

Física Geral - Laboratório (2014/I)

Estimativas e erros em medidas diretas (II)
Níveis de confiança, compatibilidade e combinação



Resumo: estimativa do valor esperado

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}

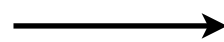
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Estimativa do erro de cada
medida



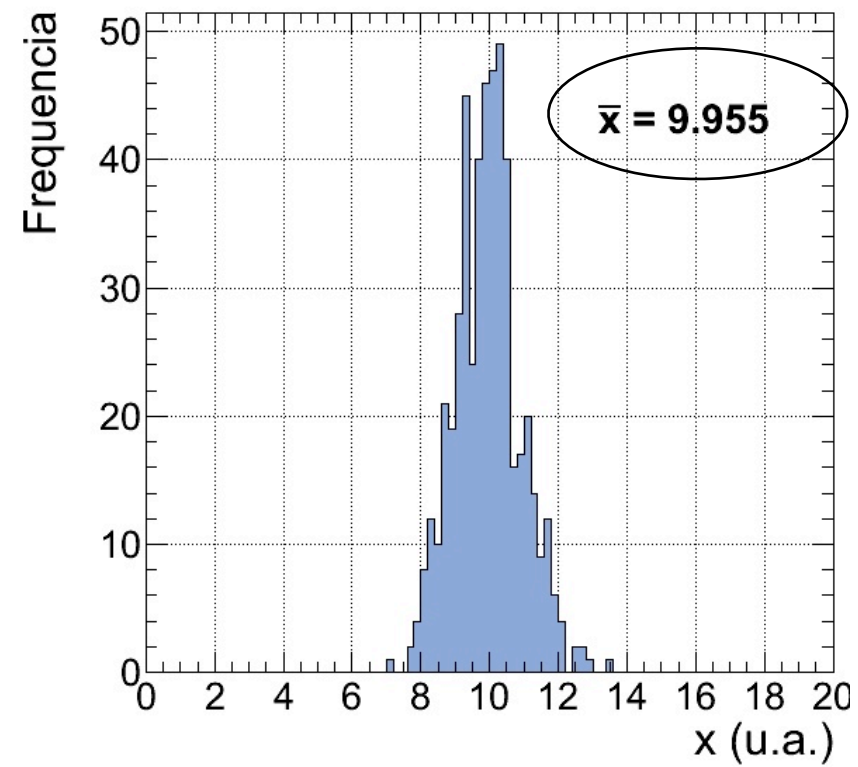
$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Estimativa do erro da
média

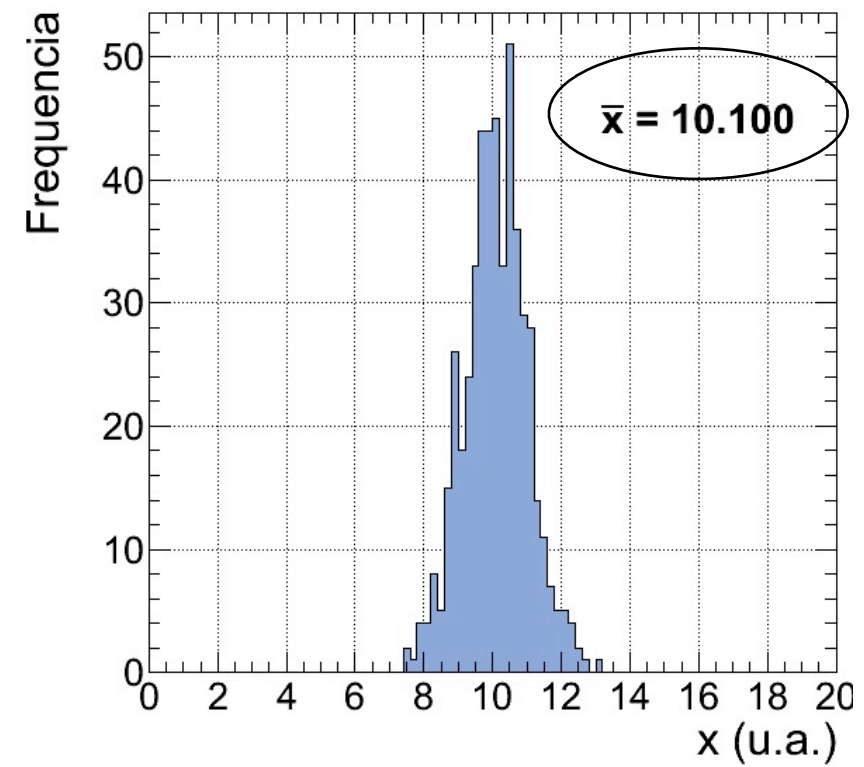
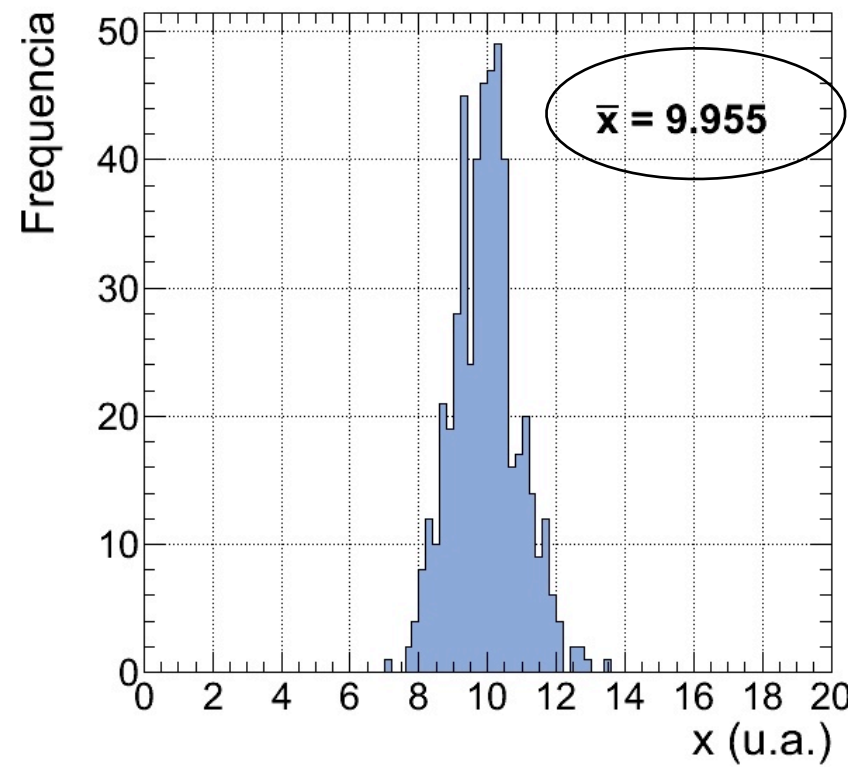


$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

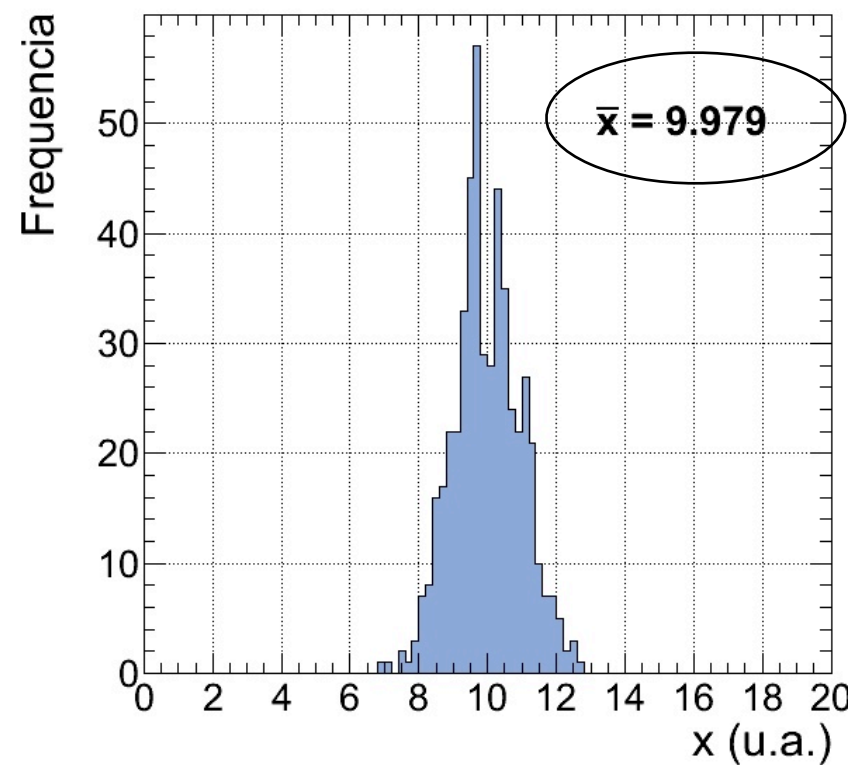
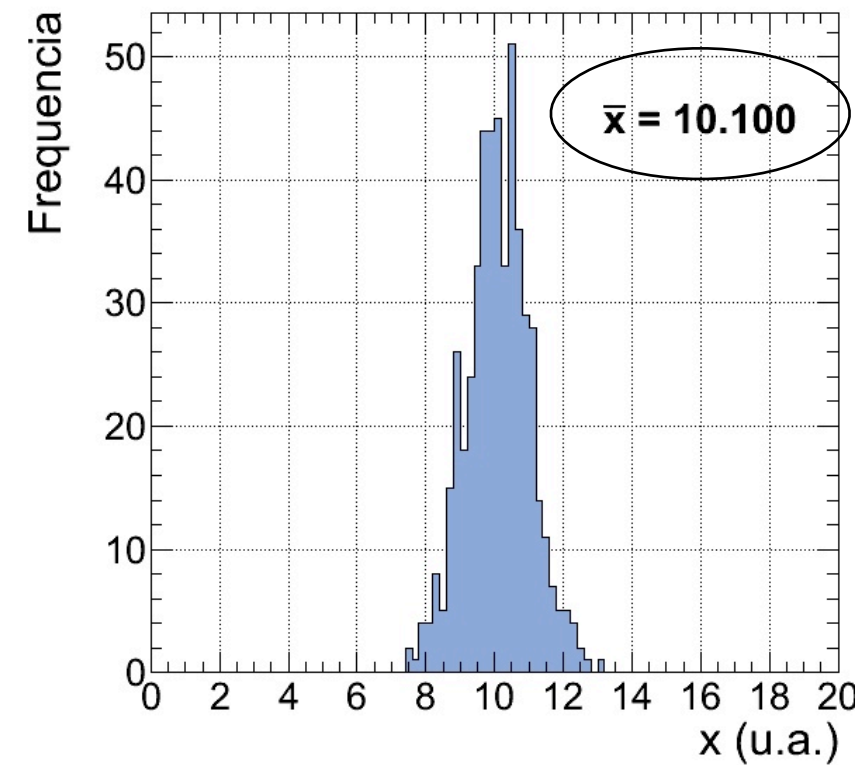
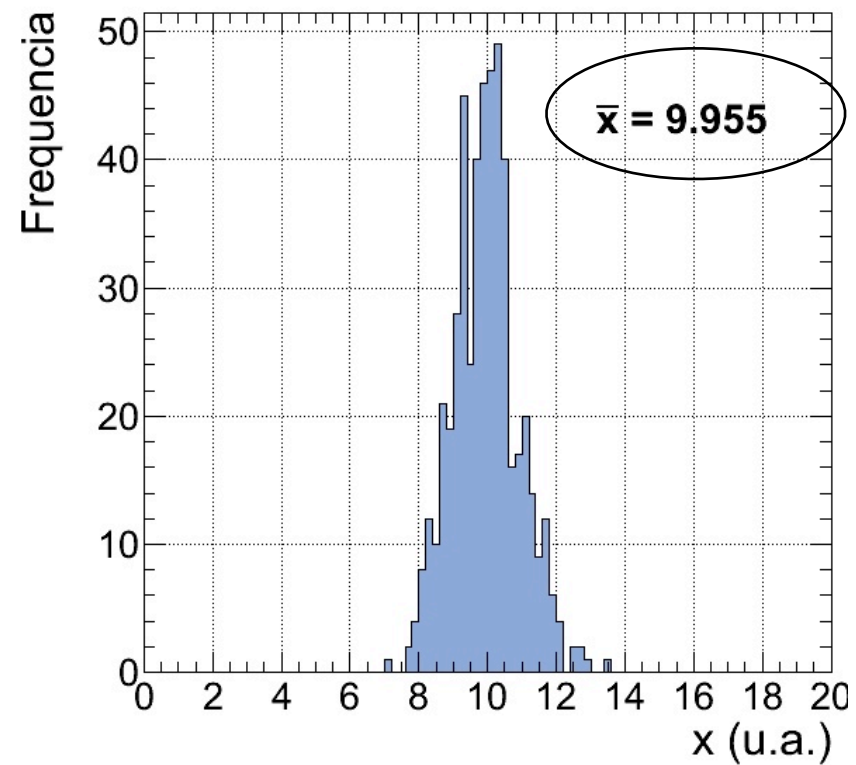
Resumo: Erro da média



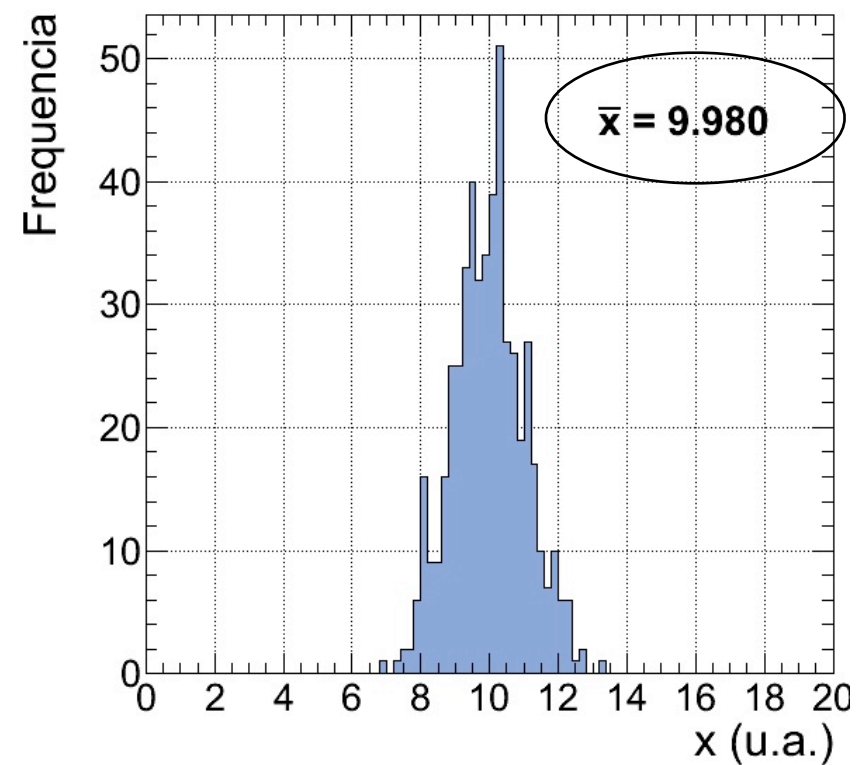
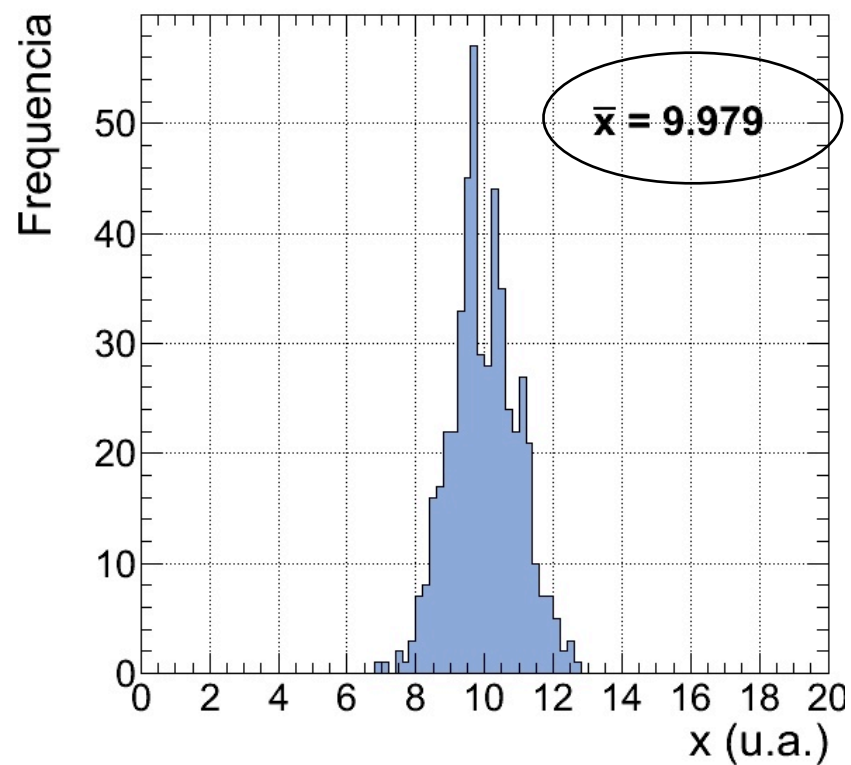
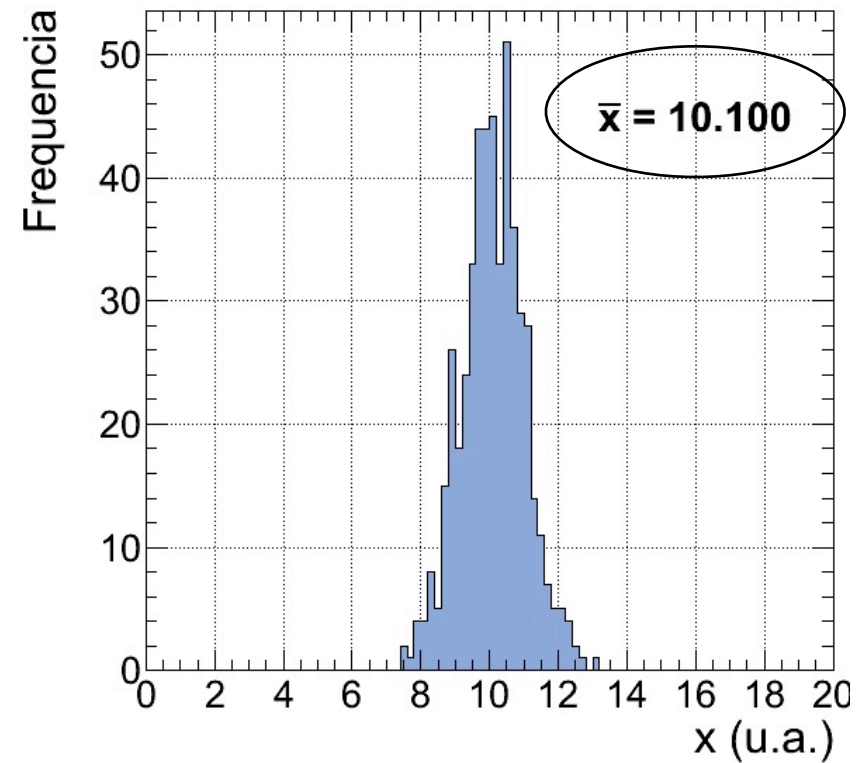
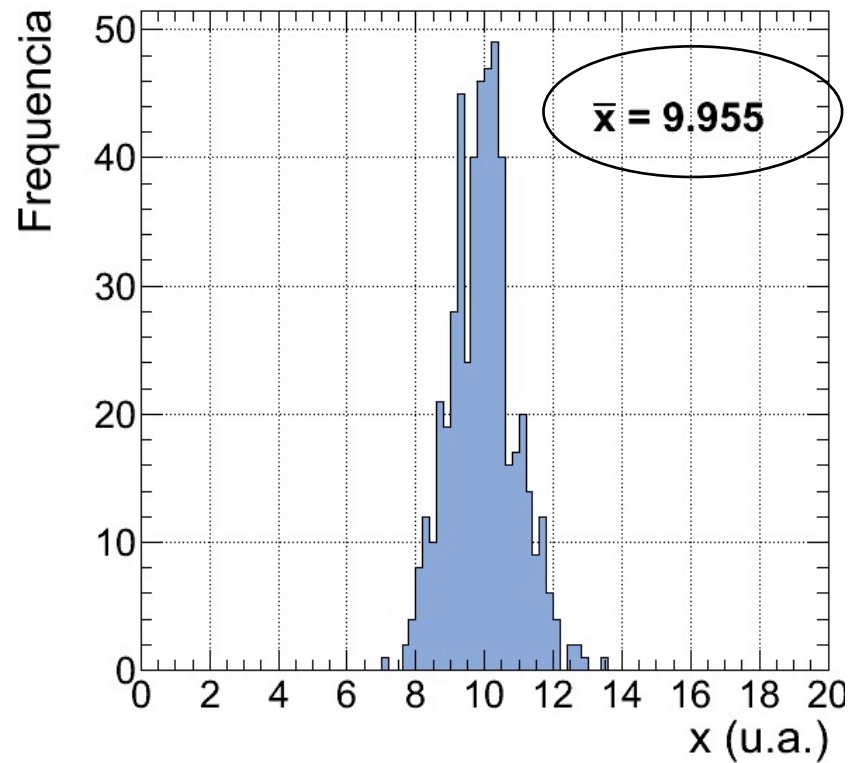
Resumo: Erro da média



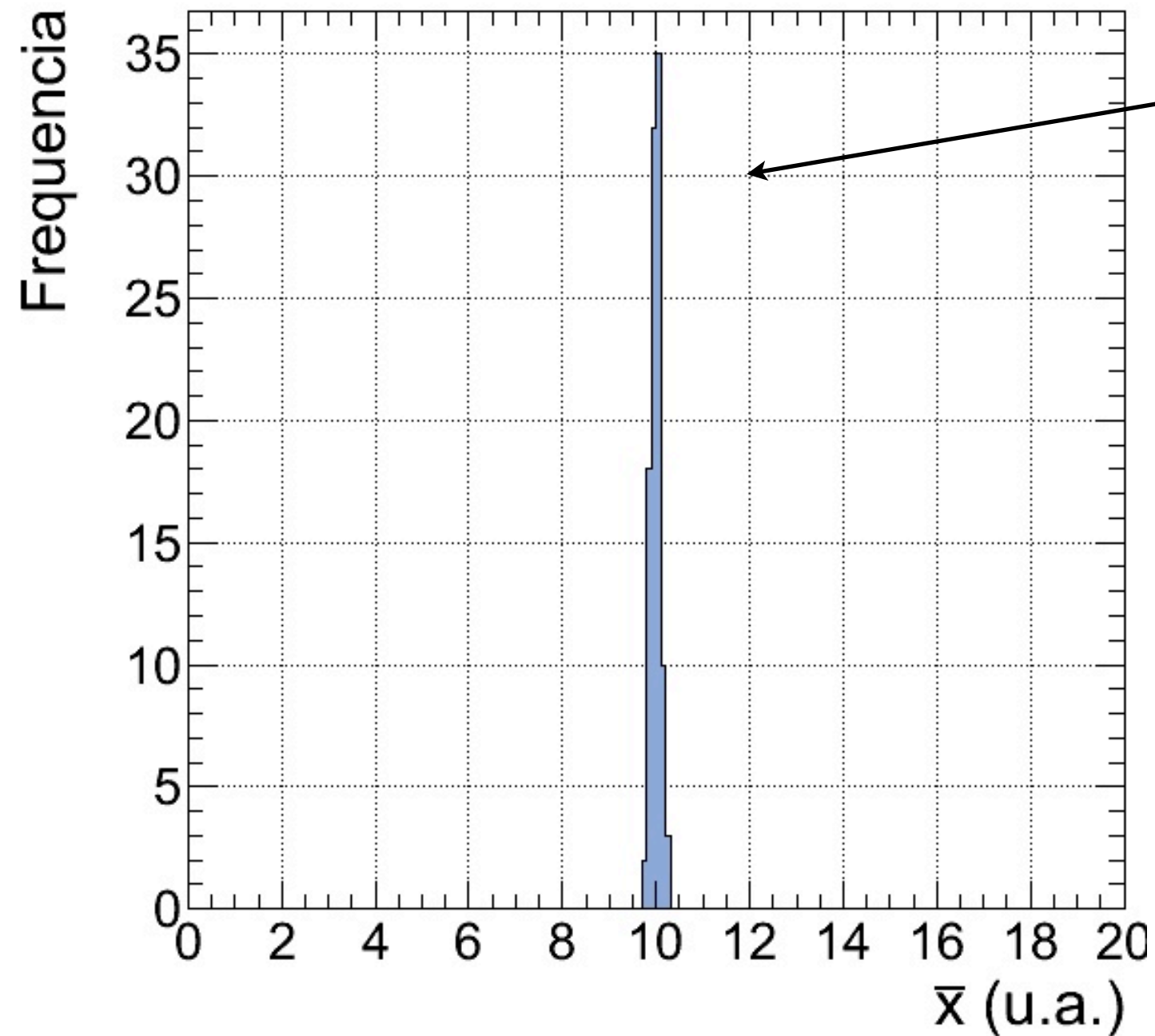
Resumo: Erro da média



Resumo: Erro da média



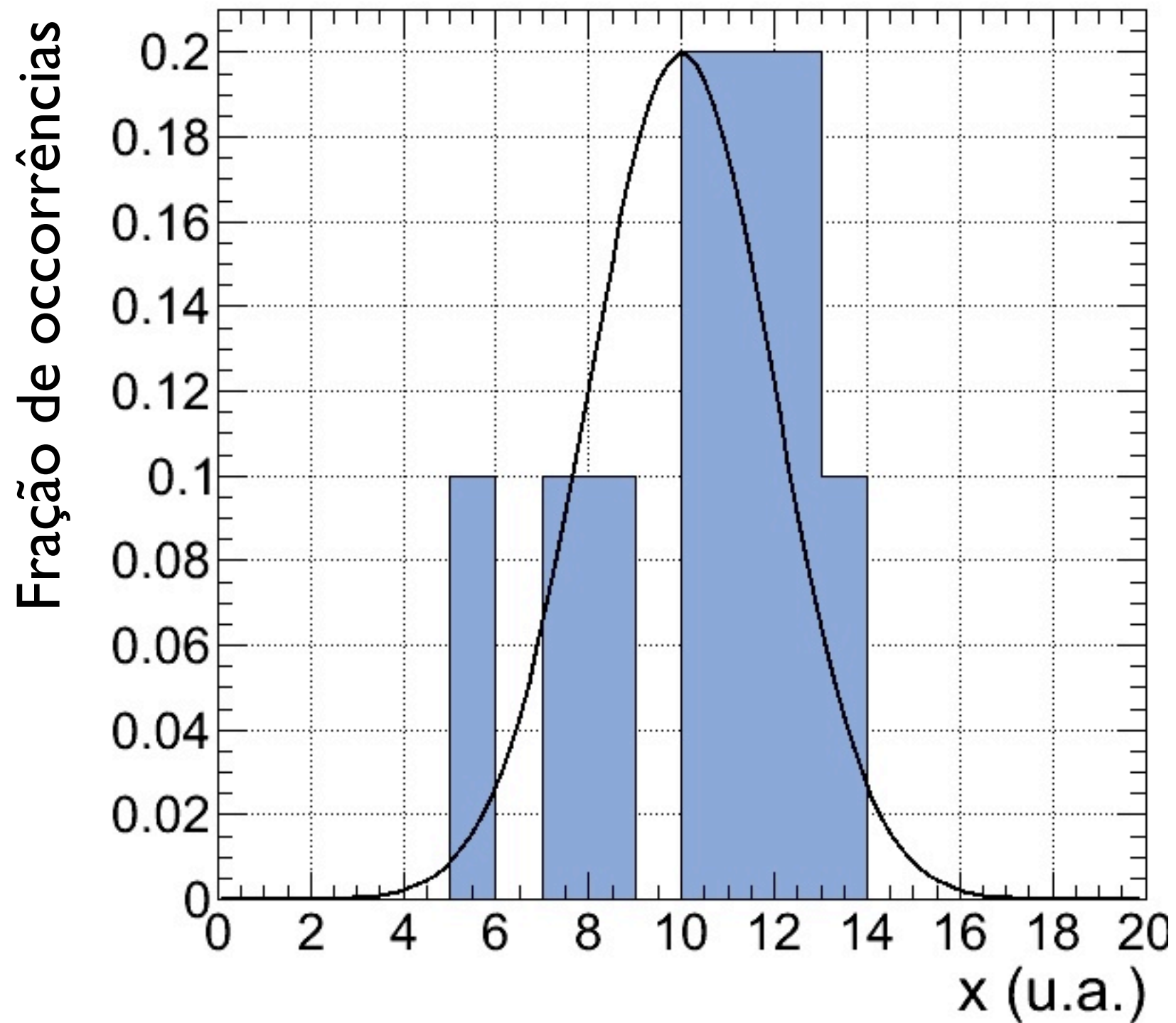
Resumo: Erro da média



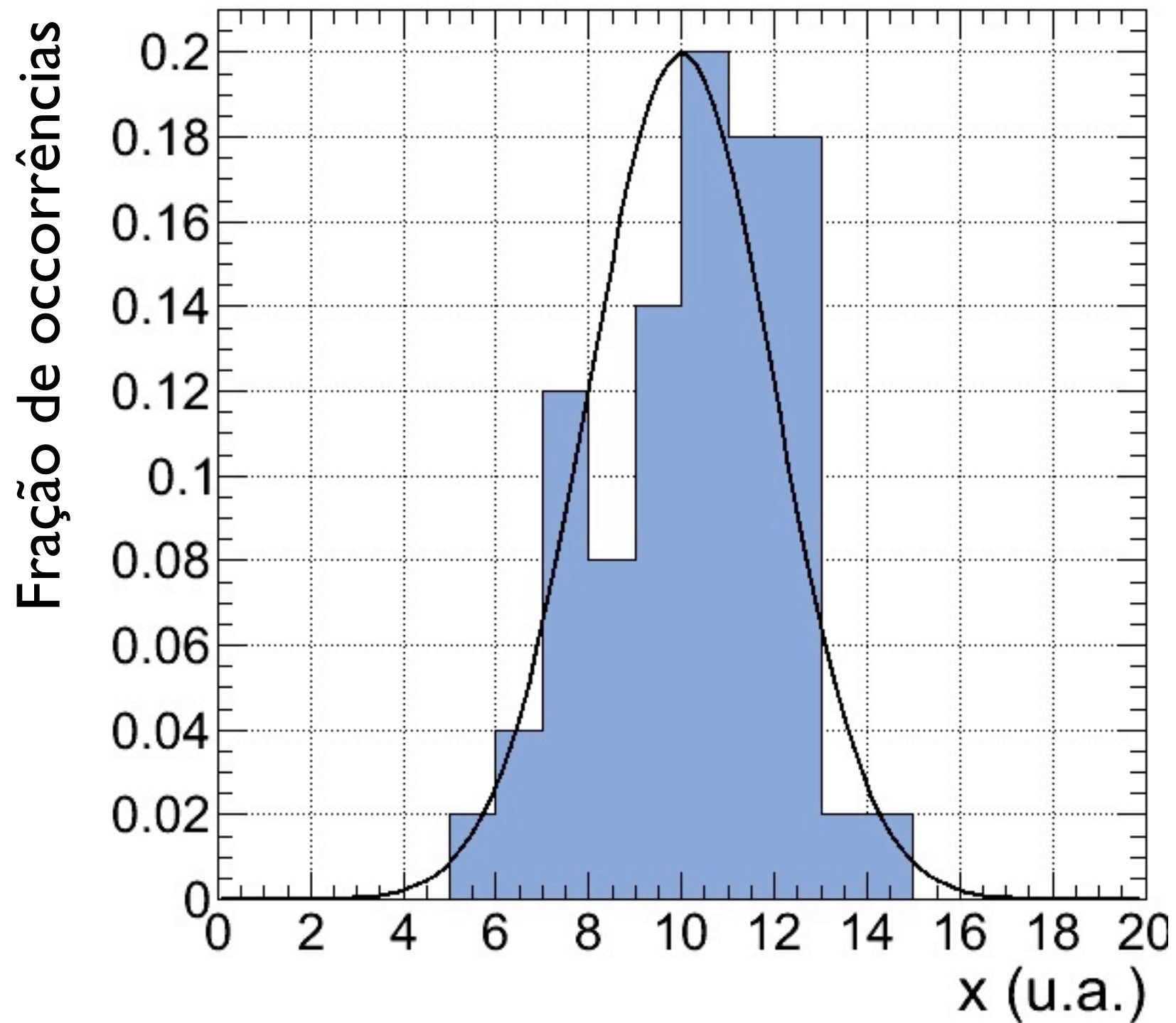
Distribuição das médias de 100 “experimentos”, cada um com 100 medidas

Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

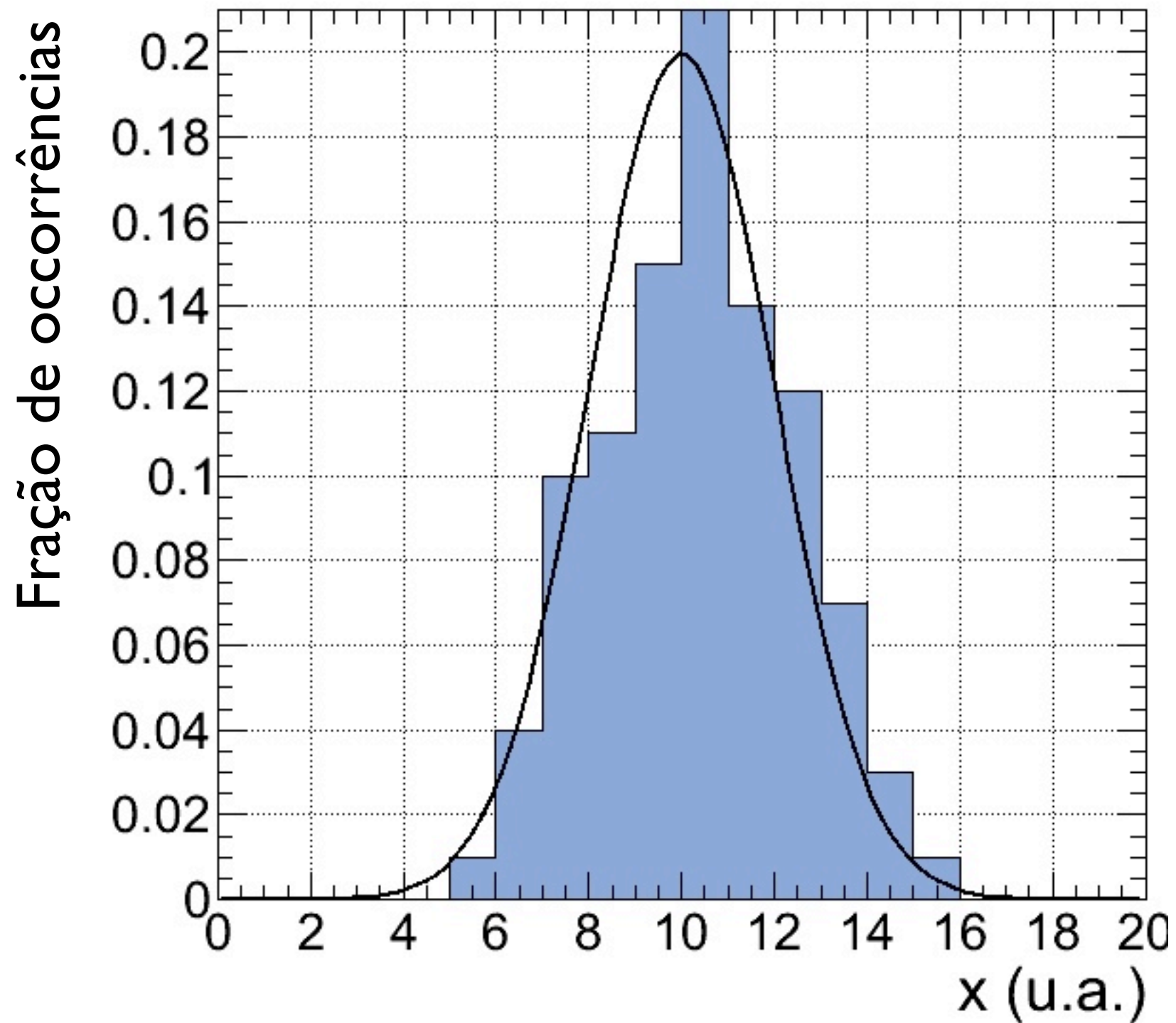
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



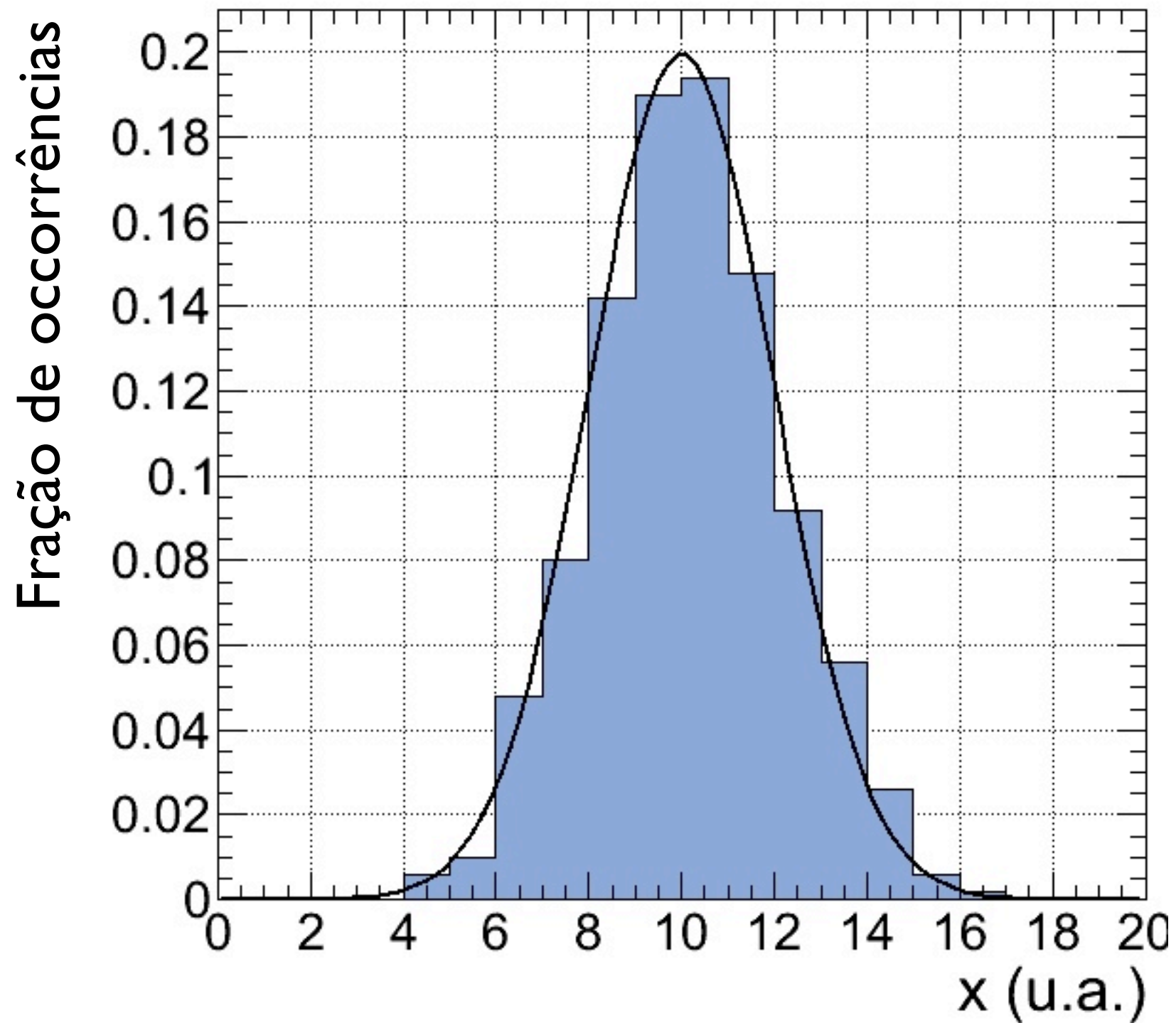
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



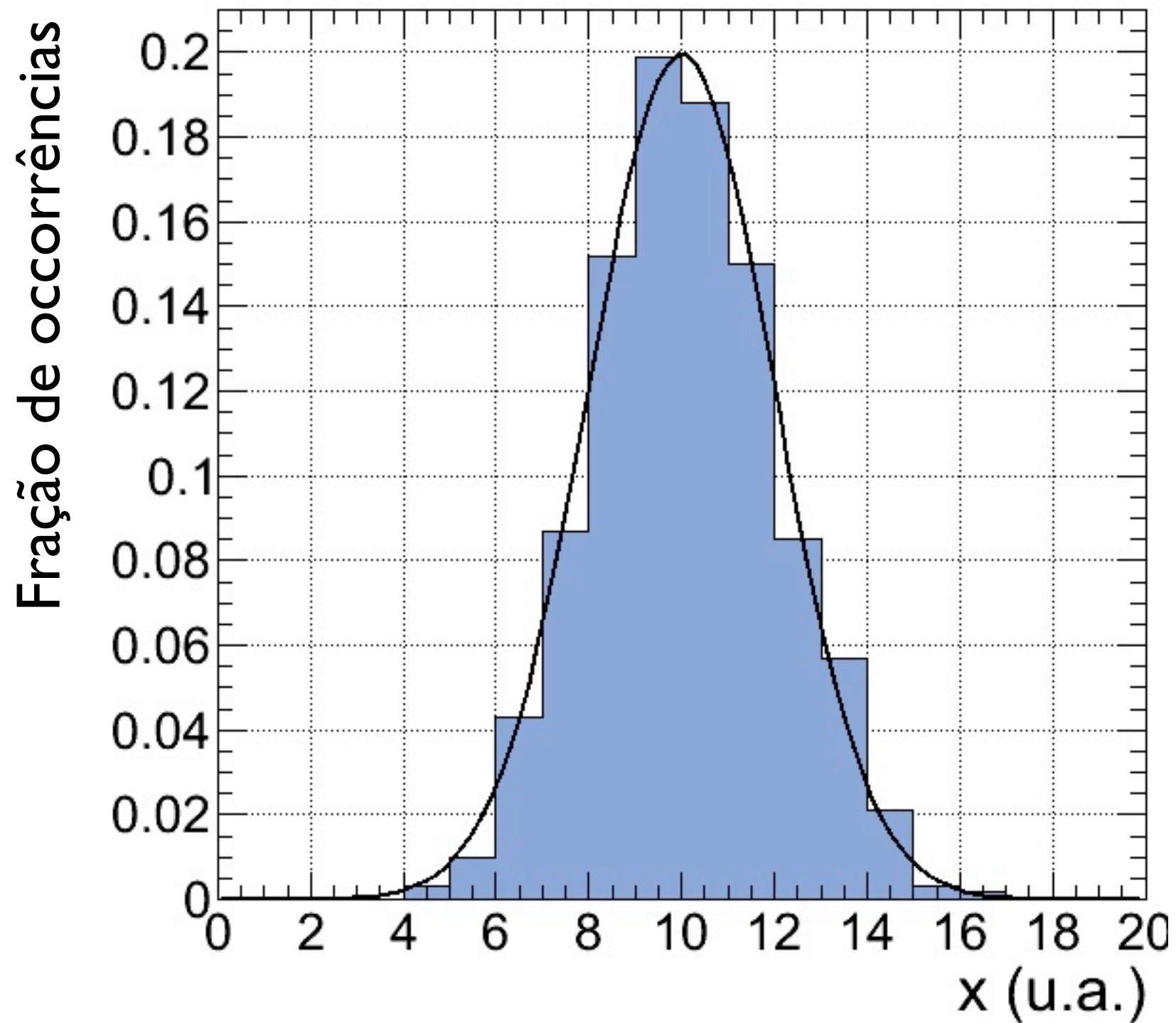
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

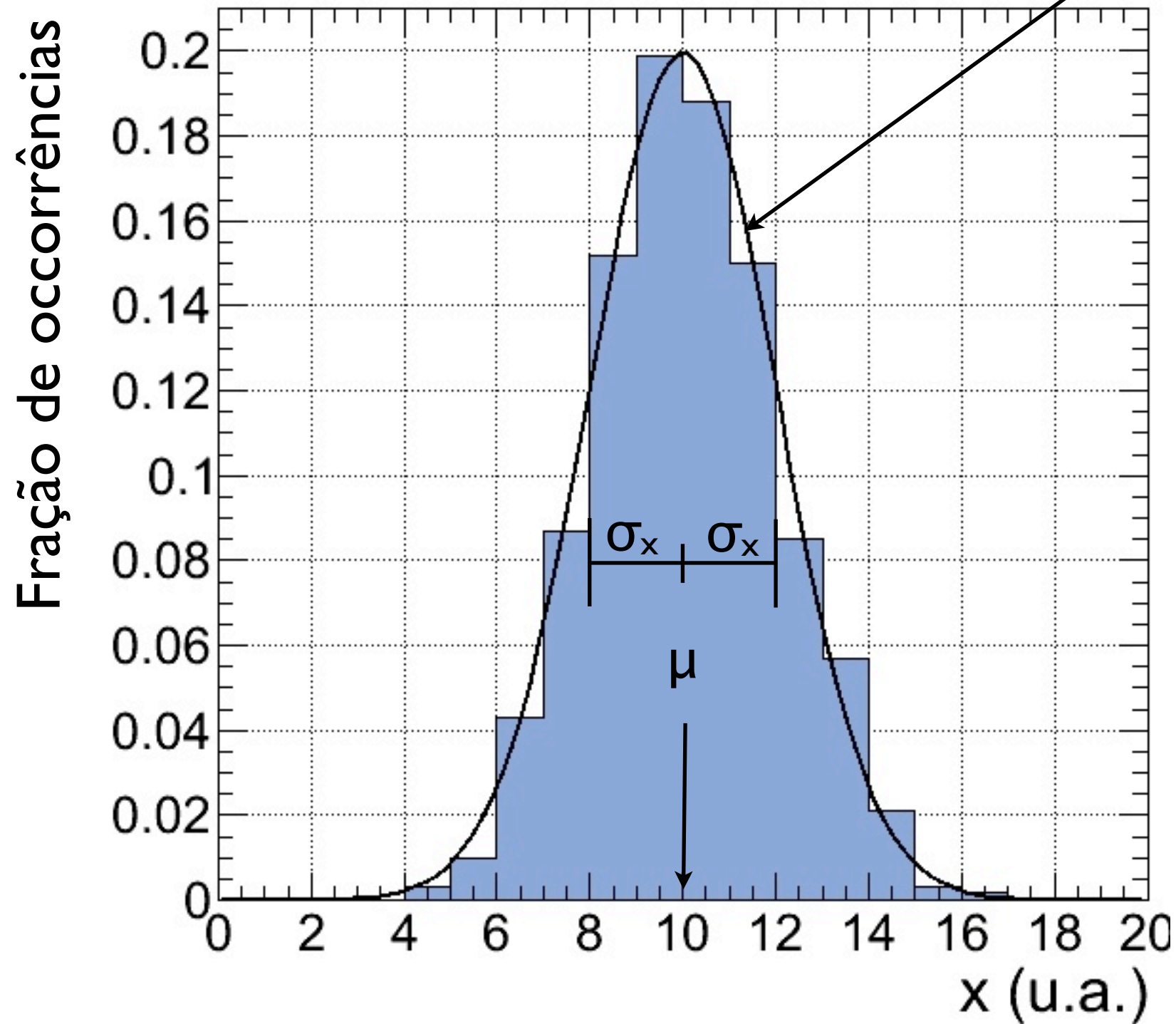


Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



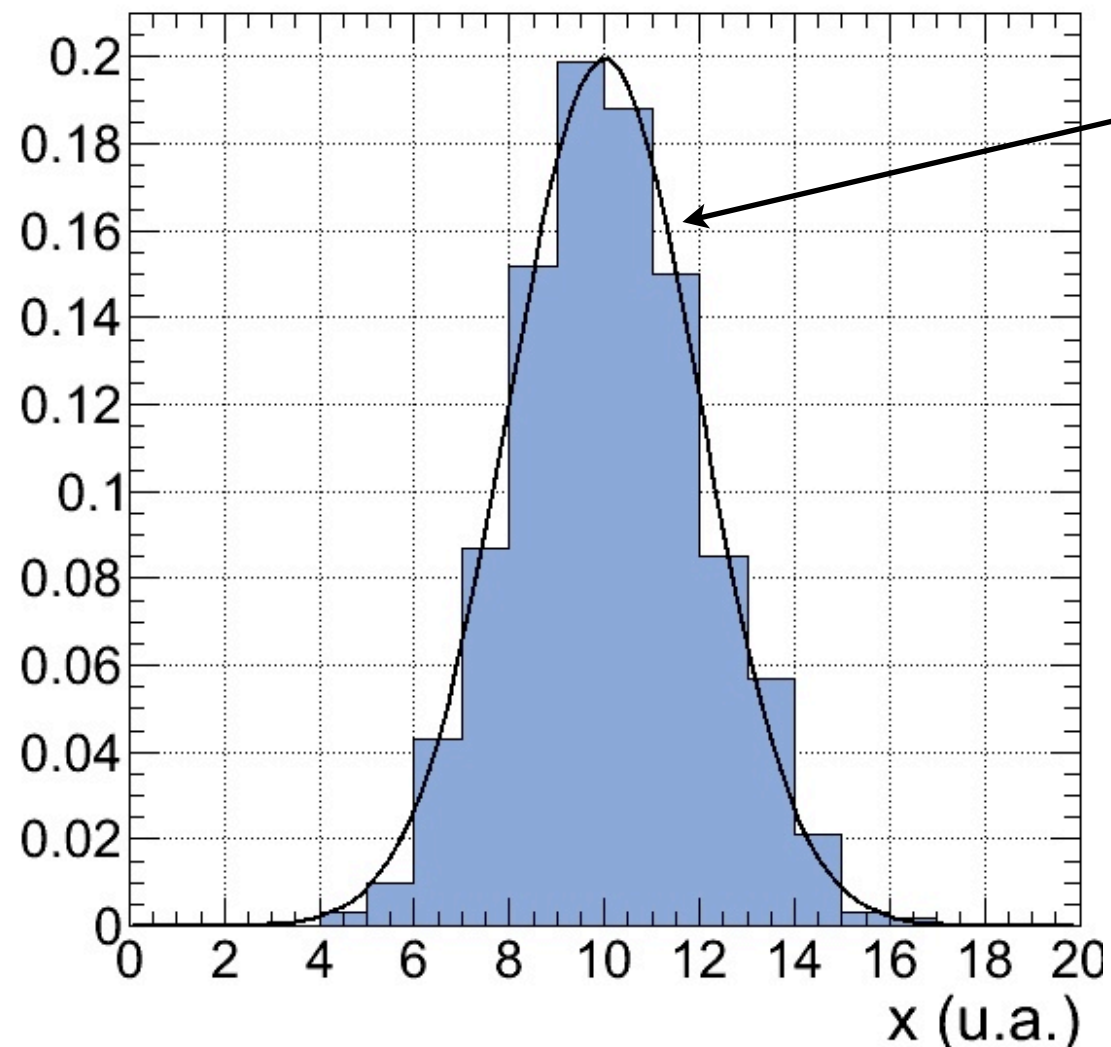
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

$$f(x; \mu, \sigma_x) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$



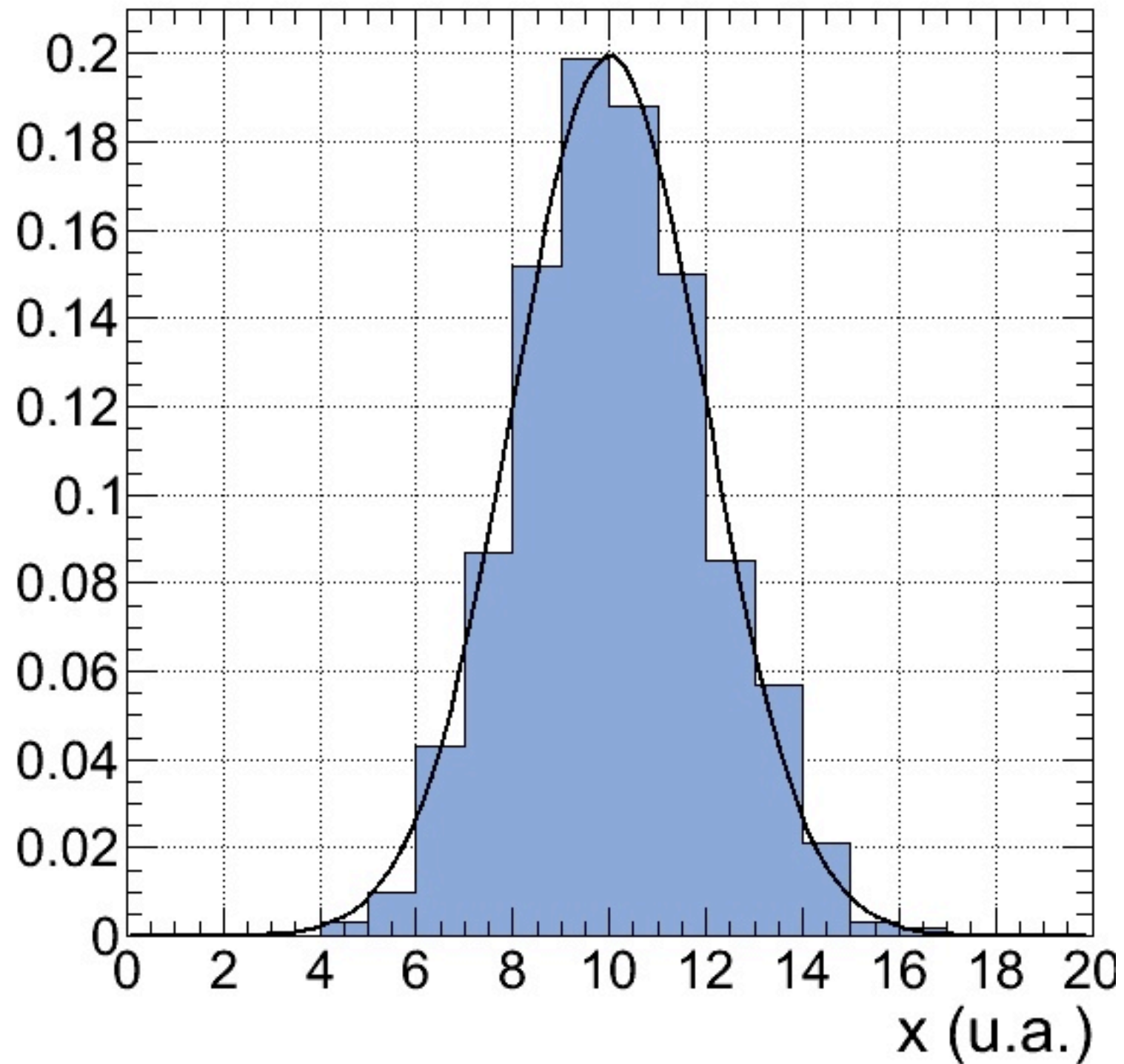
Incertezas aleatórias: Lei dos Erros

“Lei dos Erros”: Para um número indefinidamente grande de medidas a distribuição das frequências se comporta como uma distribuição de Gauss

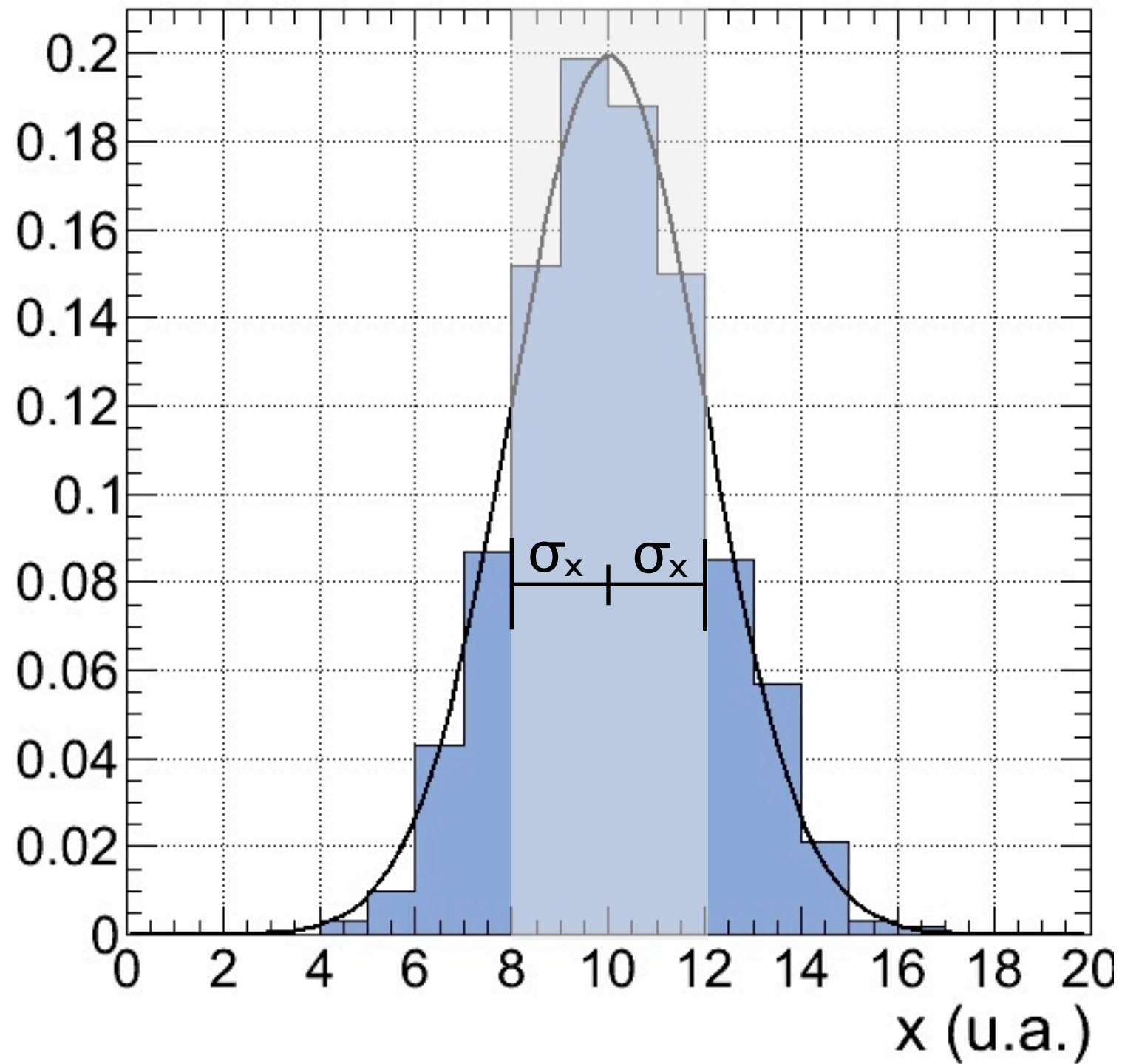


$$f(x; \mu, \sigma_x) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

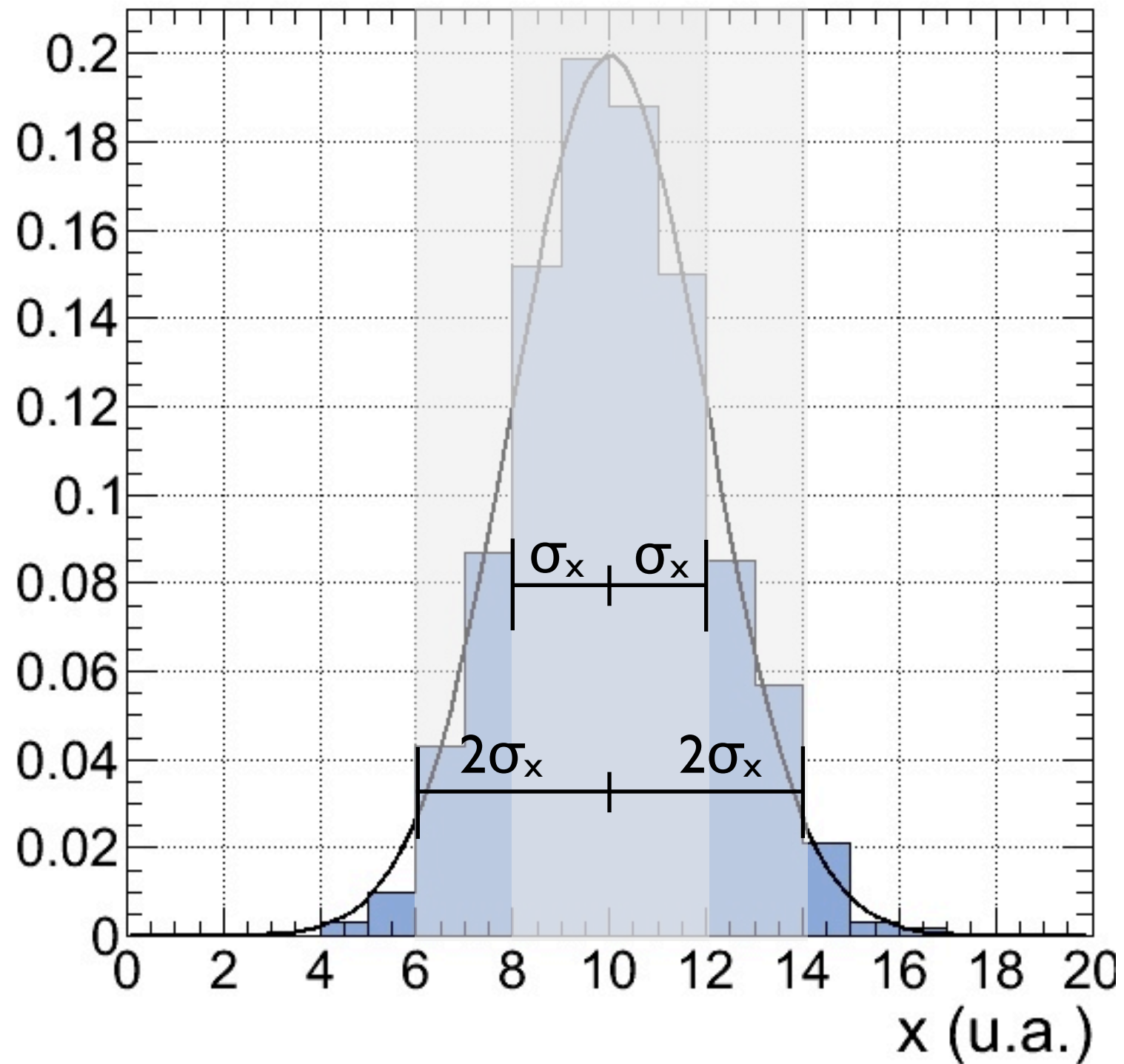
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



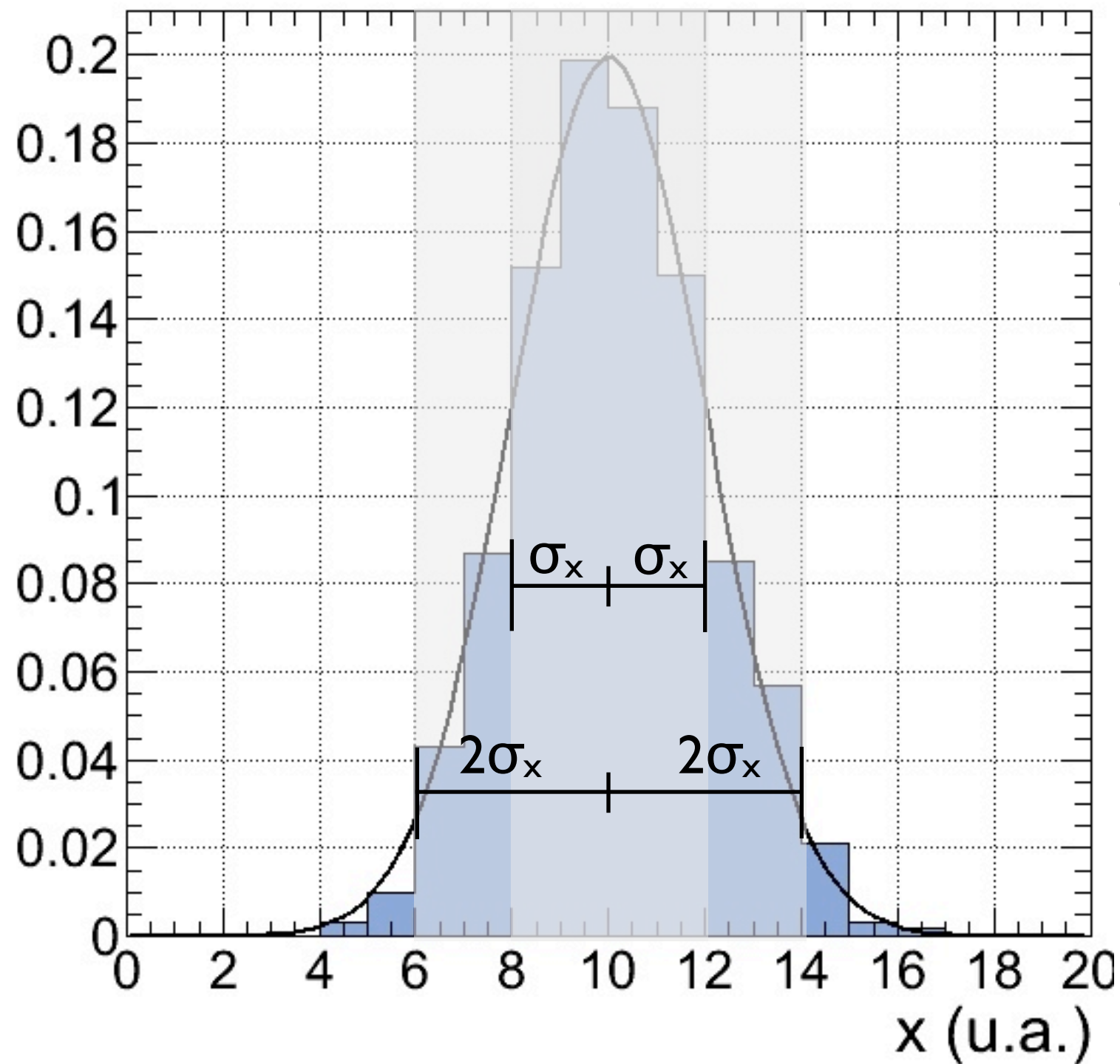
Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss



Incertezas aleatórias: distribuição de Gauss

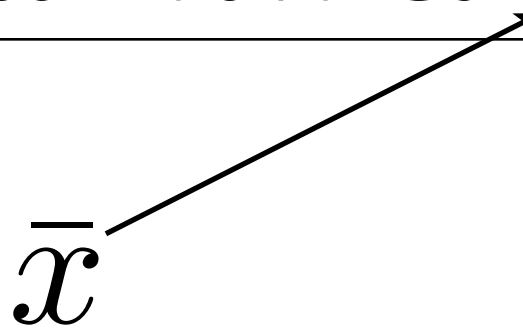


68,3% da área entre $(\mu - \sigma_x)$ e $(\mu + \sigma_x)$
95,5% da área entre $(\mu - 2\sigma_x)$ e $(\mu + 2\sigma_x)$
99,7% da área entre $(\mu - 3\sigma_x)$ e $(\mu + 3\sigma_x)$
...

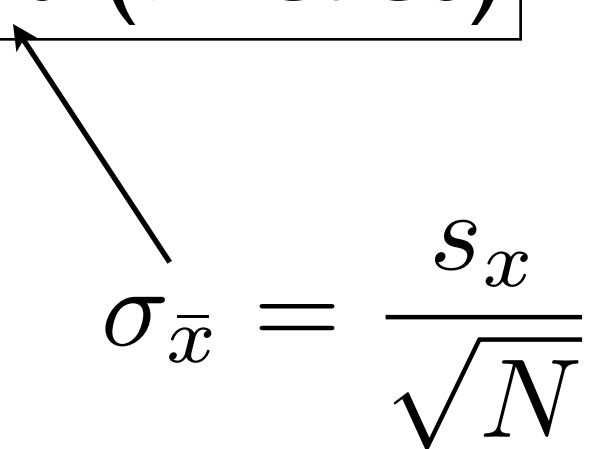
Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}



An arrow points from the symbol \bar{x} to the phrase "estimativa do valor esperado" in the box above.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$


An arrow points from the symbol $\sigma_{\bar{x}}$ to the phrase "erro (unidade)" in the box above.

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

\bar{x}

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

As estimativas do valor esperado e de seu erro associado definem um intervalo ao qual atribuímos um *nível de confiança*, de que o intervalo contenha o valor esperado

Se considerarmos que as medidas se distribuem de acordo com uma distribuição de Gauss (Lei dos Erros), os valores dos níveis de confiança são determinados pela sua área correspondente

Incertezas aleatórias: Intervalo de confiança

estimativa do valor esperado \pm erro (unidade)

$$\bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

INTERVALO DE CONFIANÇA	NÍVEL DE CONFIANÇA (CL)
$(\bar{x} - 0,67 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 0,67 \sigma_{\bar{x}})$	50,0%
$(\bar{x} - 1,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,00 \sigma_{\bar{x}})$	68,3%
$(\bar{x} - 1,65 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,65 \sigma_{\bar{x}})$	90,0%
$(\bar{x} - 1,96 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 1,96 \sigma_{\bar{x}})$	95,0%
$(\bar{x} - 2,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2,00 \sigma_{\bar{x}})$	95,5%
$(\bar{x} - 3,00 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 3,00 \sigma_{\bar{x}})$	99,7%

Intervalo de confiança de 68,3%

Intervalo de confiança de 95,5%

Compatibilidade com um valor de referência

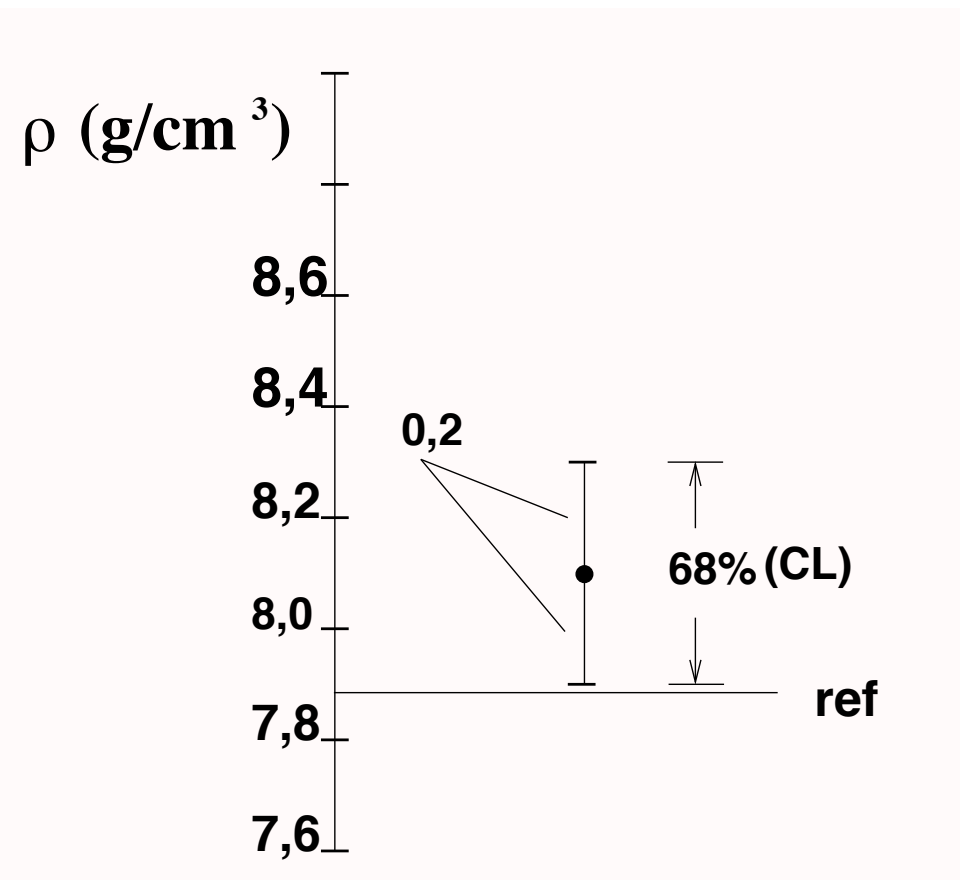
Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Resultado Exp. I:

$$\rho_I = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

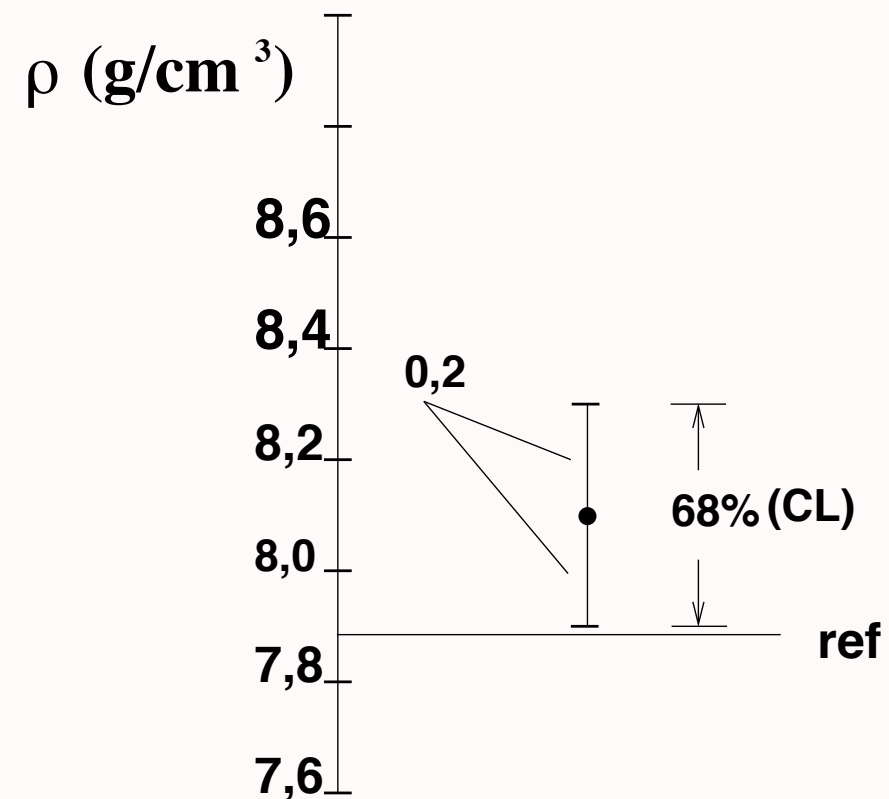


Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

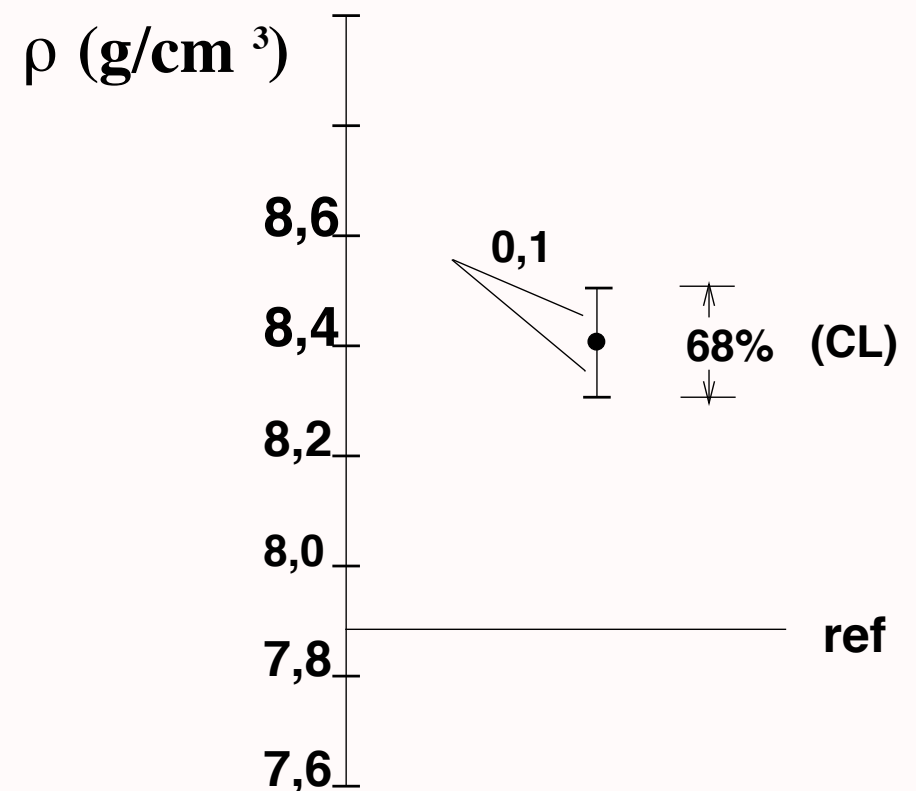
Resultado Exp. 1:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

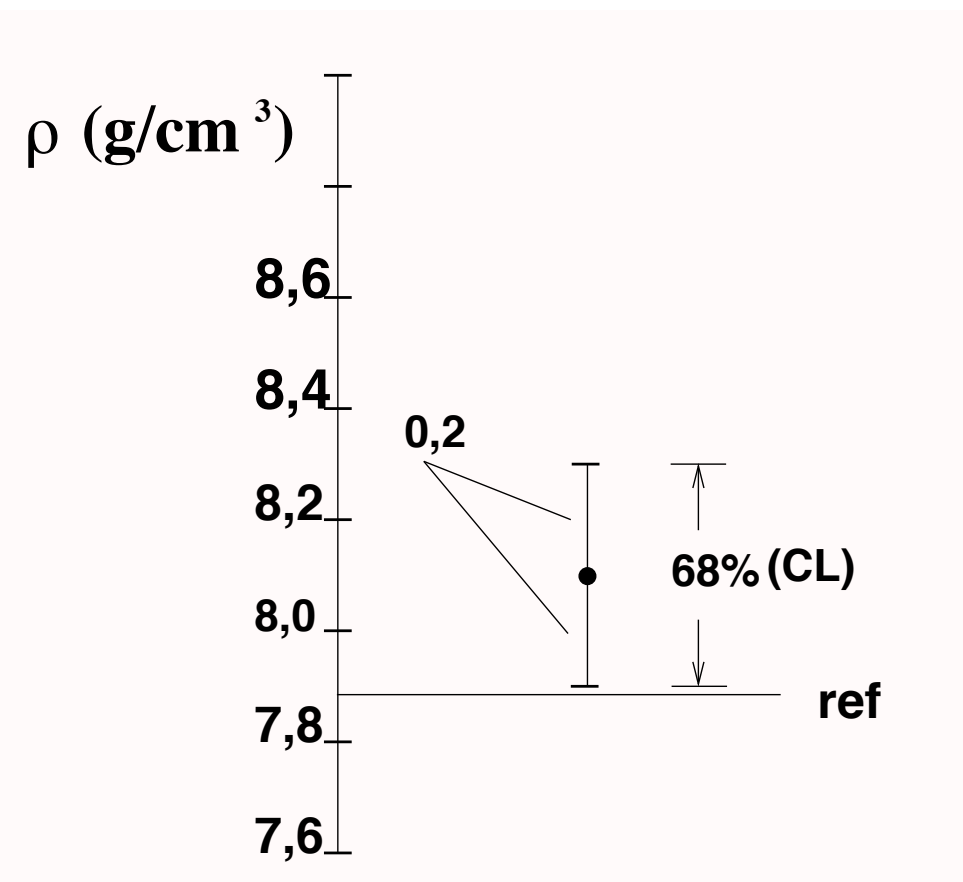


Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



Compatibilidade com um valor de referência

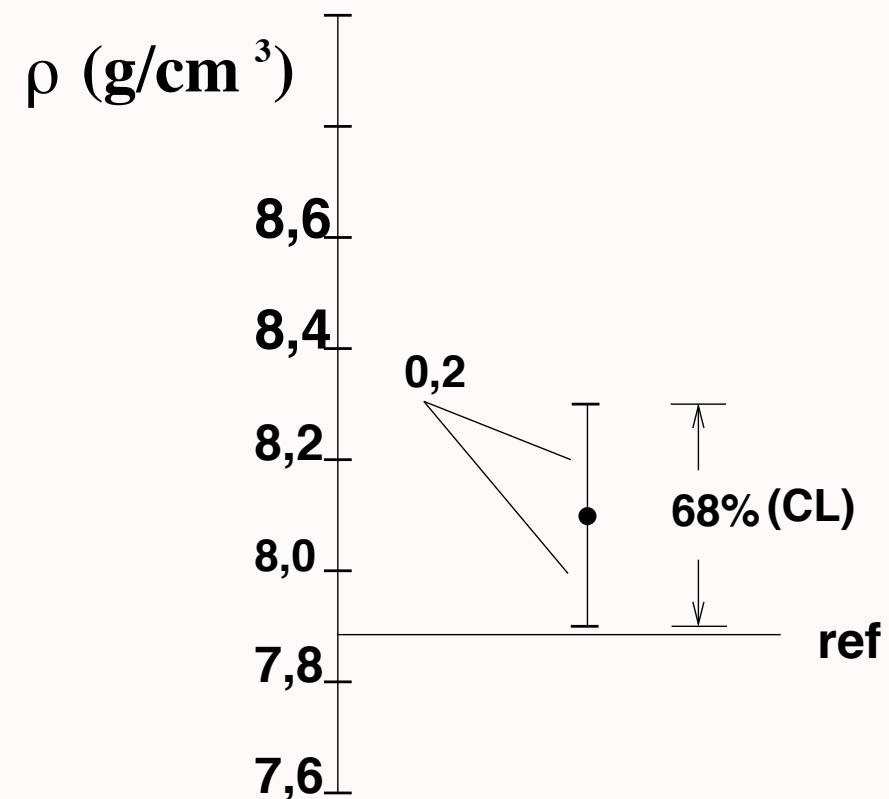
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



Compatibilidade com um valor de referência

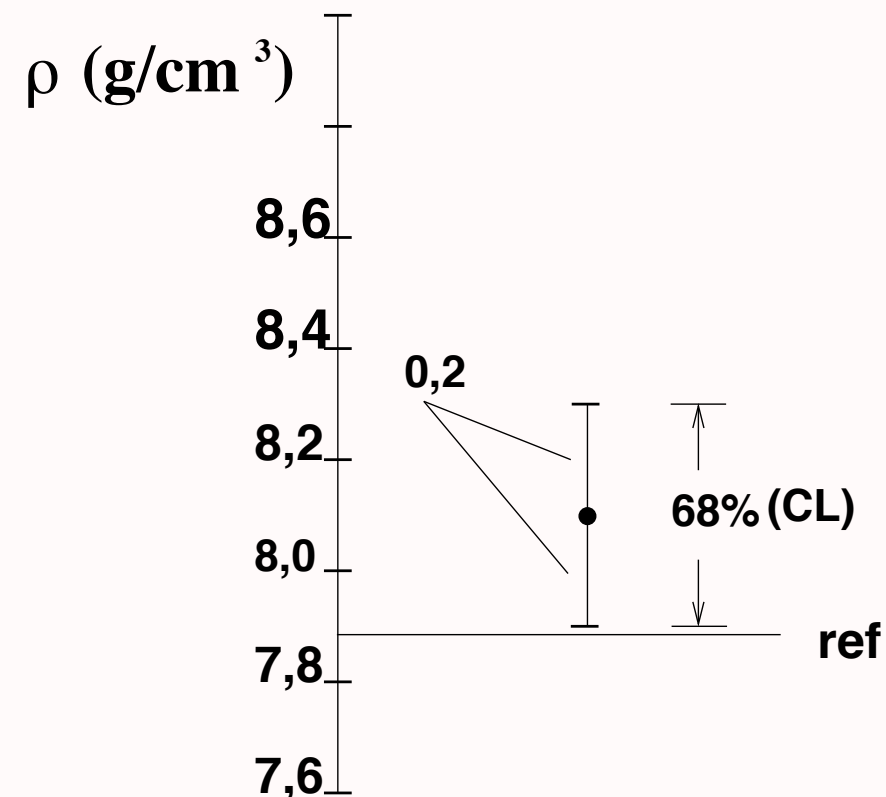
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



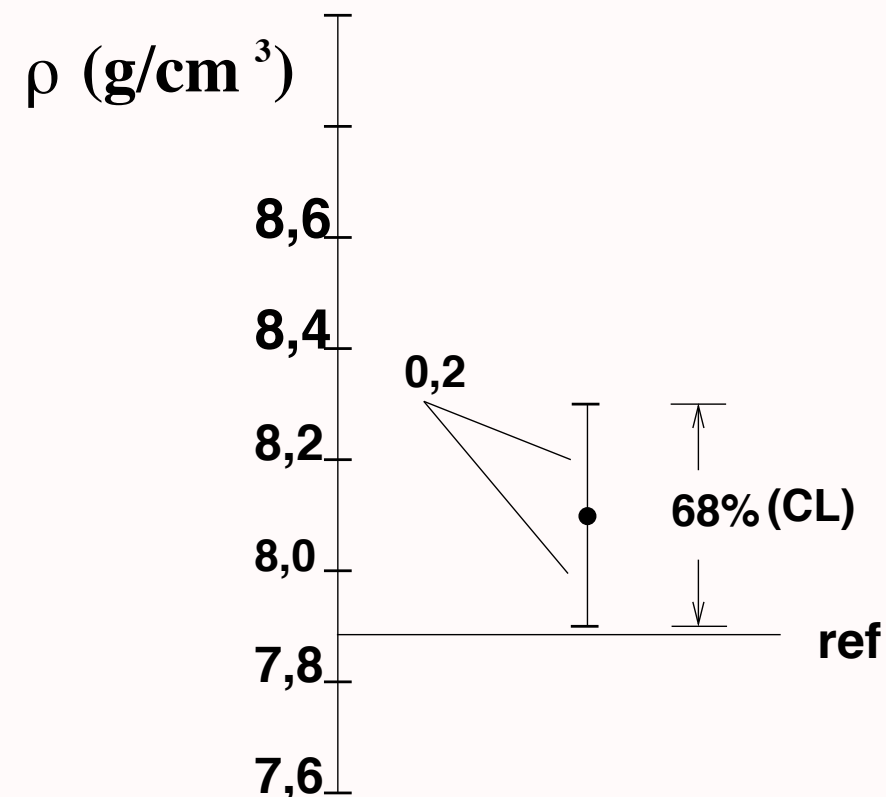
Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas $\sim 68\%$ de que o intervalo contenha o valor esperado

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$

Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas $\sim 68\%$ de que o intervalo contenha o valor esperado

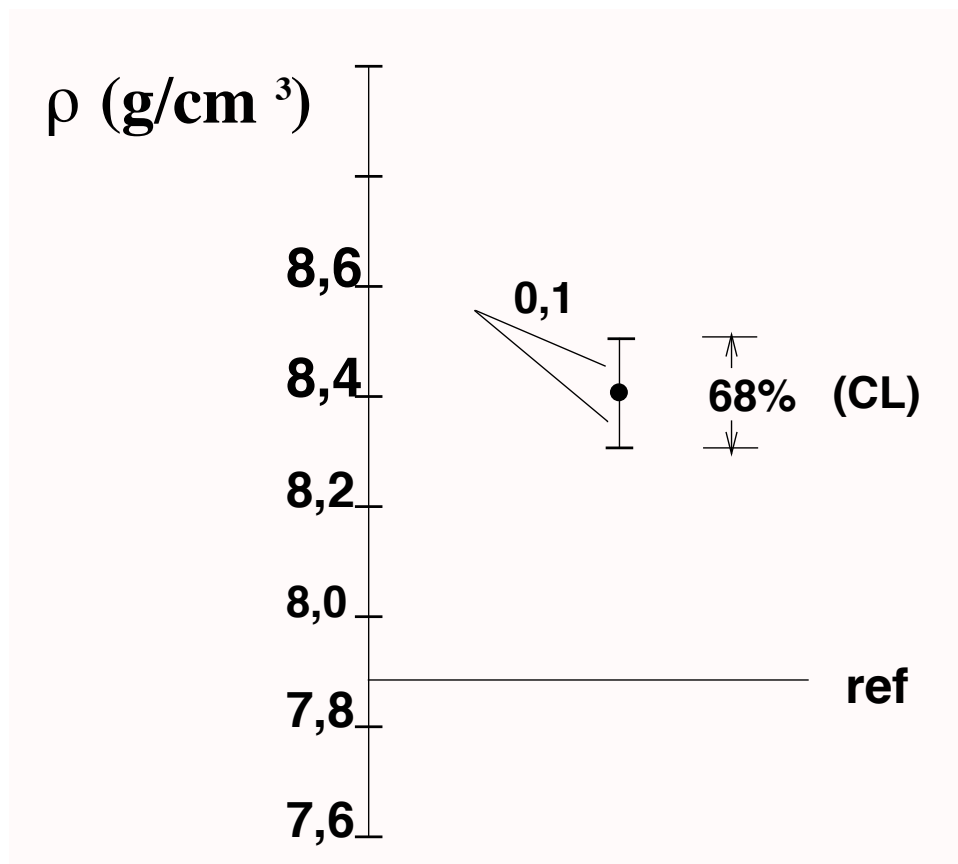
A discrepância não é *estatisticamente significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



Compatibilidade com um valor de referência

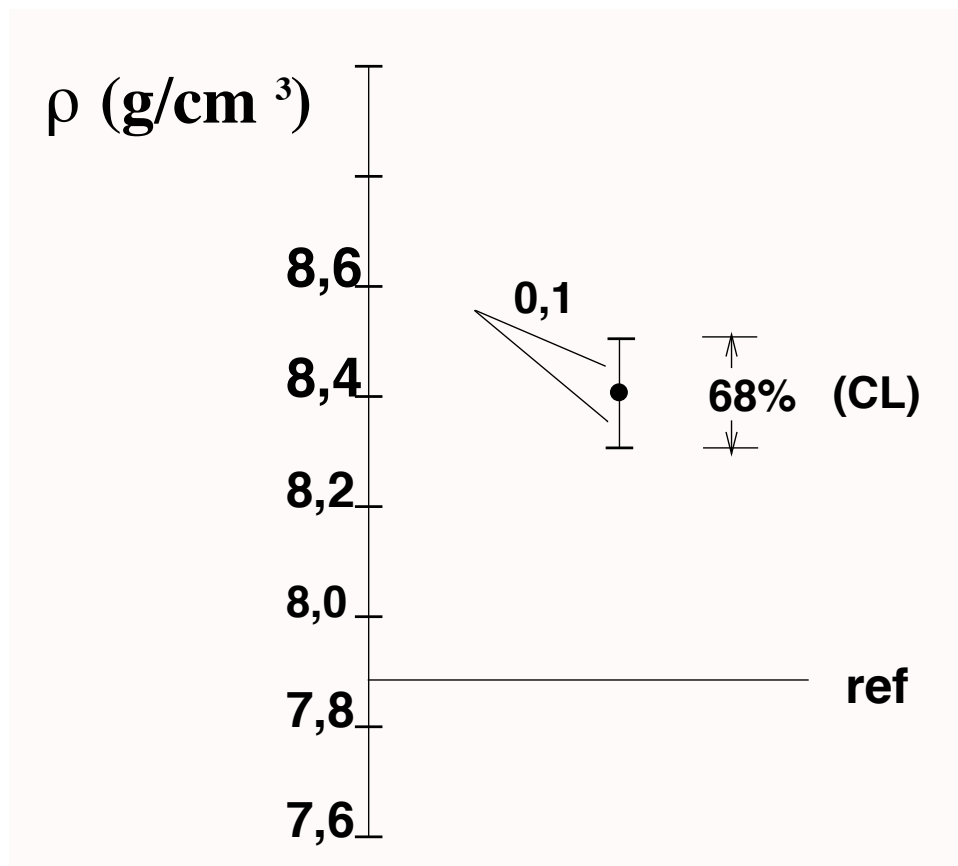
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Compatibilidade com um valor de referência

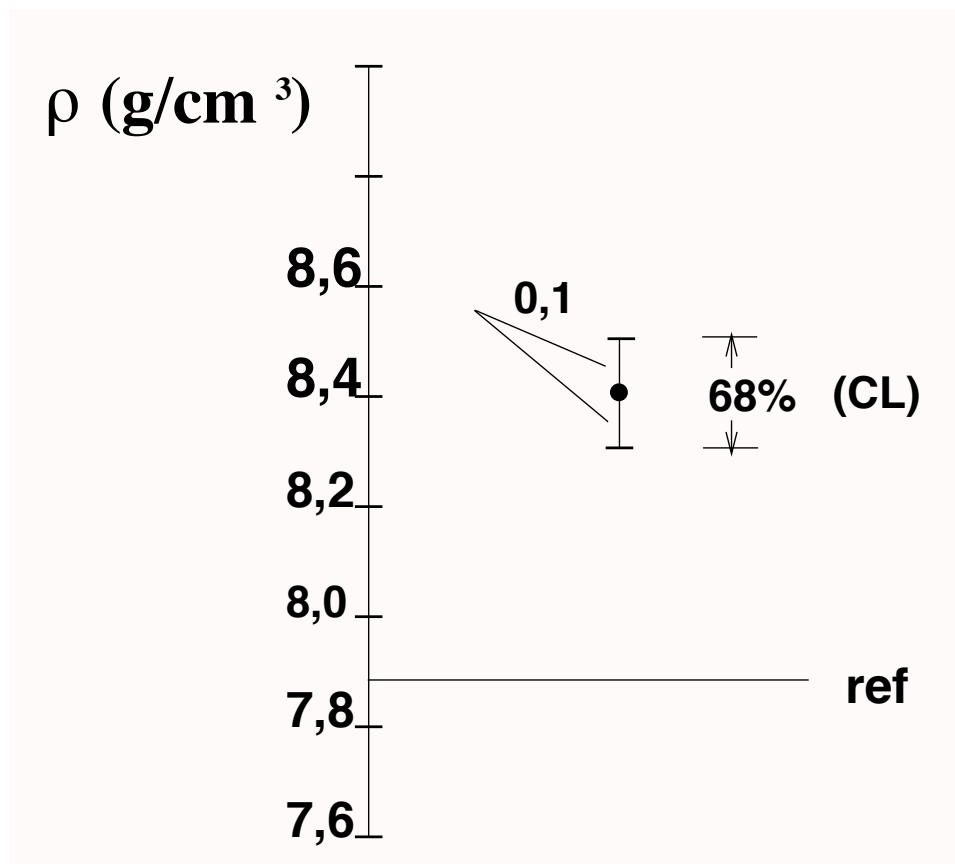
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável ($< 1\%$) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

Compatibilidade com um valor de referência

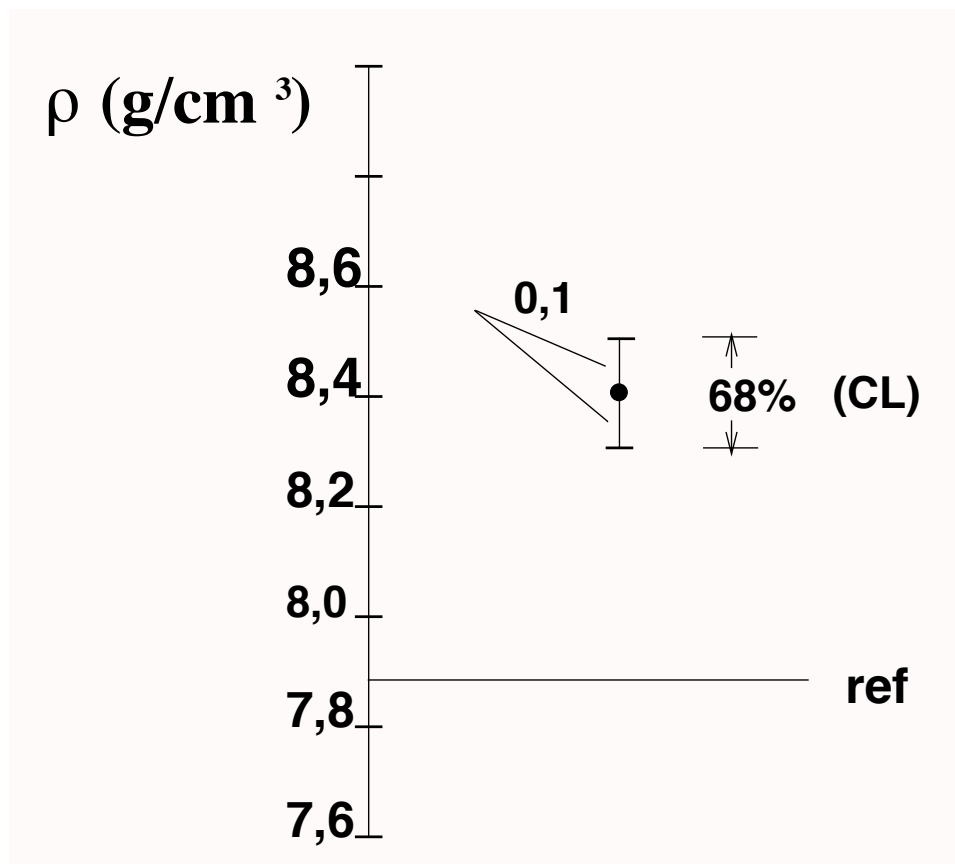
Os resultados ρ_1 e ρ_2 são compatíveis com o valor de referência (ρ_{ref}) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

Discrepância

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável ($< 1\%$) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Regra prática: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Inconclusivo}$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

$$\text{Estimativa 1: } \bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$$

$$\text{Estimativa 2: } \bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Discrepância: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

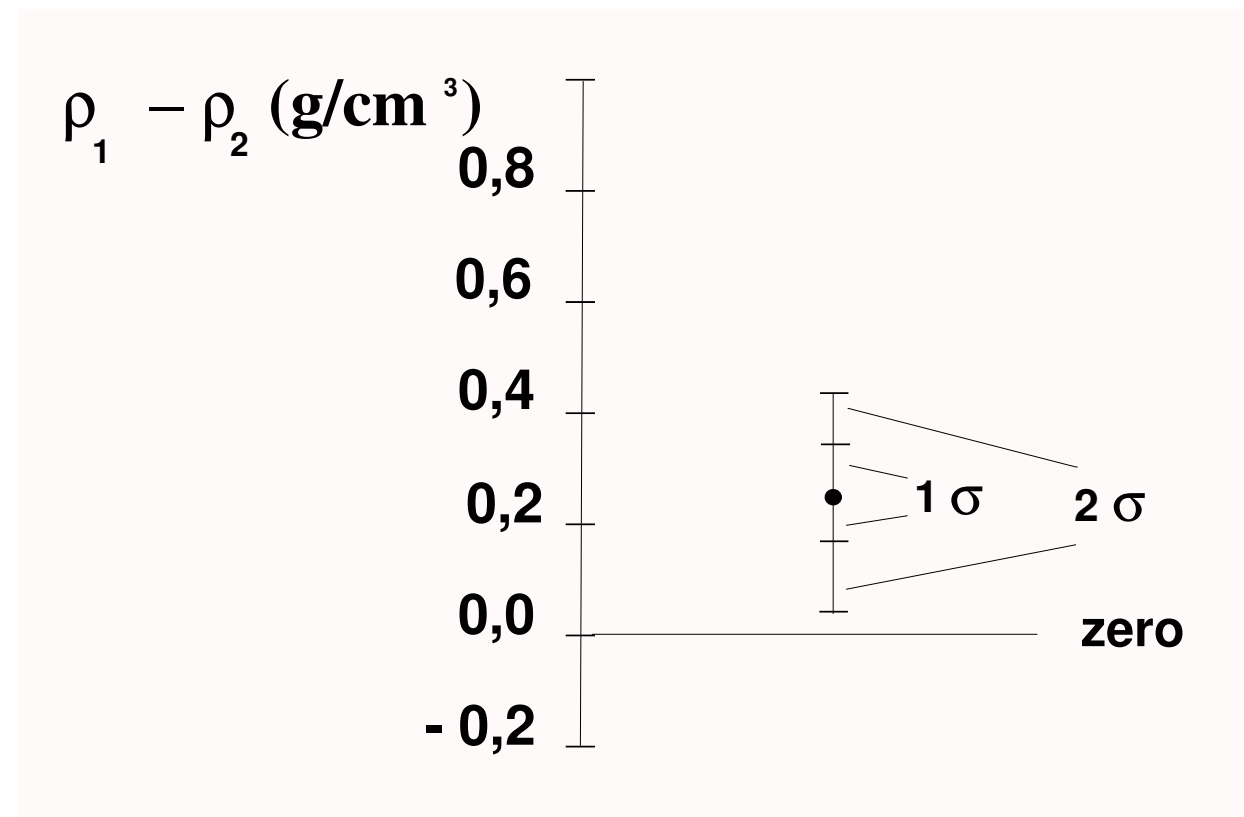
Erro associado: $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

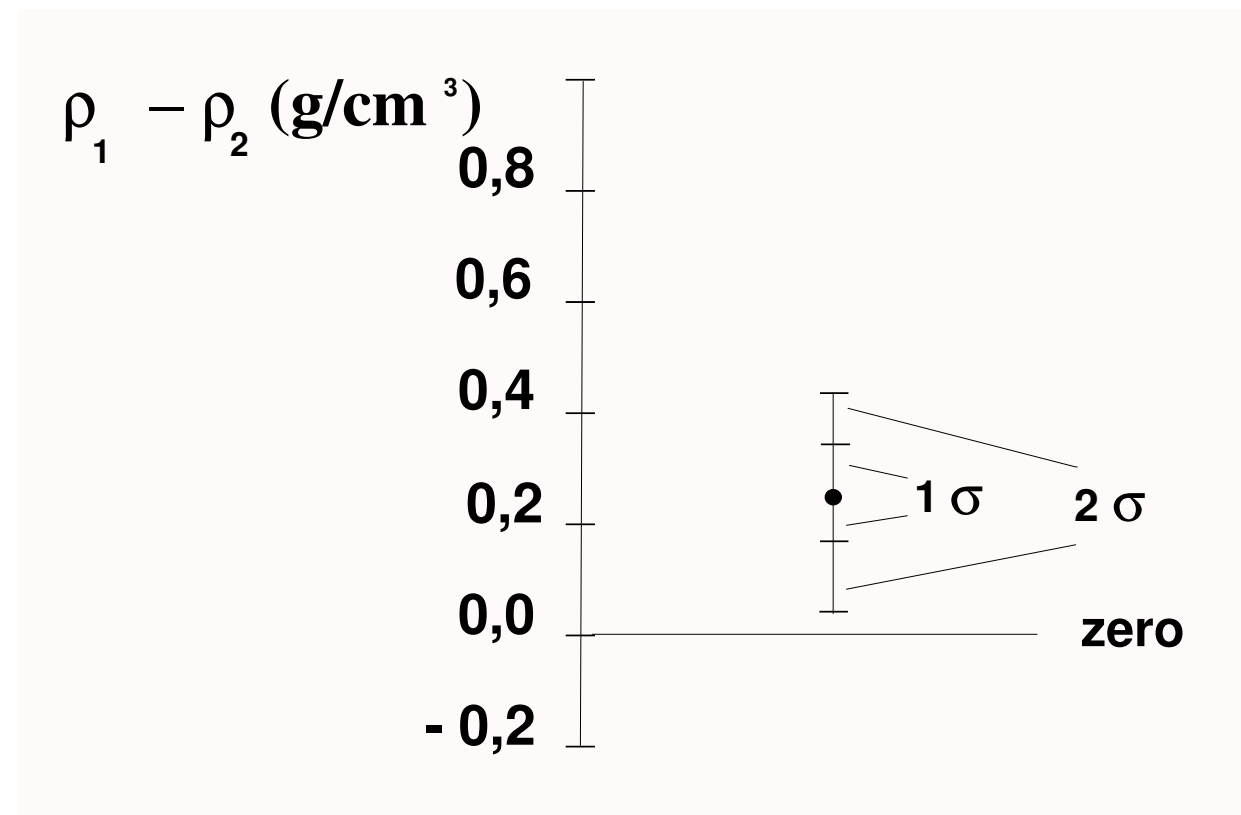


Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

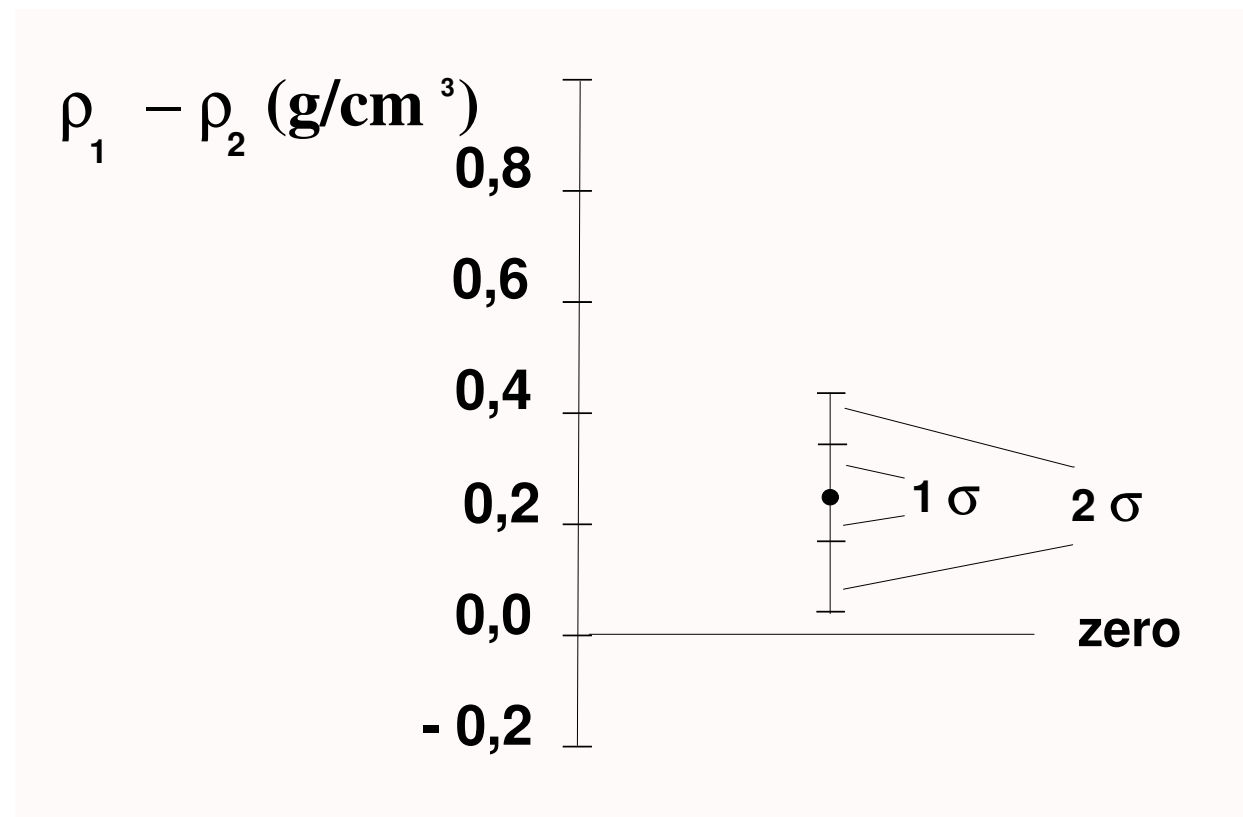
$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



Discrepância

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

Erro associado:

$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

As estimativas são compatíveis entre si (discrepância $< 2\sigma$)

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1: $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2: $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes $\{x_i\}$ do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão $\{\sigma_i\}$, o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ($\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

$$\Rightarrow \rho = (8,34 \pm 0,09) \text{ g/cm}^3$$