Física Geral (2012/2)

Aula 9: Estimativas e erros em medidas indiretas: Ajuste de funções

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

UERJ

Medidas indiretas: Ajuste de funções

- Ajuste de funções

$$y = f\left(x; a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$$

Medidas de duas grandezas x e y:

$$\left\{\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \ldots, \left(x_N, y_N\right)\right\}$$

Estimativa dos parâmetros (a partir de uma relação funcional postulada)

Medidas indiretas: Ajuste de funções

- Ajuste de funções

$$y = f\left(x; a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$$

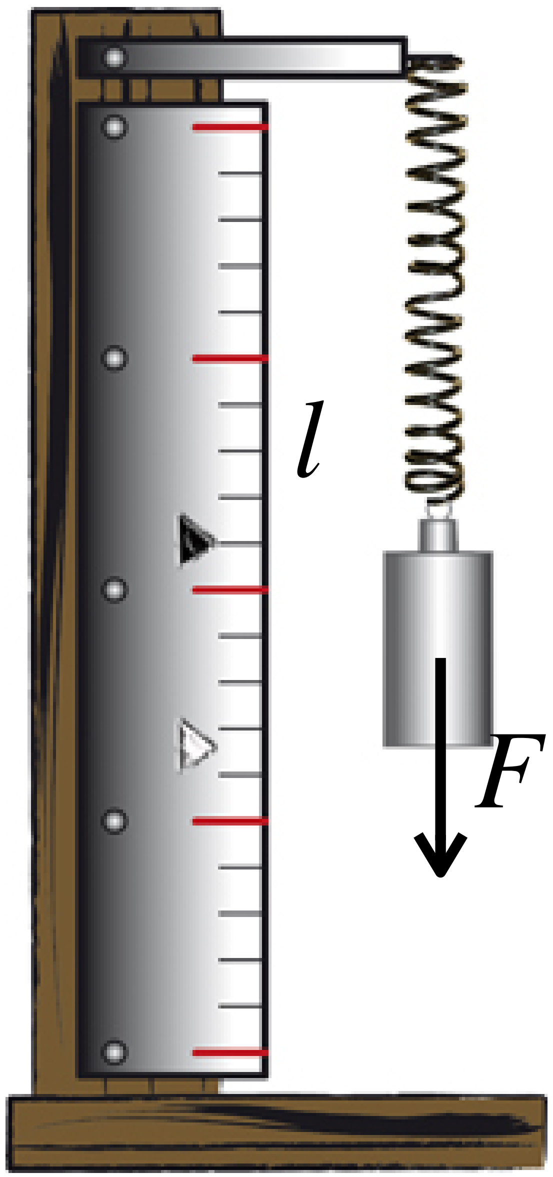
Medidas de duas grandezas x e y:

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$

Estimativa dos parâmetros
(a partir de uma relação
funcional postulada)

Queremos obter: $a_1 \pm \sigma_{a_1}, \ldots, a_p \pm \sigma_{a_p}$

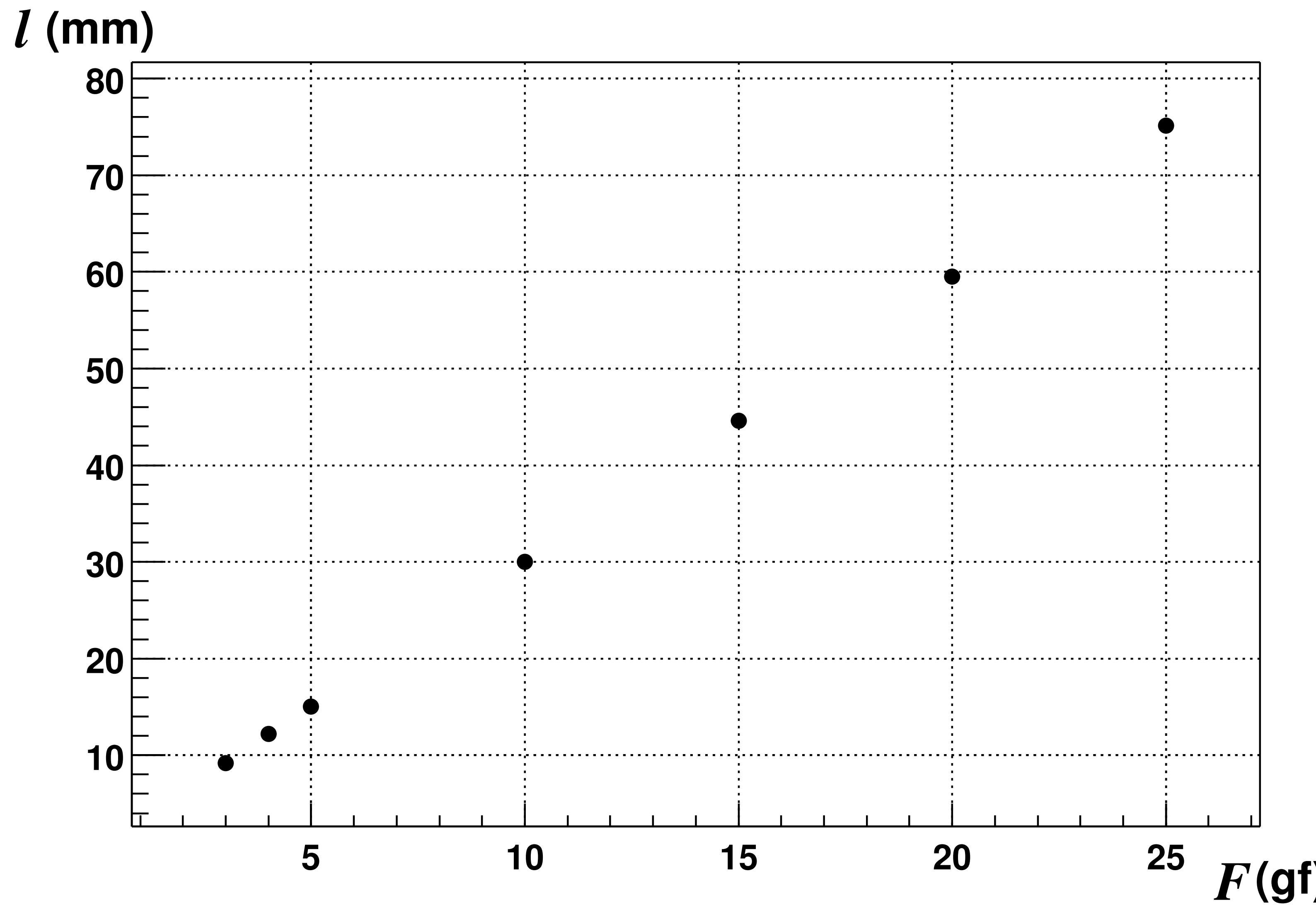
Exemplo: dinamômetro de mola



F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

Exemplo: dinamômetro de mola

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Exemplo: dinamômetro de mola

- O comportamento ideal de uma mola nos diz que a sua elongação é relacionada com a magnitude da força aplicada na mesma:

$$l = a \cdot F + b$$

Equação de uma reta

$$y = f\left(x; a, b\right) = a \cdot x + b$$

- Queremos obter estimativas para os parâmetros da reta (a,b). Para isso utilizamos um método chamado de "Método dos Mínimos Quadrados"

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

- Queremos minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre a medidas observadas e os valores previstos pela relação funcional entre y e x:

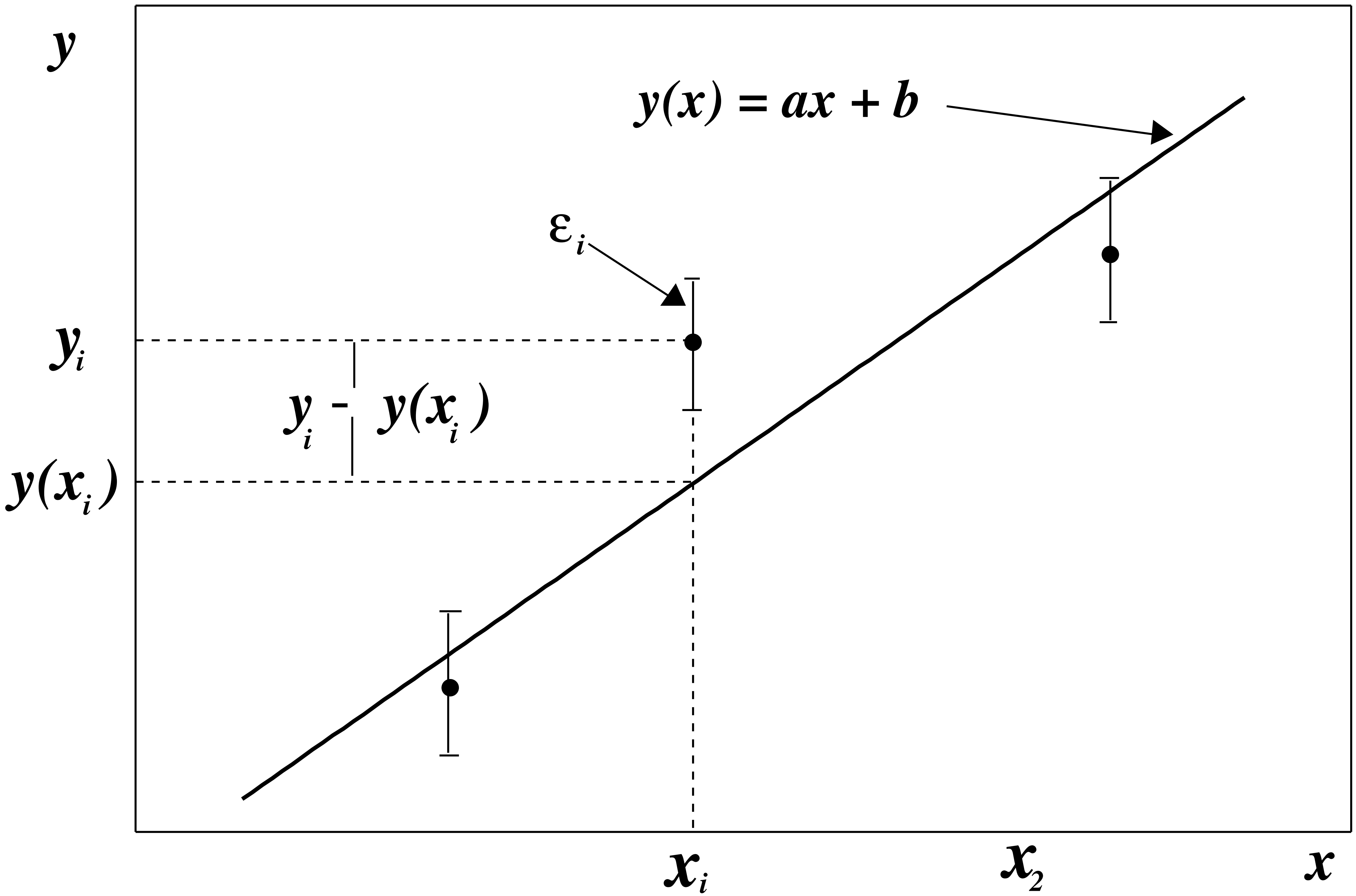
$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$$

Medida observada

$$y = f(x_i; a, b) = ax_i + b$$

Obs.: Quando a relação funcional postulada entre as medidas é linear (ou seja elas são relacionadas pela eq. de uma reta), chamamos o método de "Ajuste linear"

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear



Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

- No caso anterior assumimos que as incertezas nas medidas de y e x são constantes. Em geral devemos considerar o erro em cada medida (σ_i):

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Erro efetivo em cada medida

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

- Podemos mostrar (Exercício - Ver Apêndice F do livro texto) que as estimativas dos parâmetros e suas incertezas são dadas por:

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

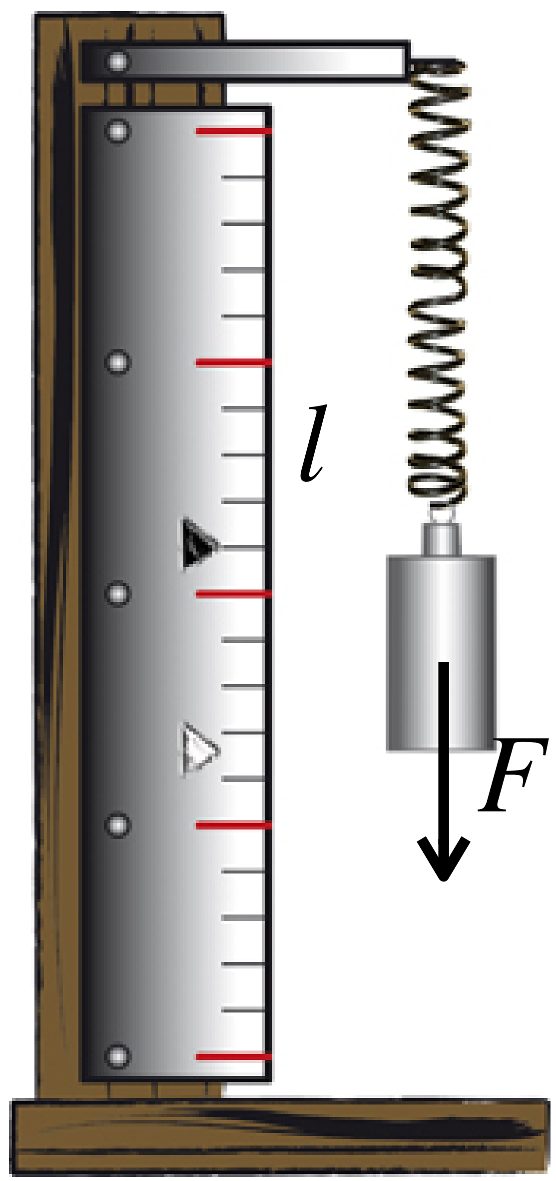
$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x}\frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2}{N-2}}$$

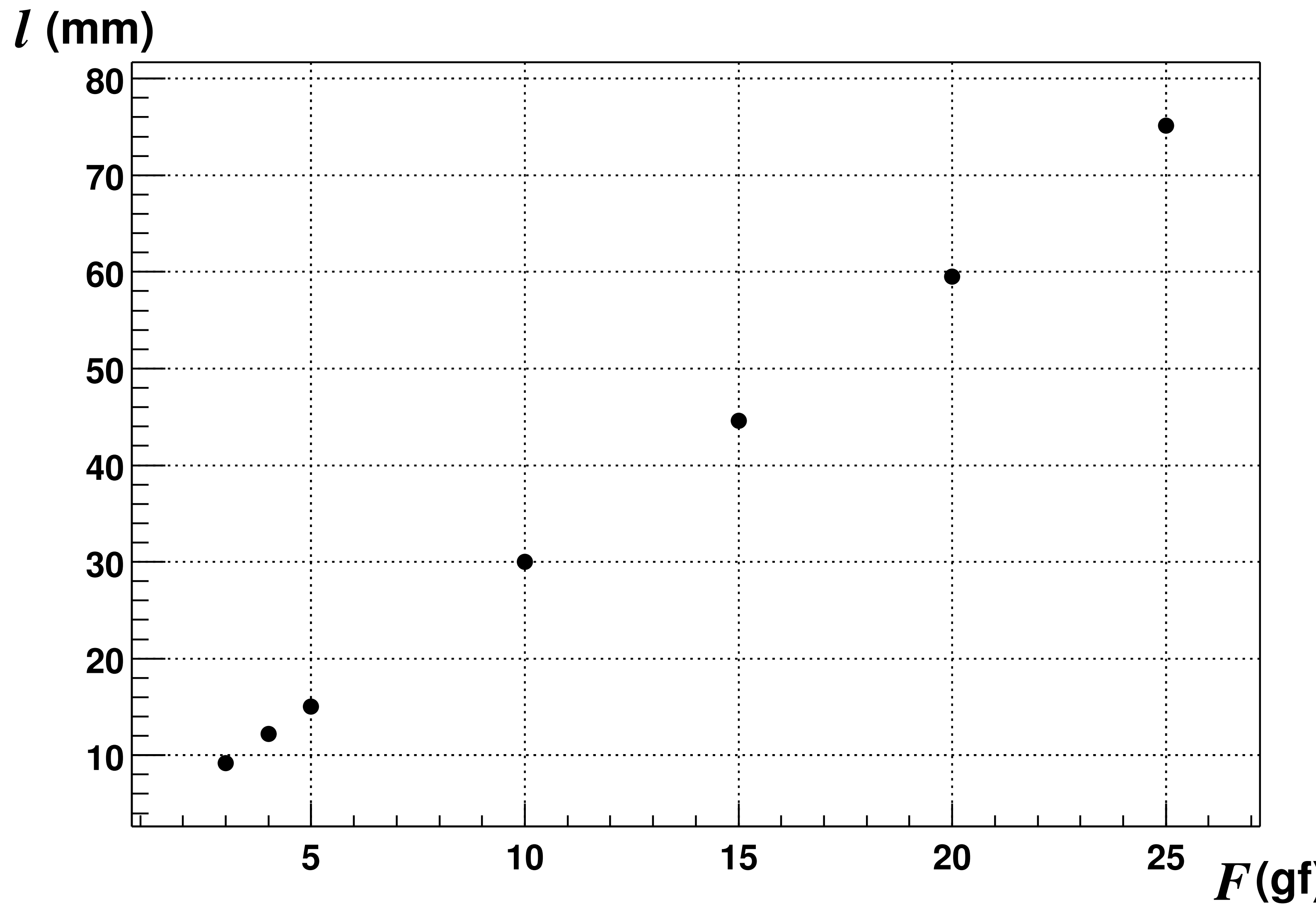
Exemplo: dinamômetro de mola



F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

Exemplo: dinamômetro de mola

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Exemplo: organizando os dados

x_i	y_i	x_i^2	$x_i.y_i$	$[y_i - (ax_i + b)]$	$[y_i - (ax_i + b)]^2$
3	9.2	9	27.6	0.1101	0.0121
4	12.2	16	48.8	0.1270	0.0161
5	15	25	75	-0.0561	0.0032
10	30	100	300	0.0282	0.0008
15	44.6	225	669	-0.2874	0.0826
20	59.5	400	1190	-0.3031	0.0918
25	75.1	625	1877.5	0.3813	0.1454
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i.y_i$		$\Sigma[y_i - (ax_i + b)]^2$
82	245.6	1400	4187.9		0.3520
$(\Sigma x_i)/N$	$(\Sigma y_i)/N$	$(\Sigma x_i^2)/N$	$(\Sigma x_i.y_i)/N$		
11.7143	35.0857	200.0000	598.2714		
σ_{xy}	σ_x^2				ε_y
187.2673	62.7755				0.2653

a	b	σ_a	σ_b
2.9831	0.1405	0.0127	0.1790

Exemplo: resultados

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

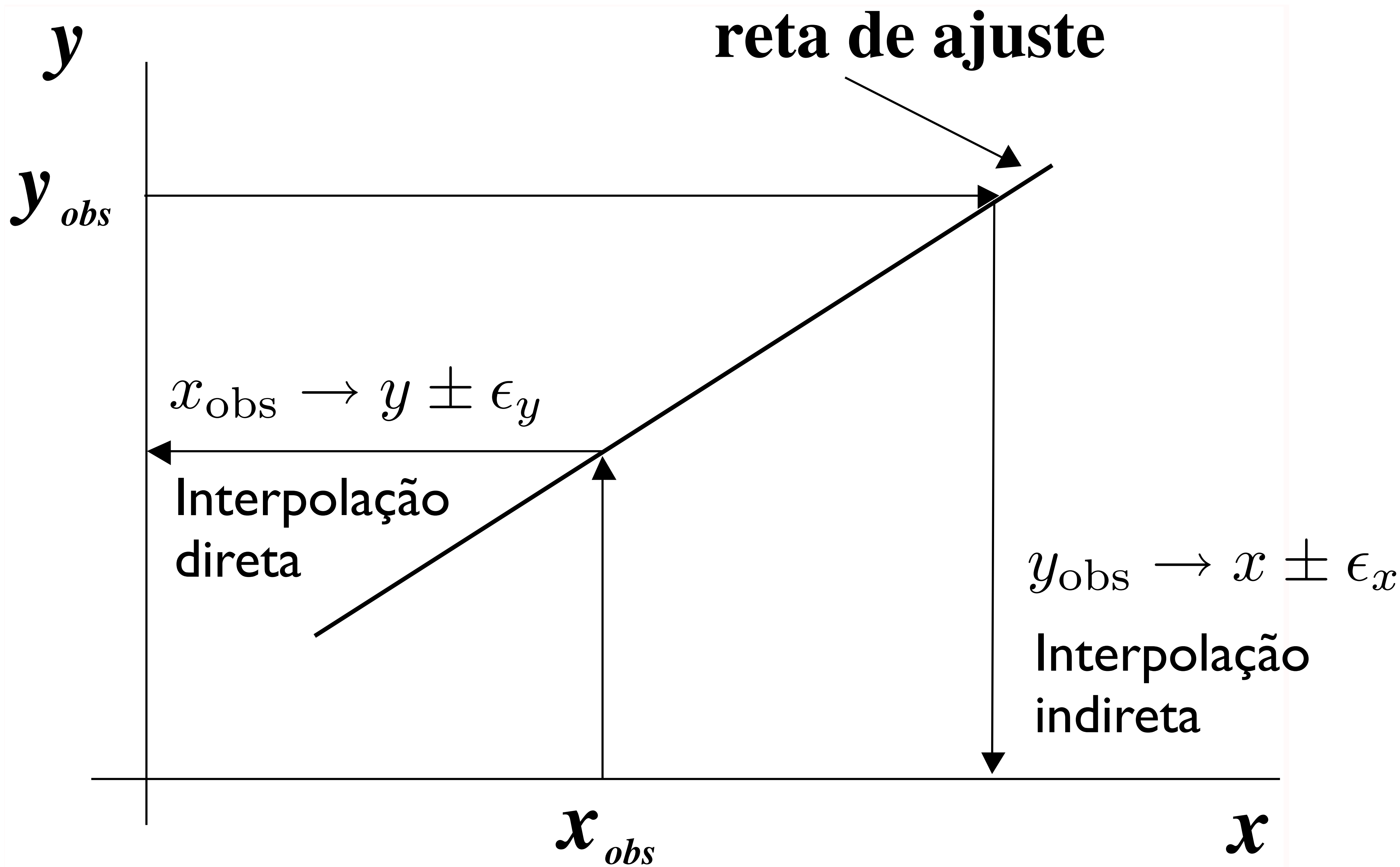
$$a = (2.983 \pm 0.013)\ \mathrm{mm/gf}$$

$$b = (0.14 \pm 0.18)\ \mathrm{mm}$$

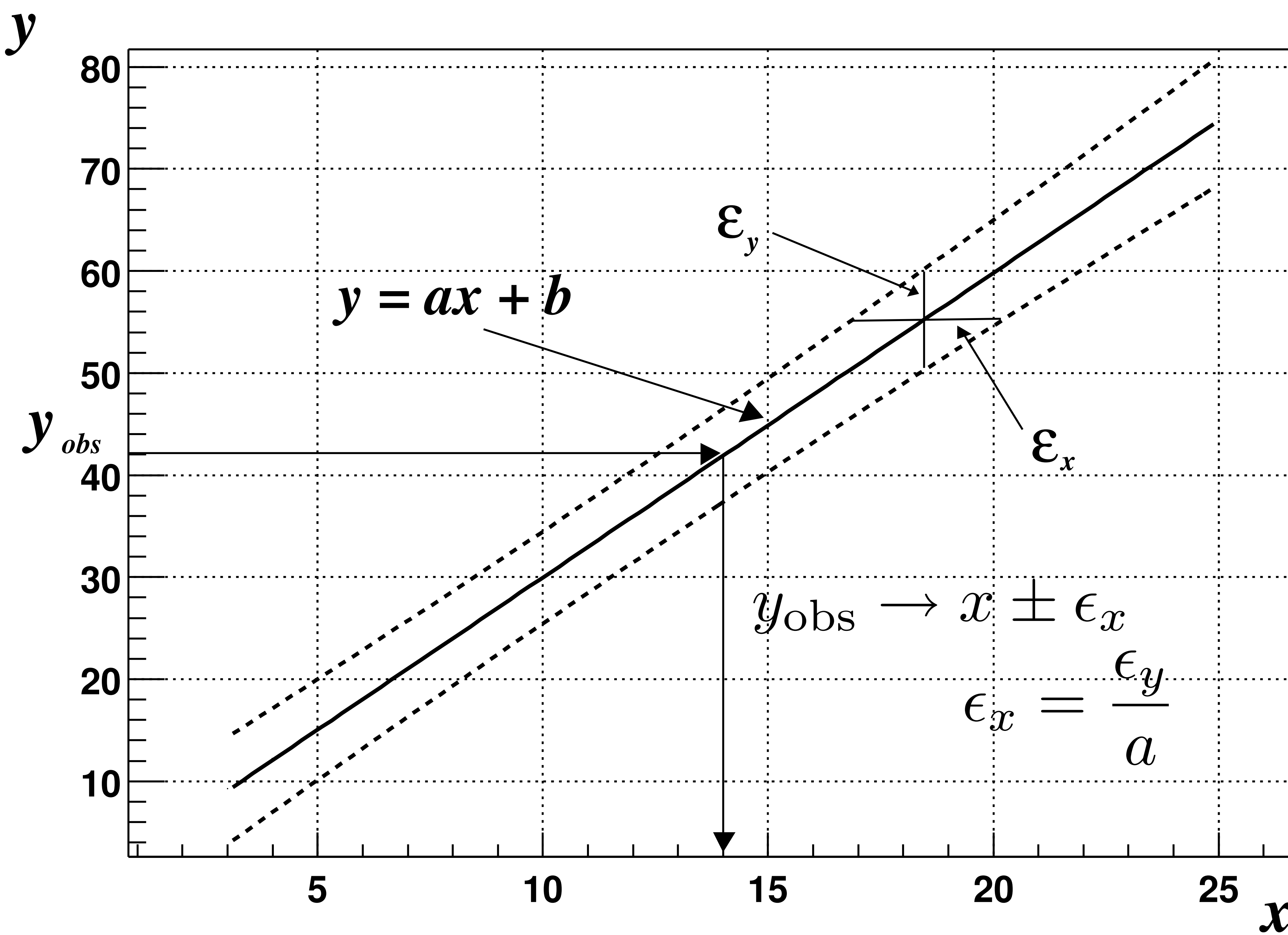
Equação da reta:

$$l\ (\mathrm{mm}) = 2.983 \cdot F\ (\mathrm{gf}) + 0.14$$

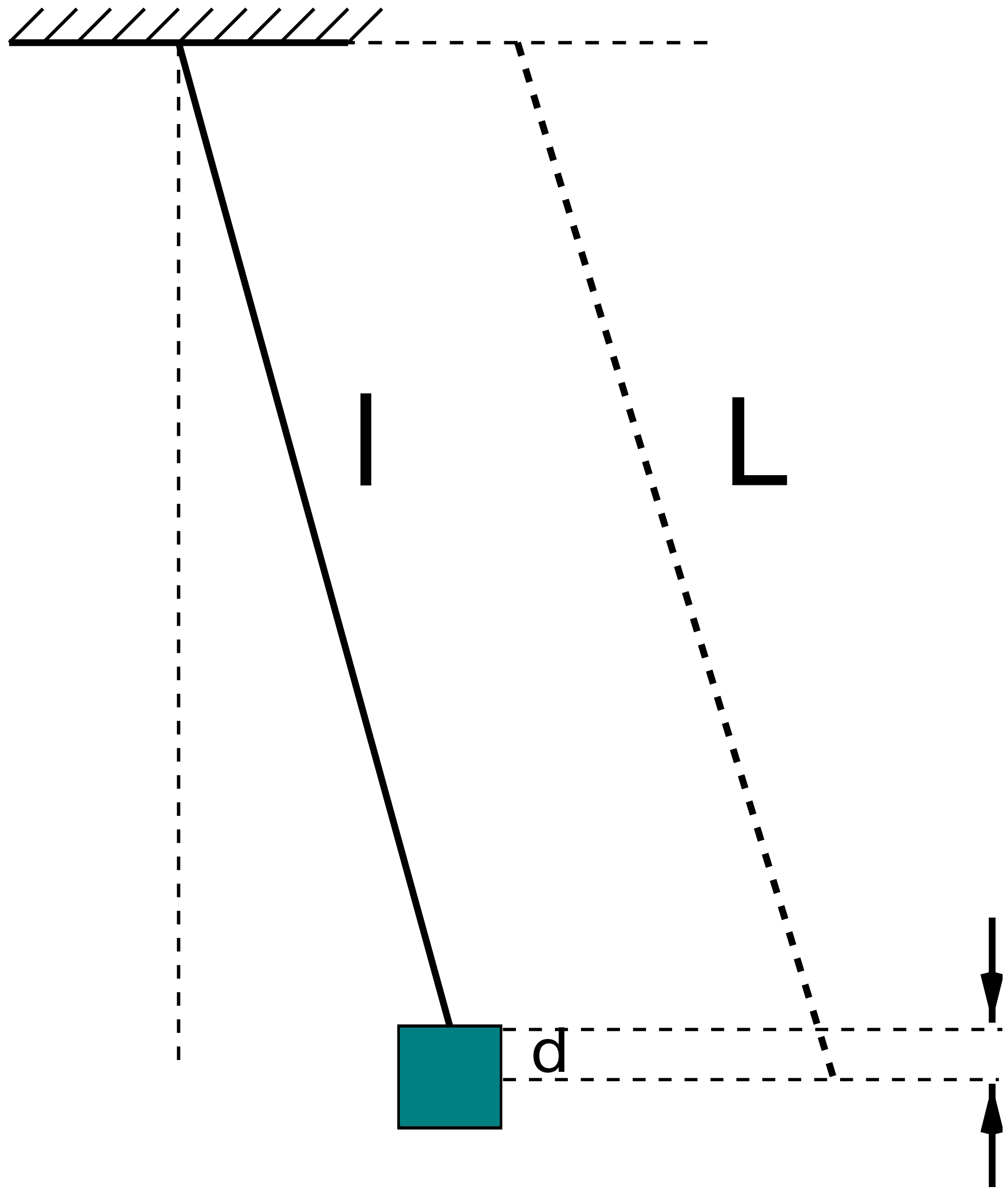
Reta de calibração e interpolação



Faixa de confiança



Atividade de aula (Roteiro)

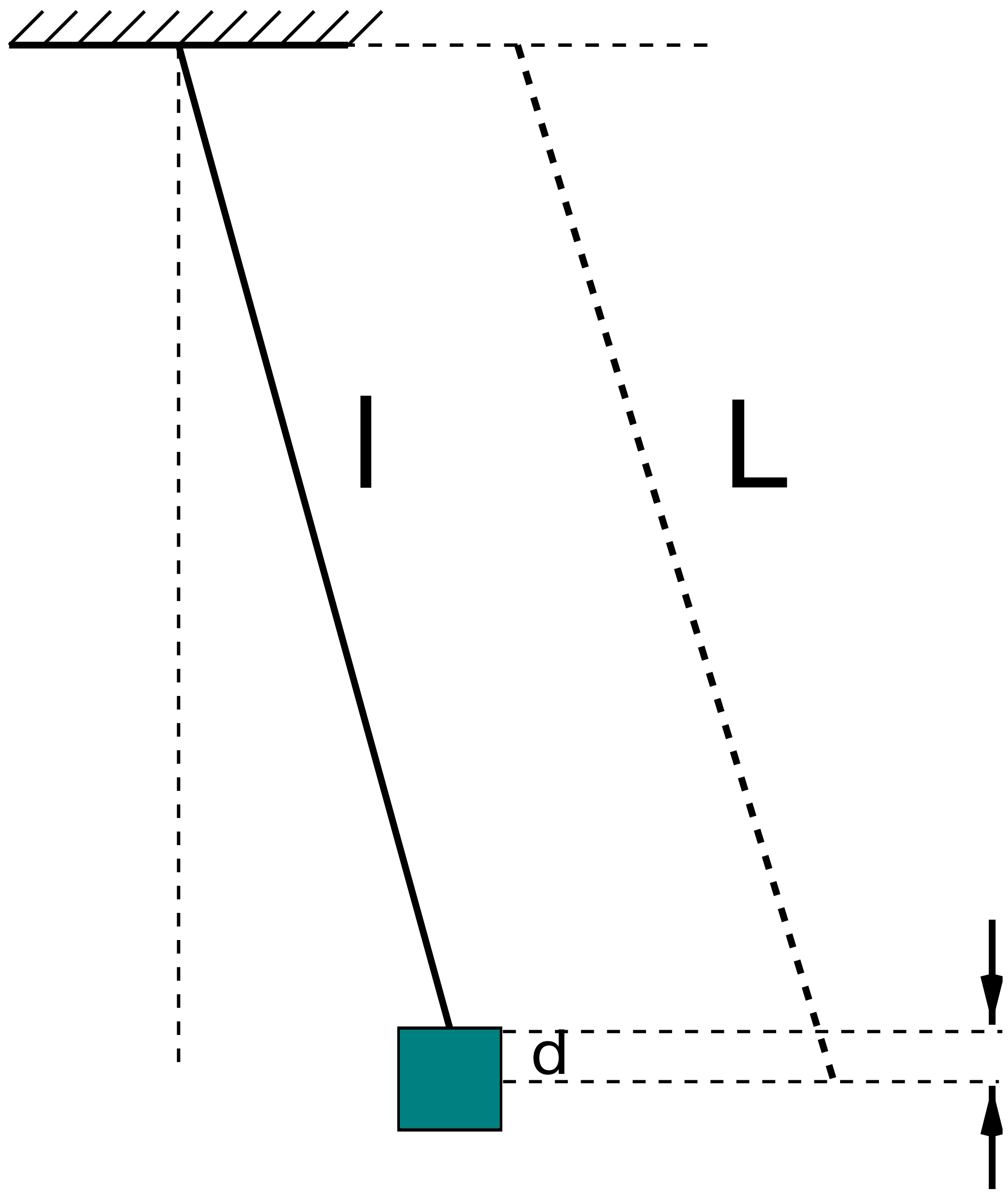


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = g\frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$L = l + d$$

$$l = g\frac{T^2}{4\pi^2} - d$$

Atividade de aula (Roteiro)



$$l = g\frac{T^2}{4\pi^2} - d$$

$$\rightarrow y = ax + b$$

$$y = l$$

$$x = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$a = g$$

$$b = -d$$

Atividade de aula (Roteiro)

y $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ x

	l (cm)	t (s)	$T = (t/20)$ (s)	$T^2/4\pi^2$ (s)
Medida 1				
Medida 2				
Medida 3				
Medida 4				
Medida 5				

i) Estimar o valor da aceleração da gravidade:

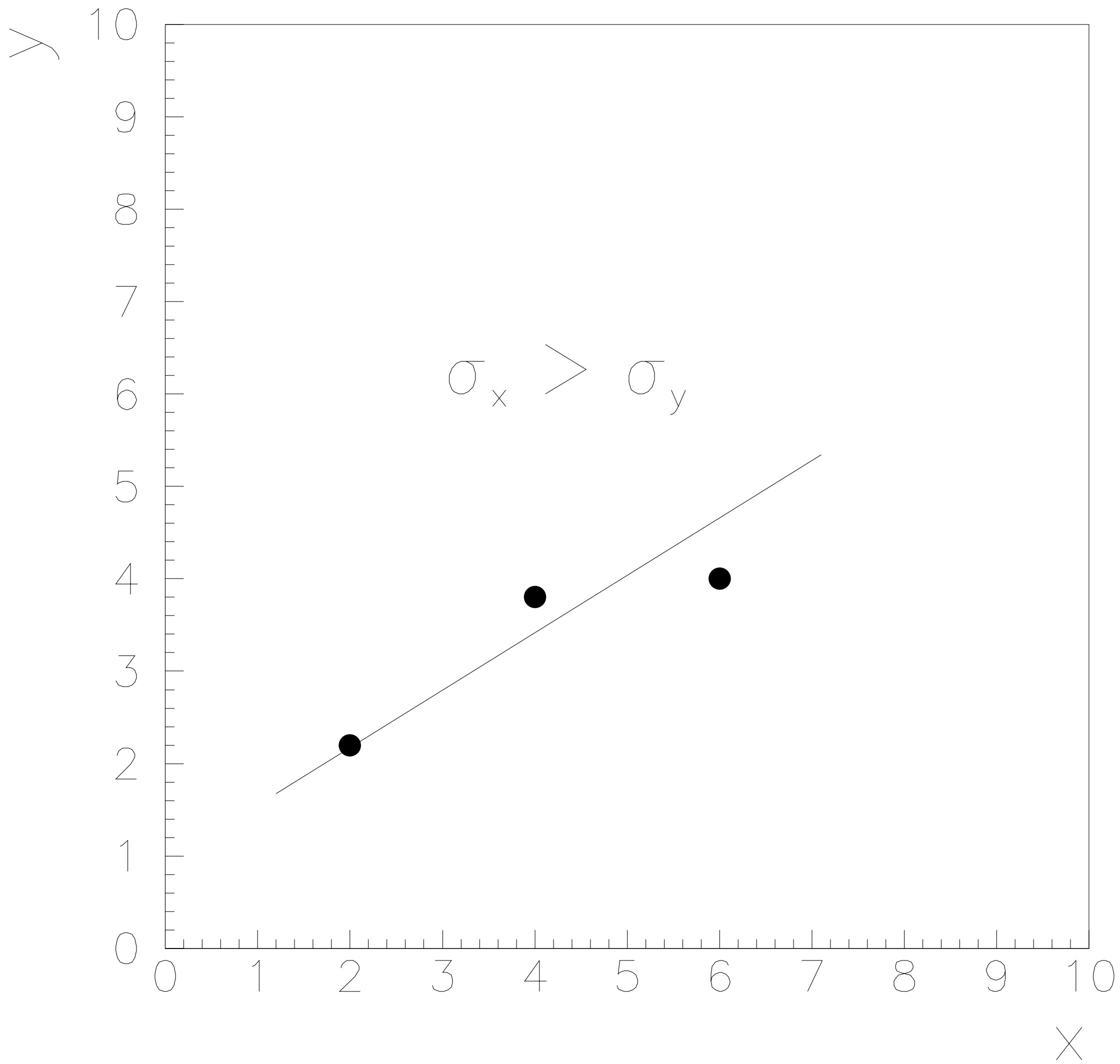
$$g \pm \sigma_g$$

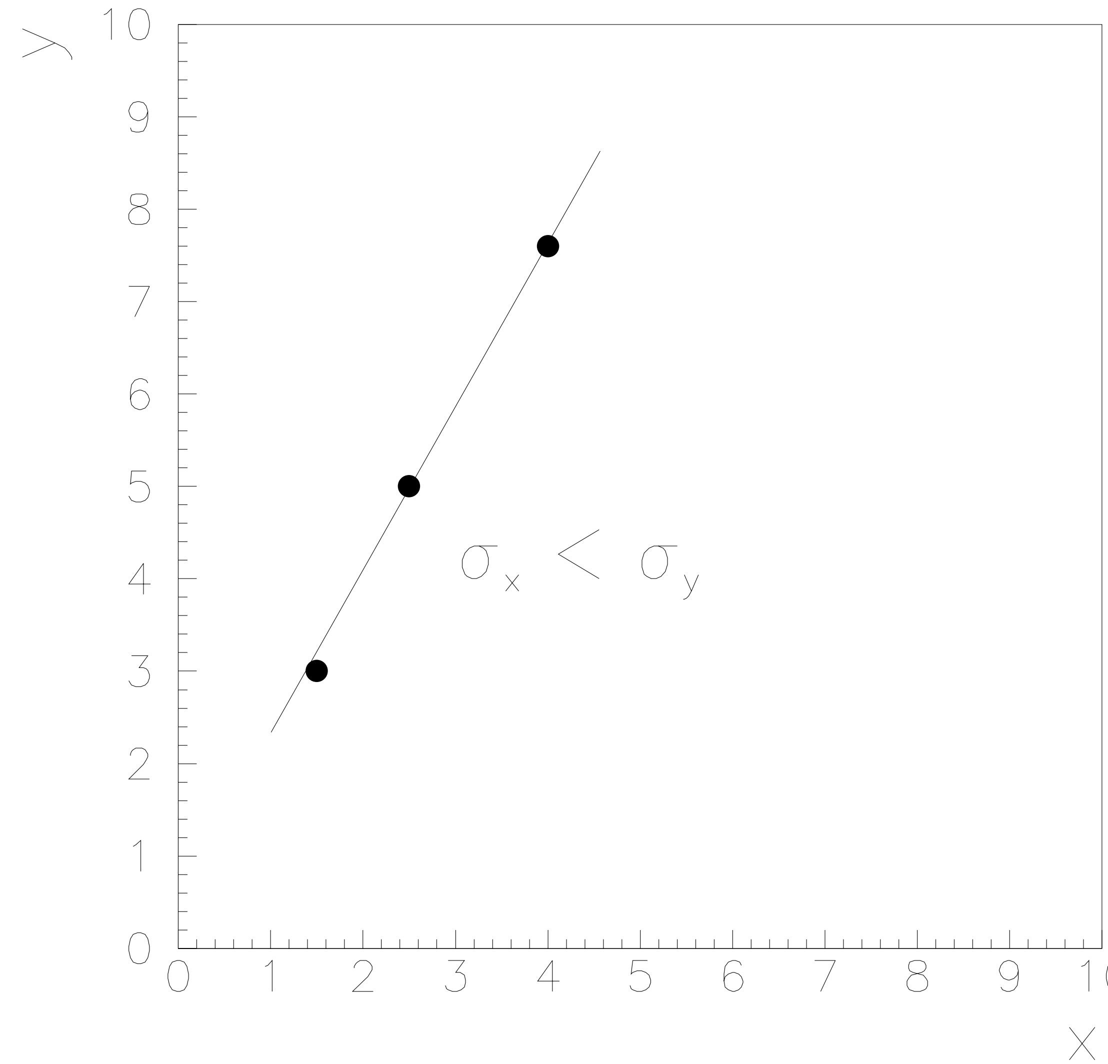
ii) Analisar a compatibilidade com o valor de referência:

$$g_{ref} = 9.78789849(14)\ \mathrm{m/s^2}$$

Extras

Ajuste linear





Ajuste linear