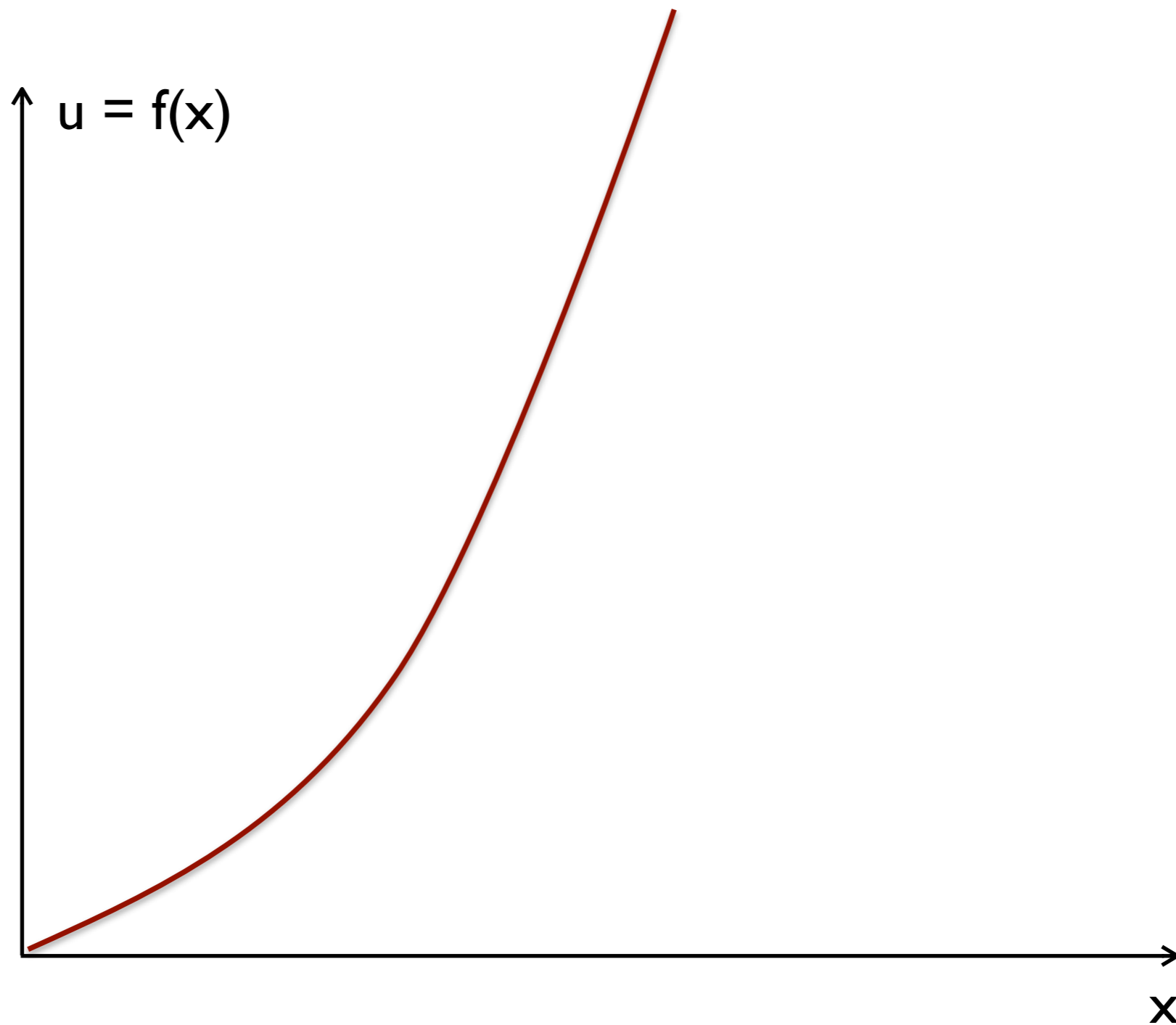
# Medidas indiretas - Propagação de erros



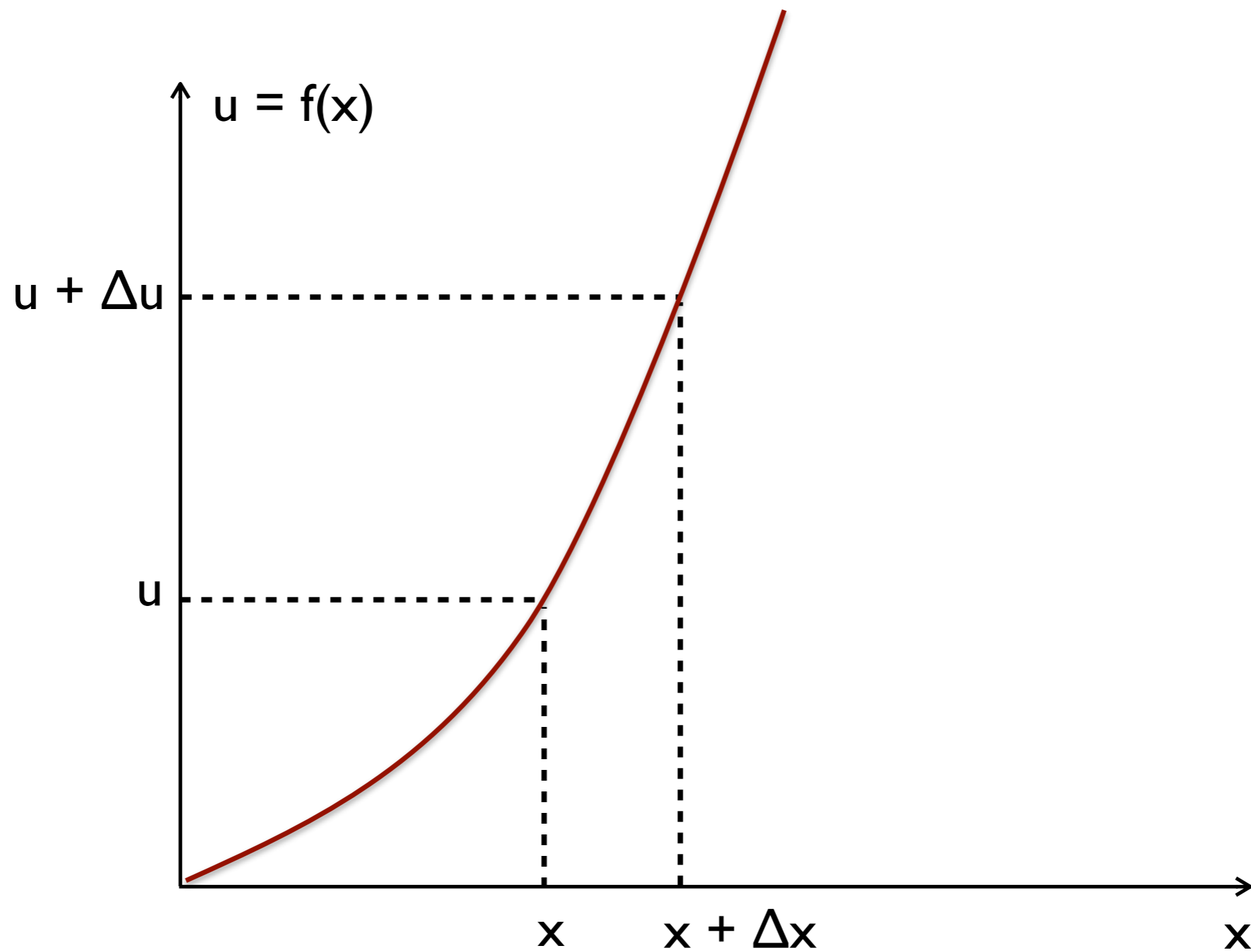
# Medidas indiretas - Propagação de erros



# Medidas indiretas - Propagação de erros

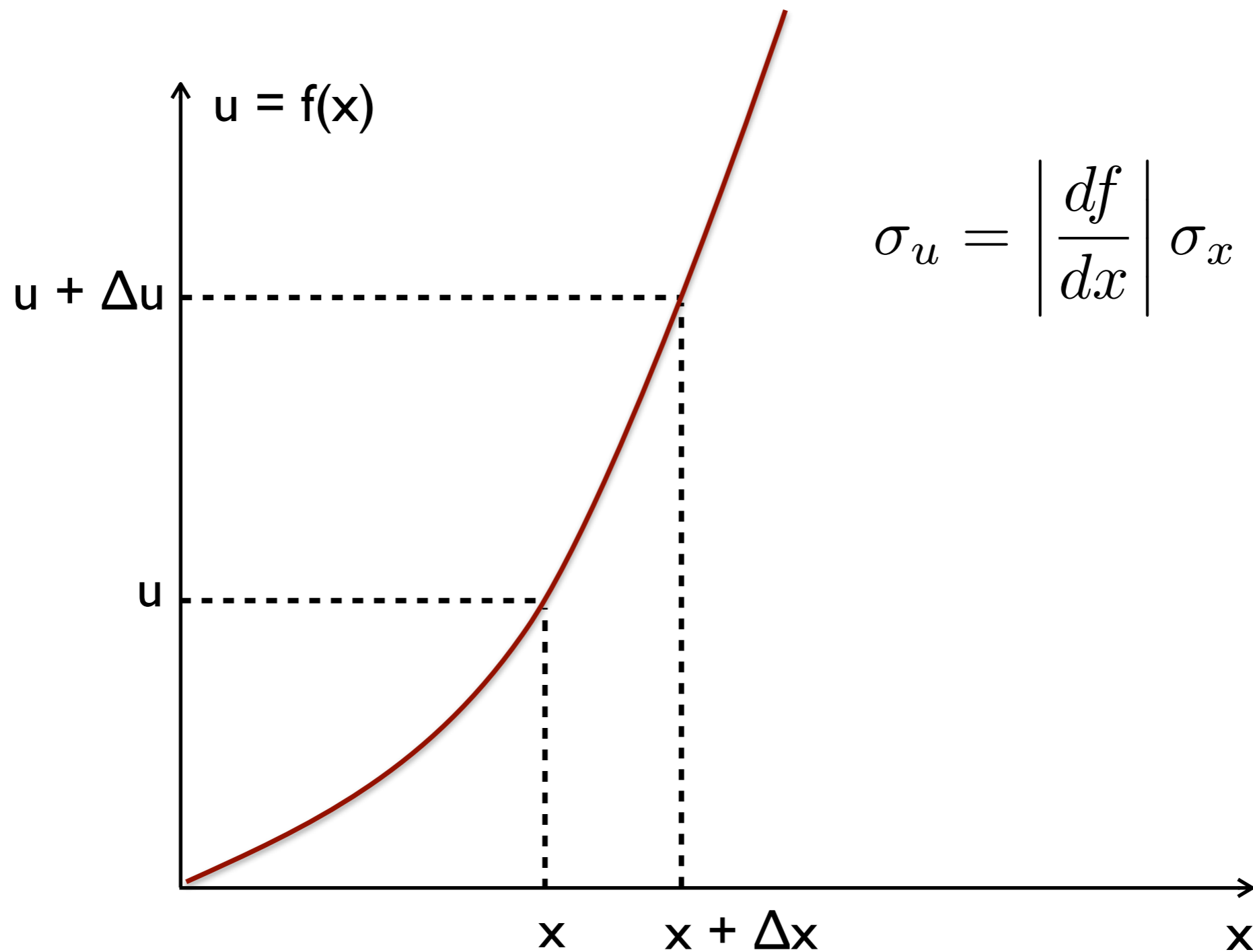


# Medidas indiretas - Propagação de erros





# Medidas indiretas - Propagação de erros



# Medidas indiretas - Propagação de erros

## □ Propagação de erros

$$u = f(x, y)$$

Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas de duas grandezas  $x$  e  $y$ :  
 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

# Medidas indiretas - Propagação de erros

## □ Propagação de erros

$$u = f(x, y)$$

Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas de duas grandezas x e y:  
 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$

Queremos obter:  $\bar{u} \pm \sigma_{\bar{u}}$

# Propagação de erros

- Estimativa do valor esperado

# Propagação de erros

□ Estimativa do valor esperado

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

# Propagação de erros

□ Estimativa do valor esperado

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Exemplo:  $u = x + y$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{x} + \bar{y}$$

# Propagação de erros

□ Estimativa do valor esperado

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Exemplo:  $u = x + y$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$u = x/y$$

$$\bar{u} = \bar{x}/\bar{y}$$

# Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Em geral:  $u = f(x, y)$

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \sigma_{xy}$$



# Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Adição ou subtração de variáveis

$$u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r \sigma_{\bar{x}} \sigma_{\bar{y}}}$$

# Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Adição ou subtração de variáveis

$$u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N} \sigma_{xy}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}}$$

Se  $x$  e  $y$  são *independentes*  
(correlação nula)  $\longrightarrow$   $\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$

# Propagação de erros

□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Multiplicação ou divisão de variáveis

Se  $x$  e  $y$  são *independentes* (correlação nula):

$$u = xy \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

ou

$$u = x/y$$

Se a correlação não é nula:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right) \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)}$$

# Propagação de erros

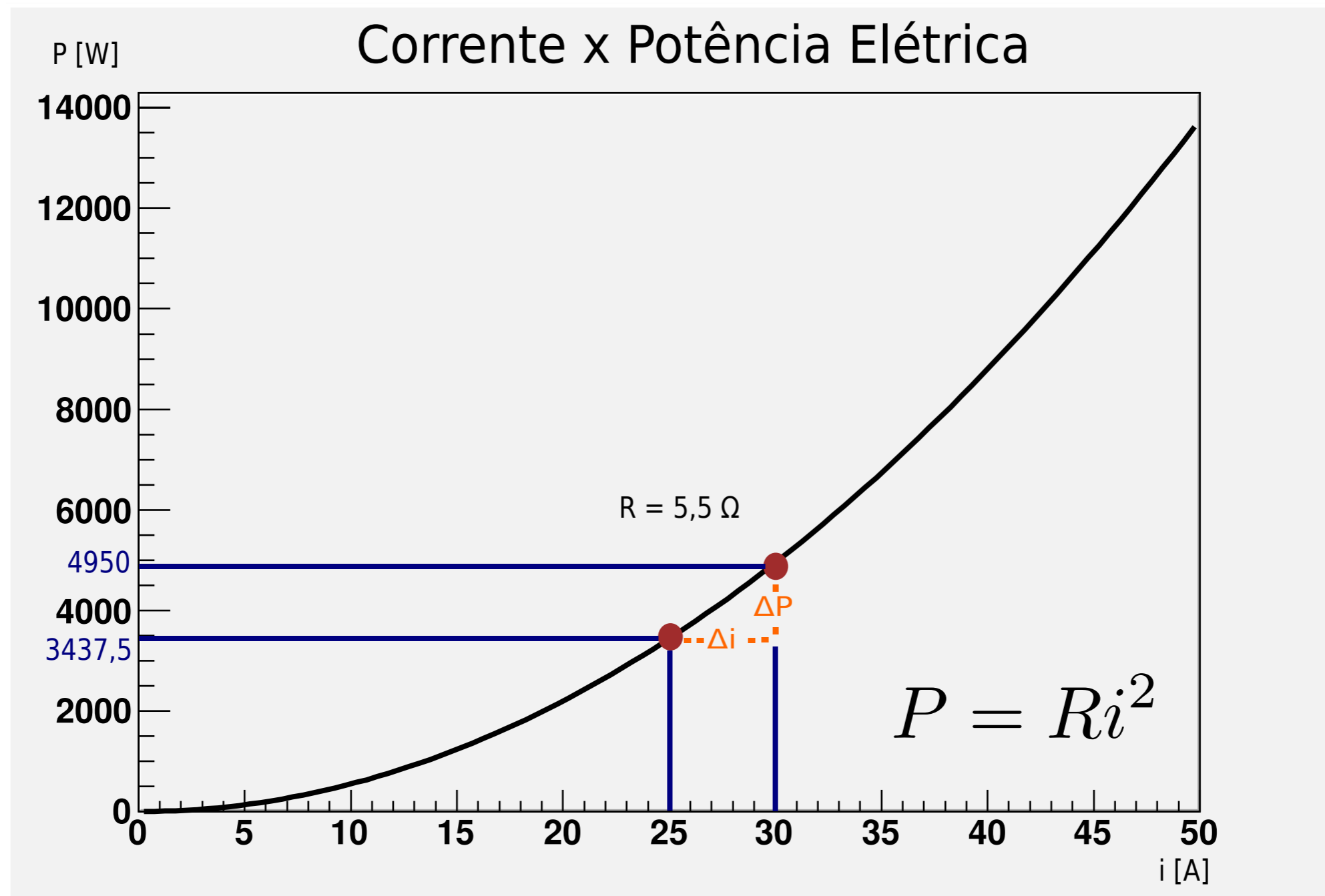
□ Estimativa padrão da incerteza

Exemplo:

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

# Propagação de erros



# Propagação de erros

Exemplo:

$$P = Ri^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = R\sigma_{\bar{i}^2}$$

$$i^2 = i \times i \Rightarrow \frac{\sigma_{\bar{i}^2}}{\bar{i}^2} = 2 \frac{\sigma_{\bar{i}}}{\bar{i}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = 2R\bar{i}\sigma_{\bar{i}}$$

# Propagação de erros

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Exercícios:

i)  $u = x^2$

ii)  $u = (x \cdot y) / (x + y)$

iii)  $u = x + y + z$

iv)  $u = xy + z$

v)  $p = kl$

vi)  $I = V/R$

vii)  $v = \sqrt{2gh}$

viii)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$