Noções de espaço e tempo

- Galileu, século XVI – XVII: estudo do movimento dos corpos, princípio de inércia, conceito de referencial inercial, estudo de corpos celestes, heliocentrismo, método científico.

- Newton, século XVII – XVIII: **mecânica** clássica. Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687.

- Snell, Descartes, Huygens, século XVI – XVII, Fresnel – século XVIII – XIX, **óptica** (natureza ondulatória).
  Século XVII – teoria ondulatória, defendida por Newton, teoria corpuscular defendida por Huygens

- Celcius, Fahrenheit, século XVIII, Boyle, Maxwell, Van der Walls, Boltzmann, século XIX-XX: **termologia e termodinâmica** (estudo das propriedades dos gases).

Todas estas teorias são partes da Física clássica.

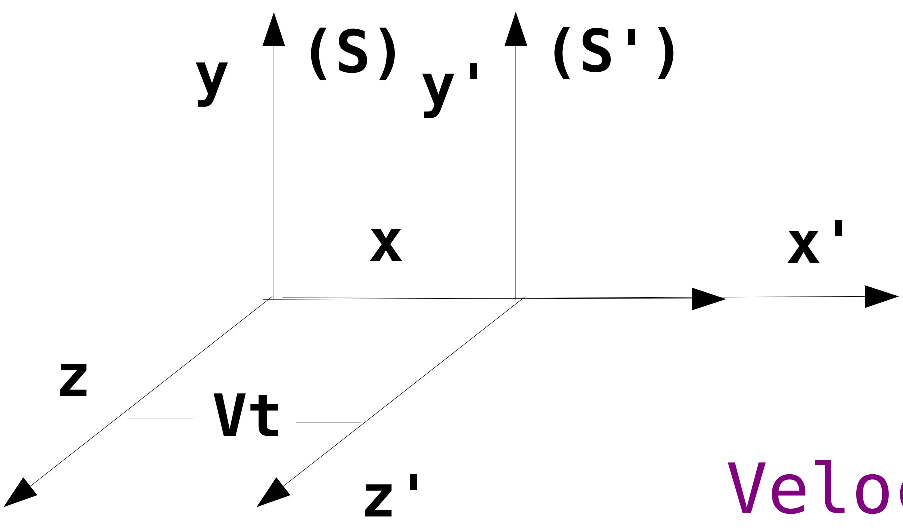
No final do século XIX, a mecânica Newtoniana e o eletromagnetismo, descrito pelas equações de Maxwell, estavam consolidados como teorias físicas.

Luz tratada como fenômeno eletromagnético.

Referenciais inerciais e as transformações de Galileu

Se uma partícula se move em um referencial obedecendo a primeira lei de Newton, este referencial é dito inercial.

A velocidade é sempre medida em relação a um sistema refencial.



$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Velocidade do referencial S' em relação ao referencial S

O problema da velocidade de uma patícula na física clássica.

Exemplo: Um veículo com velocidade constante, $v = 30$ m/s, percorre uma estrada retilínea, ao longo da qual estão colocados alguns instrumentos de medida. Uma pessoa que encontra-se dentro do veículo, atira uma pedra para a frente com velocidade $v_p = 10$ m/s.

Velocidade medida pelos instrumentos ao longo da estrada, $v_f = (30 + 10) = 40$ m/s.

Se a pedra for atirada para trás,
$V_t = (30 - 10) = 20$ m/s.

O problema da velocidade da luz no vácuo.

Das leis da eletrodinâmica (equações de Maxwell), resultam que a luz se propaga no vácuo com velocidade constante

$$c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$$

A velocidade da luz é invariável no vácuo, ou seja, apresenta o mesmo valor seja qual for o sistema de referência em que é medida e mesmo que a fonte emissora e o observador estejam se movendo.

Consideremos um referencial inercial, aonde valem as leis da mecânica clássica.

Esperava-se que em outro referencial inercial em MRU em relação ao primeiro com velocidade V, a velocidade da luz fosse dada por:

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{V}$$

Isto implicaria em $|c'| \neq |c|$.

Assim, a validade das equações de Maxwell estaria restrita um referencial inercial privilegiado, onde a velocidade da luz seria a constante c em todas as direções.

Segundo a mecânica newtoniana para todos os sistemas que se movem com velocidade constante, aplicam-se as mesmas leis de movimento,isto é, não há referenciais privilegiados.

Diante destas observações, surgiu a hipótese de que ondas como a luz, necessitavam de um meio para se propagar. Isto deu lugar ao conceito de éter, que estaria presente em toda parte, mesmo no espaço vazio.

Desta forma a velocidade da luz seria c, somente em um sistema de referência especial, absoluto, em repouso em relação ao éter.

Em qualquer sistema movendo-se com velocidade v em relação a este sistema especial, a velociade da luz seria,

$$\vec{c} + \vec{v}$$

o que justificaria o resultado esperado.

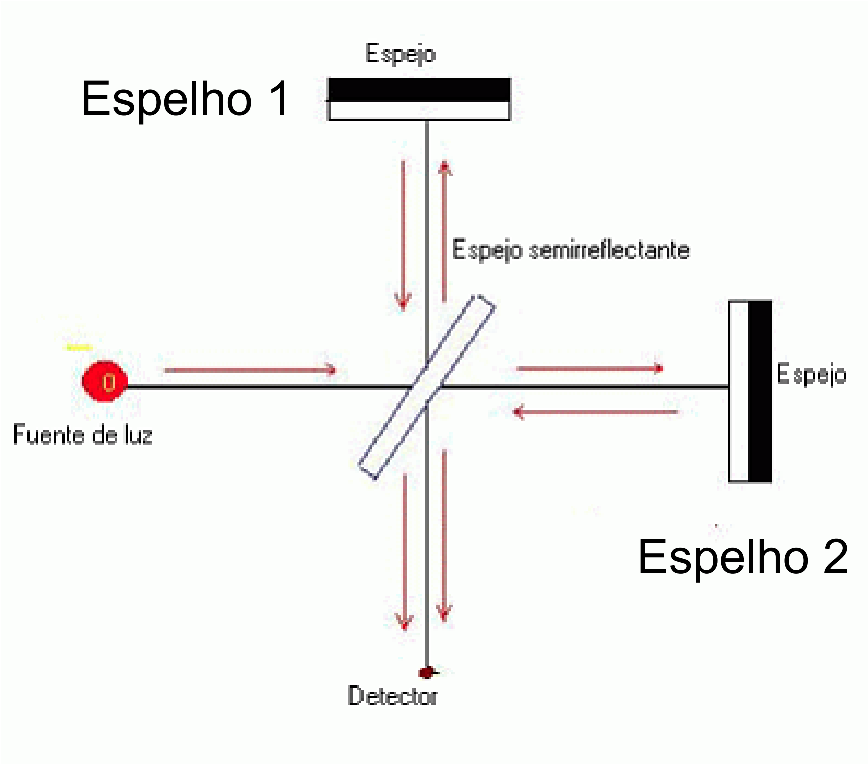
O experimento de Michelson e Morley.

Entre 1887, A. A Michelson e E. W. Morley, realizaram um experimento que tinha como objetivo medir o movimento da Terra através do espaço.

Deveria ser possível detectar um MRU em relação ao éter usando a lei de Galileu de composição de velocidades, ou seja, a velocidade da luz num referencial em movimento relativo ao éter deveria ser diferente em direções diferentes.

Feixe de luz monocromática, proveniente de uma fonte é dividido em dois, seguindo caminhos em ângulo reto entre si. Foram realizadas medidas, posicionando o espelho 1 de modo que o caminho fosse paralelo ao movimento de rotação da Terra. A mesma medida foi feita com o espelho 2.

Os feixes eram refletidos e recombinados para verificar se havia qualquer alteração na velocidade média ao longo dos dois caminhos de ida e volta.



As diversas medidas realizadas não mostraram qualquer desvio.

Relatividade Especial

Einstein (1879-1955), interpretou corretamente estes resultados em seu trabalho de 1905.

A idéia do éter estacionário, que estava ligada a um sistema de referência absoluto foi descartada.

A velocidade de um objeto em movimento não pode ser medida em relação ao espaço vazio, somente em relação a outros objetos.

Exemplo: Suponha que você está em um trem e vê outro trem se movendo. Você reconhece o movimento relativo entre seu trem e o outro, mas não pode dizer qual deles está em movimento.

Tomando o sistema de referência no solo,
- seu trem está se movendo, o outro trem está em repouso;
- seu trem está em repouso, o outro trem se move;
- ambos podem estar se movendo.

Se você estivesse em um trem sem janelas, não haveria maneira de determinar se o trem estaria se movendo com velocidade uniforme ou em repouso.

Postulados da teoria da relatividade especial

- Todas as leis da natureza são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.

- A velocidade da luz no vácuo, c, é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte.

Se as leis da mecânica variassem para observadores que se movimentam com diferentes velocidades, por exemplo, um jogador de sinuca, teria que ajustar seu estilo de jogar de acordo com as estações do ano, quando a Terra varia sua velocidade orbital em torno do Sol.

Nenhum experimento mecânico, elétrico ou óptico, jamais revelou o movimento absoluto.

Simultaneidade – uma consequência do segundo postulado de Einstein.

Dois eventos são simultâneos, se eles ocorrem no mesmo instante de tempo.

Exemplo: Observador e fonte de luz no centro de uma nave espacial (ou o vagão de um trem).

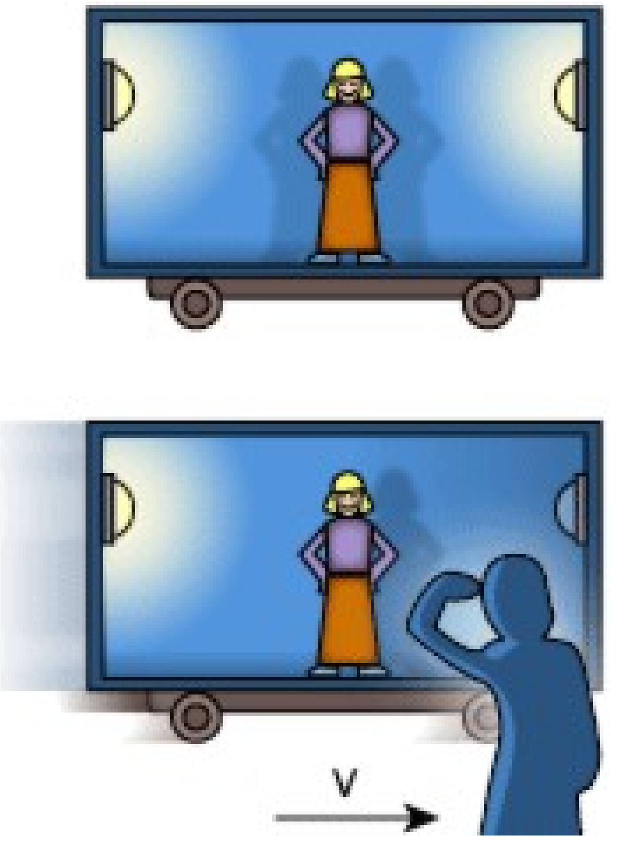
Observador vê um sinal luminoso chegar simultâneamente nas extremidades frontal e posterior, para a nave (ou trem) em repouso ou movendo-se com velocidade constante.

Observador fora da nave (ou do trem), vê os dois eventos em outro sistema de referência.

Para este observador, os eventos não são simultâneos.

Se a nave se move para frente, a extremidade traseira da nave, se move em direção ao feixe enquanto que a extremidade frontal, se afasta do feixe.

Portanto o feixe direcionado para trás, percorre uma distância menor que o feixe direcionado para frente.



Como a velocidade da luz é constante, o observador externo observa o evento (chegada do feixe de luz) acontecer na parte traseira, antes do evento na parte dianteira.

Dois eventos que são simultâneos em um sistema de referência, não necessariamente devem ser simultâneos em um sistema que se move em relação ao primeiro.

Este resultado é puramente relativístico.

A não simultaneidade ao escutar um trovão depois de ver o correspondente relâmpago é análoga à não simultaneidade relativística?

O Espaço-tempo

Vivemos em um espaço tridimensional.

Por exemplo, para especificar a posição de um ponto precisamos estabelecer as distâncias em três eixos coordenados.

Para especificar o tamanho de uma caixa, estabelecemos seu comprimento, largura e altura.

Entretanto as três dimensões não são suficientes para dar uma descrição completa da caixa; ela nem sempre foi e nem sempre será uma caixa.

Assim as três dimensões espaciais constituem uma descrição válida da caixa, somente durante um determinado período de tempo.

Todas as coisas existem no espaço-tempo, independente de ser uma pessoa, um planeta ou um objeto.

No exemplo da nave, dois observadores no interior da nave no mesmo ponto, fariam a mesma medida de espaço tempo, assim como dois observadores no mesmpo ponto, fora da nave.

Estes dois observadores compartilham a mesma região do espaço tempo.

Vimos o caso de dois observadores, um dentro da nave e outro fora da nave, onde as medidas de espaço tempo, realizadas por ambos não as mesmas.

As diferenças tornam-se apreciáveis para valores de velocidade próximos à velocidade da luz, isto é, velocidades relativísticas.

Neste caso, cada observador está em uma região do espaço-tempo.

A razão constante entre espaço-tempo para a luz, c, é o fator unificador entre diferentes regiões do espaço-tempo e constitui a essência do segundo postulado da relatividade especial.

Dilatação temporal

Vamos examinar o fato de que em velocidades próximas à velocidade da luz, o tempo pode ser alongado.

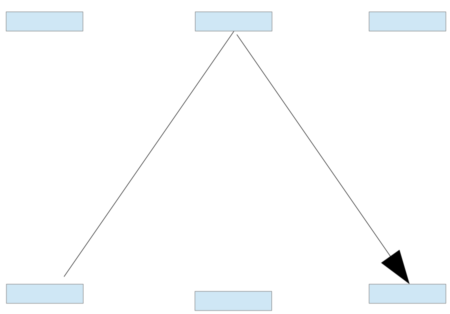
Suponha que você possa observar um flash luminoso que ricocheteia entre dois espelhos paralelos, posicionados na vertical e a uma distância fixa.

Este aparato, constitui um relógio de luz, já que os intervalos de tempos de ida e volta são constantes.

Se o relógio encontra-se dentro de uma nave, o observador no interior da nave, observa o fenômeno da mesma forma quer a nave esteja em repouso, quer se mova em alta velocidade.

O observador no interior da nave, compartilha o mesmo sistema de referência espaço-tempo que a nave.

Suponha um observador fora da nave. Para este observador, o flash de luz se move horizontalmente e verticalmente, portanto percorre uma trajetória diagonal (figura abaixo).



Espelhos paralelos posicionados na vertical

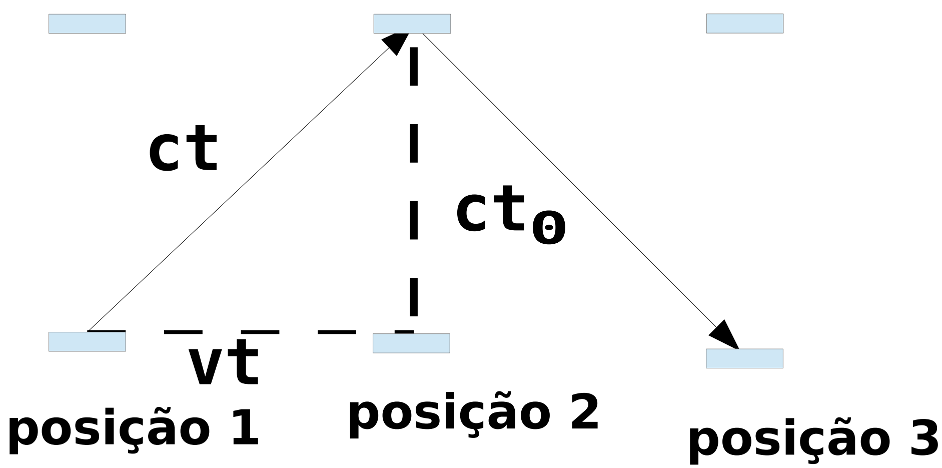
Assim para o observador fora da nave, o flash percorre uma distância maior do que aquela percorrida para o observador no interior da nave.

Portanto esta distância maior corresponde a um tempo de viagem maior.

Este alongamento do tempo é chamado, dilatação temporal.

Todos os relógios funcionam mais lentamente quando estão em movimento do que quando estão em repouso.

A equação da dilatação temporal, isto é, a relação entre o tempo t_0 (chamado de tempo próprio) medido no sistema de referência que se move junto com o relógio e o tempo t medido no outro sistema de referência (chamado de tempo relativo), é deduzida a seguir.



$$c^2 t^2 = c^2 t_0^2 + v^2 t^2$$

$$c^2 t^2 - v^2 t^2 = c^2 t_0^2$$

$$t^2 [1 - (v^2/c^2)] = t_0^2$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Podemos expressar a dilatação temporal por:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Como $v \ll c \rightarrow \gamma \rightarrow 1$. Importante em velocidades relativísticas.

Para v = 0, Y = 1. Para velocidades muito pequenas comparadas com a velocidade da luz, t = t_0, ou seja, os intervalos de tempo são os mesmos em ambos os sistemas de referência.

Para v = 50% c, Υ= 1,15 => $t = 1{,}15\ t_0$

Se observássemos um relógio em uma nave viajando com a metade da velocidade da luz, veríamos o ponteiro dos segundos gastar 1,15 minutos para completar uma volta, enquanto que o observador viajando na nave veria ele gastar 1 minuto.

Se o relógio passasse com a velocidade da luz, mediríamos o intervalo de tempo infinito, o relógio pareceria imutável.

Observe que não há nada diferente com o próprio relógio, estas observações são efeitos puramente relativísticos.

Mesmo em grandes velocidades, o observador que se move junto com a nave, não observa esta diferença. Isto ocorre porque os dois observadores, o de dentro e o de fora da nave ocupam regiões espaço-tempo diferentes.

A dilatação temporal foi confirmada experimentalmente inúmeras vezes.

Em 1971, quatro relógios atômicos de césio voaram em aviões comerciais, no sentido leste e no sentido oposto. Os relógios indicaram tempos diferentes, confirmando mais uma vez a teoria de Einstein.

Hoje em relógios atômicos orbitando a Terra, como parte do sistema global de posicionamento (GPS), ajustes são essenciais para corrigir os efeitos da dilatação temporal, a fim de poder usar os sinais provenientes dos relógios para fornecer localizações sobre a Terra com grande precisão.

Se você estivesse se movendo numa aeronave em alta velocidade em relação à Terra, notaria alguma diferença em sua pulsação? E na pulsação das pessoas que ficaram na Terra?

A contração do comprimento

Quando um objeto se move através do espaço-tempo, tanto o espaço quanto o tempo sofrem alterações.

O espaço sofre contração, fazendo com que pareçam mais curtos quando estão se movendo em relação a nós com velocidades relativísticas.

A contração do comprimento foi proposta pela primeira vez pelo físico George F. FitzGerald e expressa matematicamente pelo físico Hendrick A. Lorentz.

Eles entretanto fizeram a hipótese de que era a própria matéria que sofria contração.

No referencial da barra:

$$L_0 = \frac{c\Delta t_0}{2} \rightarrow \Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$

No referencial onde a barra se move com velocidade "v"

$$d_1 \rightarrow c\Delta t_1 = L + v\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c-v}$$

$$d_2 \rightarrow c\Delta t_2 = L - v\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+v}$$

Logo, o tempo total para o feixe ir e voltar é:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = L\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right)$$

$$= L\frac{2c}{c^2(1-v^2/c^2)} = \frac{2L}{c}\gamma^2$$

Mas $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, então:

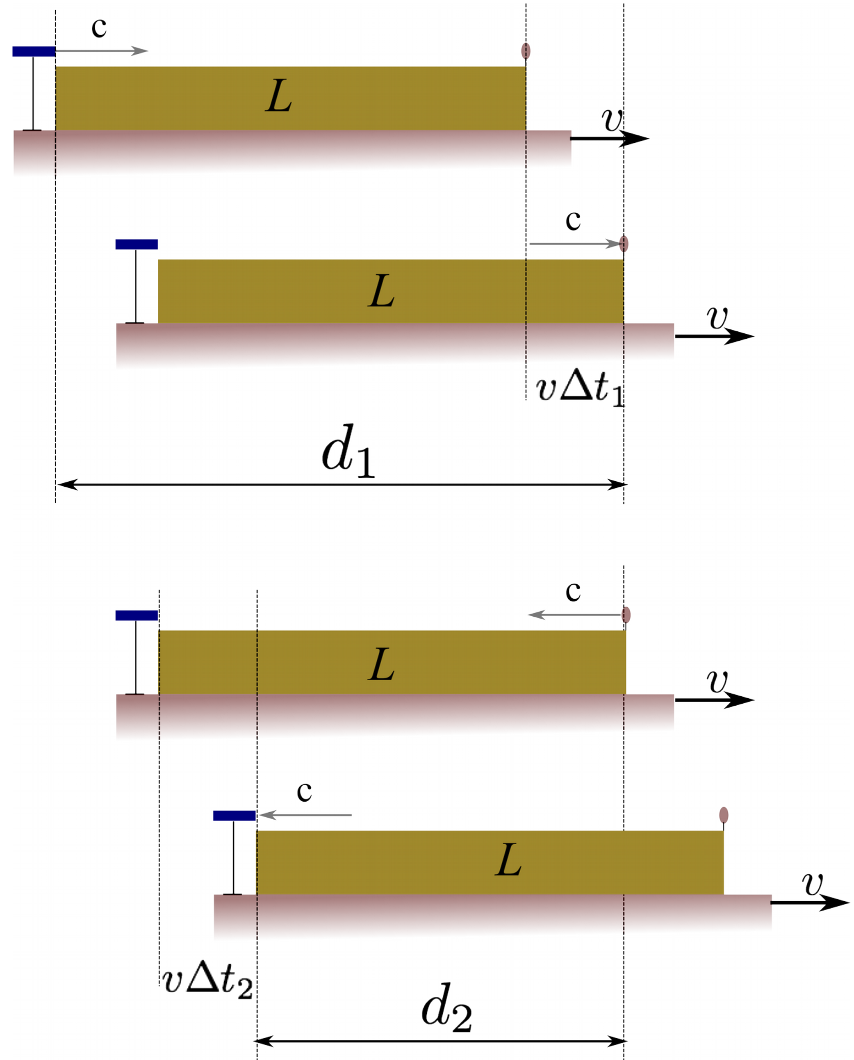
$$\gamma\Delta t_0 = \frac{2L}{c}\gamma^2 \longrightarrow \Delta t_0 = \gamma\frac{2L}{c}$$

Logo:

$$\frac{2L_0}{c} = \gamma\frac{2L}{c}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma}L_0}$$

Medindo o comprimento de uma barra com um feixe de luz:



Einstein interpretou corretamente o problema,ao justificar que o que sofre contração é o próprio espaço.

Assim, por razões históricas a fórmula da contração de comprimento é conhecida com contração de Lorentz.

Onde v é o valor da velocidade relativa entre o objeto observado e o observador, c é a velocidade da luz, L é o comprimento medido do objeto em movimento e L_0, é o comprimento medido do objeto em repouso (comprimento próprio).

Podemos observar que para velocidades pequenas comparadas com a velocidade da luz, o comprimento do objeto em movimento é aproximadamente igual ao comprimento em repouso, ou seja,

$$L = L_0$$

À medida que a velocidade do objeto cresce, a contração aumenta, ou seja, o objeto diminui de comprimento.

A contração ocorre apenas na direção do movimento. Se um objeto está se movendo horizontalmente, não ocorre qualquer contração na direção horizontal.

Se o objeto fosse capaz de se mover com a velocidade da luz, c, seu comprimento seria nulo.

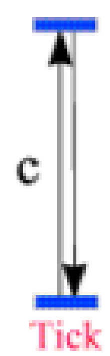
Definição de tempo próprio e comprimento próprio

- Grandeza (tempo, espaço) referente a um evento que ocorre em um referencial, medido por um observador no mesmo referencial. Para ser tempo próprio, é necessário que o evento ocorra no mesmo local que o observador:

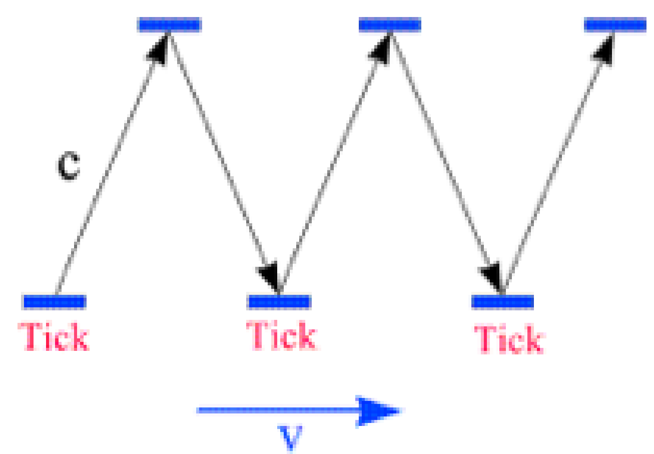
  Exemplo:

  - o tempo de viagem de um passageiro em uma nave, medido por ele mesmo;
  - o intervalo de tempo para um sinal ir e voltar ao ponto de partida, quando o observador está junto ao ponto de partida
  - a distância de uma estrela à Terra, medida por um observador na Terra;

$\Delta t_0, L_0$



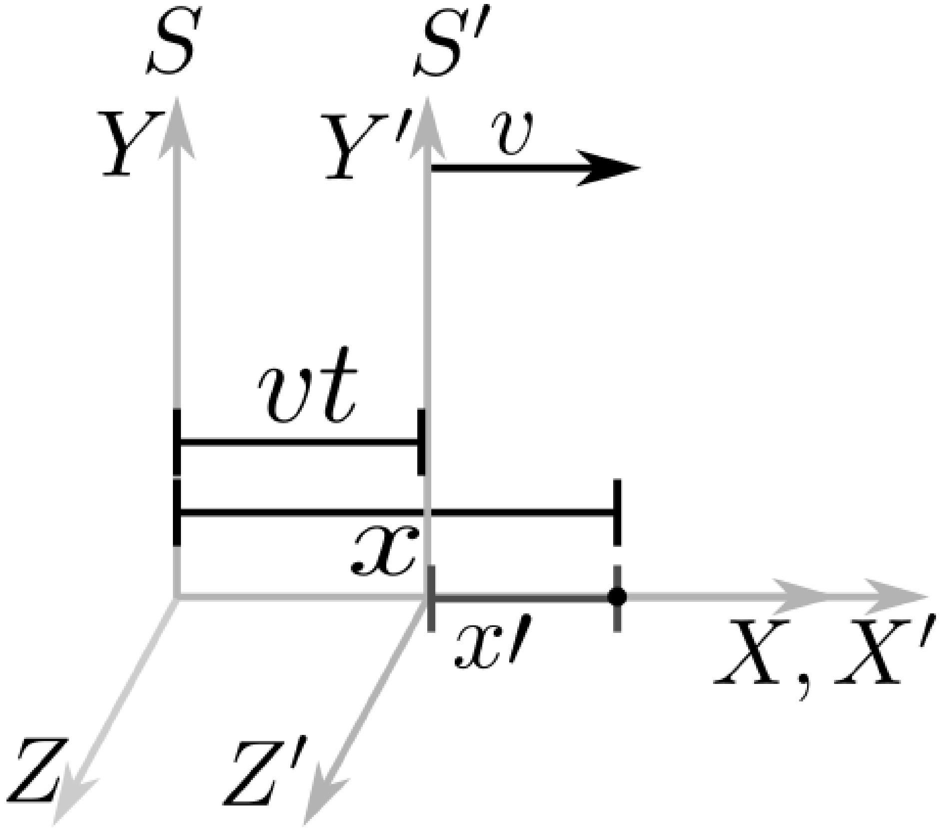
medidos nas mesmas coordenadas espaciais (mesmo referencial que o observador)



$\Delta t, L$

Medidas realizadas por um observador de um fenômeno que ocorre em um referencial que se move com velocidade v em relação observador

Transformada de Galileu



$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

...Transformação de Lorentz

Na Mecânica Clássica (não relativística), a transformada de Galileu é responsável por transladar informações entre referenciais inerciais, porém ela não respeita a constância da velocidade da luz e usa um conceito absoluto de simultaneidade de eventos (o espaço-tempo é imutável).

Era portanto, necessário obter um novo conjunto de transformadas que substituísse as de Galileu e que obedecesse aos postulados da Relatividade.

A transformação (x,y,z,t) → (x',y',z',t') tinha de satisfazer as seguintes condições:

I. Um MRU em relação a (S) também deve ser MRU em (S').

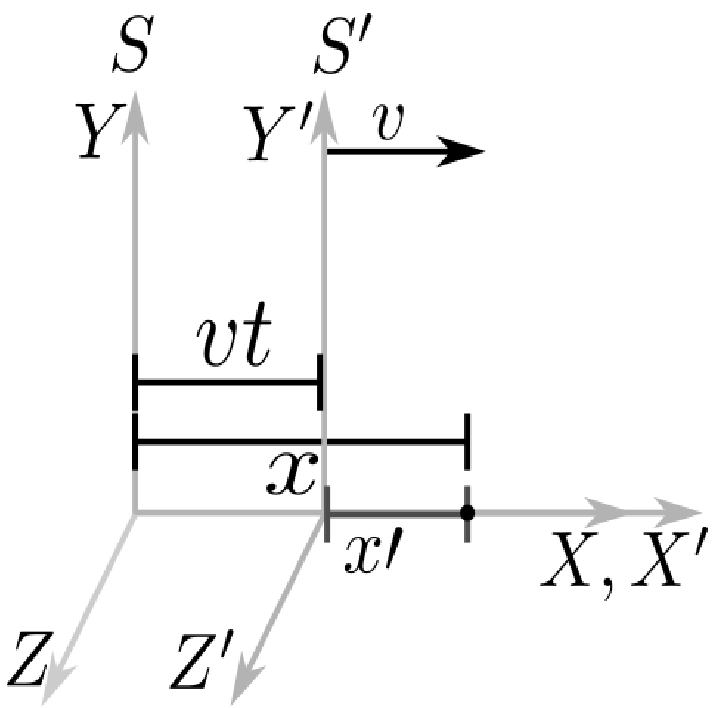
II. Para V= 0 (V é a velocidade de S' em relação a S), a transformação deve reduzir-se à identidade.

III. Se um sinal luminoso é enviado de O=O' em t= t' =0, a sua frente de onda deve propagar-se com velocidade c em ambos os referenciais de modo que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

E essa é uma transformação necessariamente linear.

Transformada de Lorentz



- Pela contração do espaço

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \Longrightarrow L_0 = \gamma L$$

onde L_0 é o comprimento próprio, medido no referencial que se move com velocidade v, ou seja L_0 é a coordenada do ponto medido no referential S', logo, a coordenada do ponto que está no referencial S' visto por um observador no referencial S é:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

E a transformada do tempo?

Transformada de Lorentz – o tempo

- Seja um raio de luz emitido por uma fonte na origem do sistema no momento

$$t = t' = 0$$

- A distância percorrida em cada sistema será:

$$S \rightarrow x = ct \qquad S' \rightarrow x' = ct'$$

- Utilizando a transformada da coordenada x:

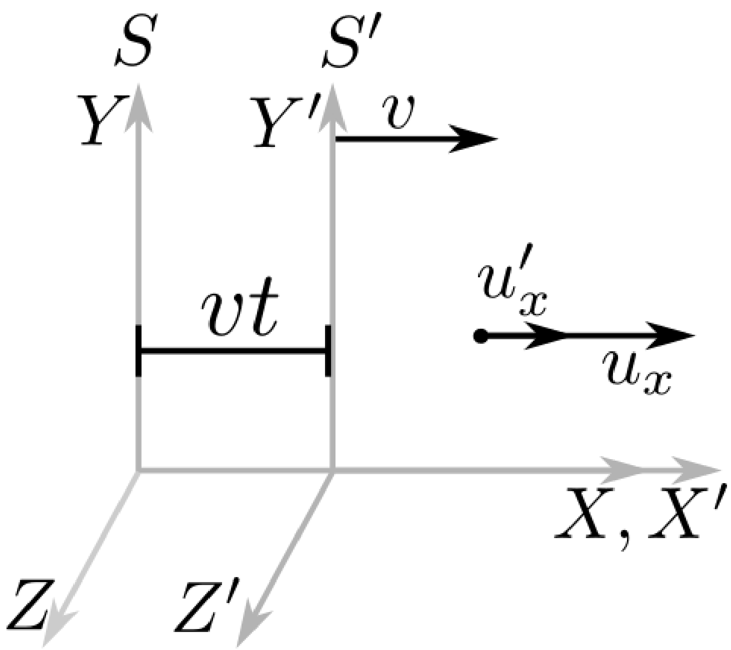
$$x' = \gamma(x - vt) \rightarrow ct' = \gamma(ct - vt)$$

$$t' = \gamma\frac{(c-v)t}{c} \leftarrow t = x/c$$

$$t' = \gamma\frac{(c-v)}{c}\frac{x}{c} \rightarrow t' = \gamma\left(\frac{x}{c} - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}$$

Adição de velocidades



Da transformada da posição, derivando-a:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)$$

A velocidade no referencial S':

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} \leftarrow \frac{1/dt}{1/dt}$$

$$u'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \rightarrow u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

A velocidade do referencial S:

$$\begin{matrix} v \rightarrow -v \\ u'_x \rightarrow u_x \end{matrix} \Longrightarrow u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Adição de velocidades

Já sabemos que no nosso cotidiano, quando tratamos de movimentos uniformes, podemos adicionar as velocidades v_1 e v_2, pela fórumla simples,

$$V = v_1 + v_2$$

Se as velocidades v_1 e v_2 são muito grandes, (velocidades relativísiticas), a adição obedece a fórmula:

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Quando v_1 e v_2 são muito menores que a velocidade da luz, o numerador se reduz a 1 e a soma se reduz ao caso das velocidades ordinárias.

$$V = v_1 + v_2$$

Exemplo: Considere uma nave que se move com velocidade $v_1 = 0,5c$ em relação a um sistema de referência na Terra e dispara um foguete com velocidade $v_2 = 0,5c$, em relação à nave e na mesma direção e sentido dela.

Desconsiderando que as velocidades são da ordem relativística, um observador que se encontra na Terra, a velocidade do foguete segundo,

$$V = 0,5\,c + 0,5\,c = c$$

Considerando que as velocidades são relativísticas,

$$V = \frac{0{,}5\,c + 0{,}5\,c}{1 + \dfrac{0{,}5\,c\,.\,0{,}5\,c}{c^2}} = \frac{c}{1 + \dfrac{0{,}25\,c^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{1{,}25}$$

Supondo que em vez de um foguete seja disparado um feixe de luz nas mesmas condições anteriores com velocidade v2 = c, temos:

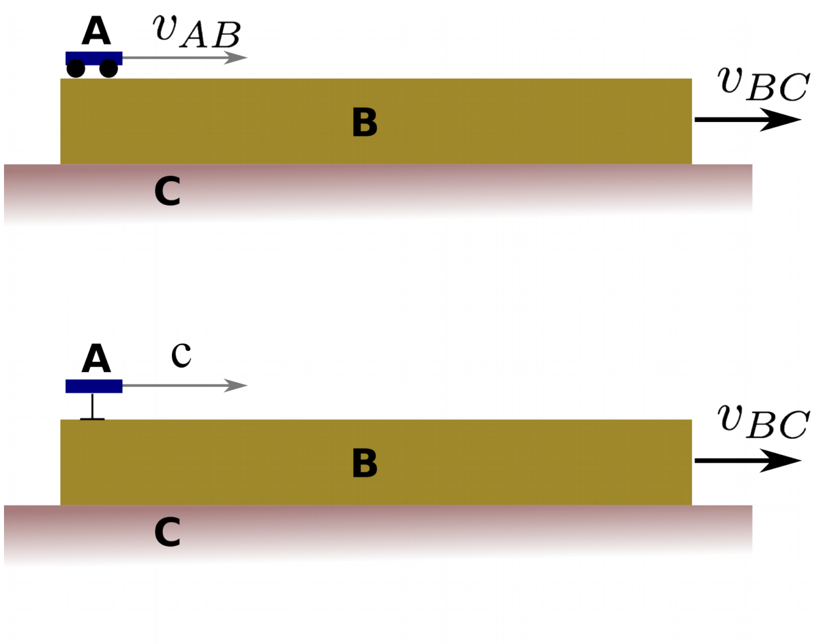
$$V = \frac{0{,}5\,c + c}{1 + \dfrac{0{,}5\,c^2}{c^2}} = \frac{c}{1 + \dfrac{0{,}5\,c^2}{c^2}} = \frac{1{,}5\,c}{1{,}5} = c$$

Observe que por esta fórmula de adição de velocidades, qualquer que seja a velocidade relativa entre dois sistemas de referência, a luz se propaga com velocidade constante c.

Resumindo:

Regra de Galileu:

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$$



Regra de soma de velocidade de Einstein:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{\left(1 + \frac{v_{AB} v_{BC}}{c^2}\right)}$$

Se $v_{AB} = c$ (segunda figura):

$$v_{AC} = \frac{c + v_{BC}}{\left(1 + \frac{c v_{BC}}{c^2}\right)} = \frac{c + v_{BC}}{1 + (v_{BC}/c)} = c$$

Questão:

Uma pessoa está de pé ao lado dos trilhos de uma estrada de ferro quando é surpreendida pela passagem de um trem relativístico. No interior de um dos vagões, um passageiro dispara um pulso de laser em direção à parte traseira do vagão:

(a) A velocidade do pulso medida pela pessoa que está do lado de fora do trem é maior, menor, ou igual à velocidade medida pelo passageiro?

(b) O tempo que o pulso leva para chegar à extremidade posterior do vagão, medido pelo passageiro, é o tempo próprio?

(c) A relação entre o tempo medido pelo passageiro e o tempo medido pela pessoa que está do lado de fora é dada por

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0?$$

Verificação

(a) lembrem-se do 2o. Postulado:

"A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor "c" em todas das direções e em todos os referenciais inerciais." **Portanto as velocidades são todas iguais**.

(b) Sim, pois os 2 eventos (a propagação do feixe de luz e a medida do tempo) acontecem nas mesmas coordenadas espaciais, portanto, o tempo medido pelo passageiro **dentro** do trem é o **tempo próprio.**

(c) Sim, pois o tempo próprio, medido pelo passageiro (Δt_0) é transformado para o referencial da pessoa na plataforma segundo a transformação de Lorentz dada.

Exercícios e Problemas

O tempo médio de vida de múons estacionários é de 2,2 μs. O tempo médio de vida dos múons de alta velocidade produzidos pelos raios cósmicos é de 16 μs no referencial da Terra. Determine a velocidade em relação à Terra dos múons produzidos pelos raios cósmicos.

Δt

Tempo próprio* Δt_0

* vida média de uma partícula é uma propriedade da mesma, é sempre medida em seu próprio referencial, portanto, vida média é sempre dado como o tempo próprio da mesma.

Solução:

Da transformação de Lorentz para o tempo:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \Longrightarrow \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Ou seja:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow v = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}$$

Então:

$$v = 2,998 \times 10^8 \sqrt{(1-\left(\frac{2,2}{16}\right)^2} \Rightarrow 2,9695 \times 10^8 m/s$$

- Bibliografia

- Hewitt P. G. Fundamentos de Física Conceitual, 2009, Porto Alegre, Editora Bookman.
- Landau L., Rumer Y., O que é a Teoria da Relatividade?, 2004, Editora Hemus.
- Fagundes, H.V., Teoria da Relatividade No nível matemático do ensino médio, 2009, Editora Livraria da Física.
- Sears & Zemansky, Física IV, 12ª edição, Editora Pearson (Capítulo 37 até seção 5)