

# Física Geral (2013/1)

Aula 5: Compatibilidade e combinação de resultados



# Estimativa do valor esperado

*estimativa do valor esperado  $\pm$  erro (unidade)*

$\bar{x}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Estimativa do erro de cada medida



$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Estimativa do erro da média



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

# Compatibilidade com um valor de referência

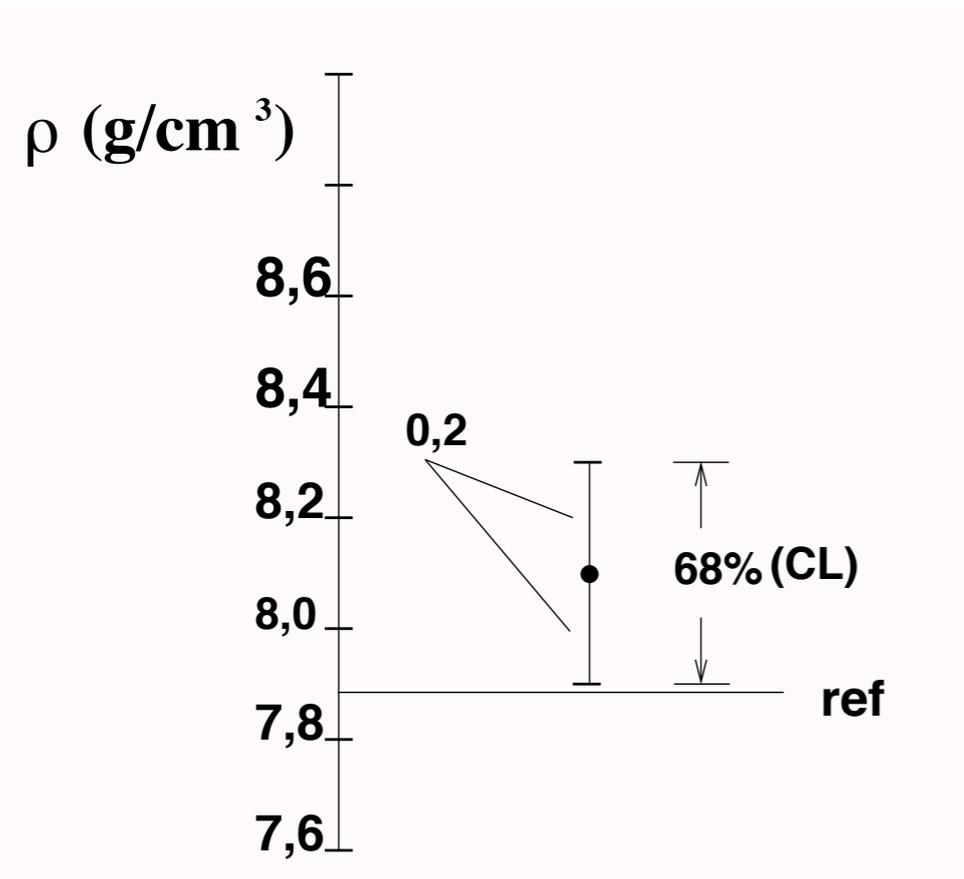
Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência  $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

# Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência  $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

Resultado Exp. I:

$$\rho_I = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

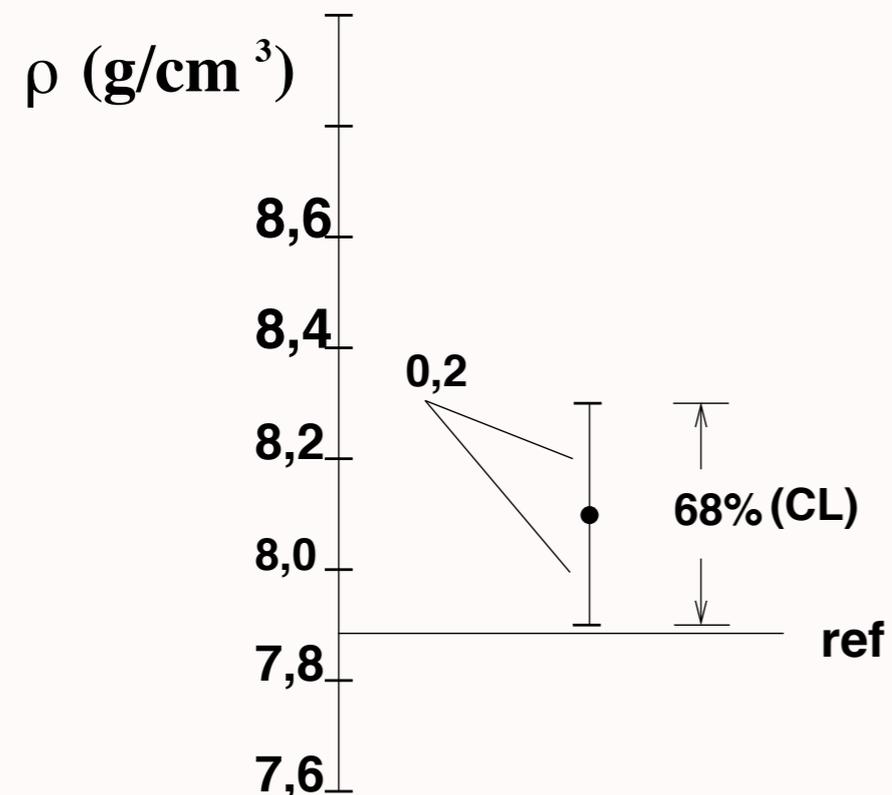


# Compatibilidade com um valor de referência

Exemplo: Suponha que estamos medindo a densidade do ferro, com valor de referência  $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$

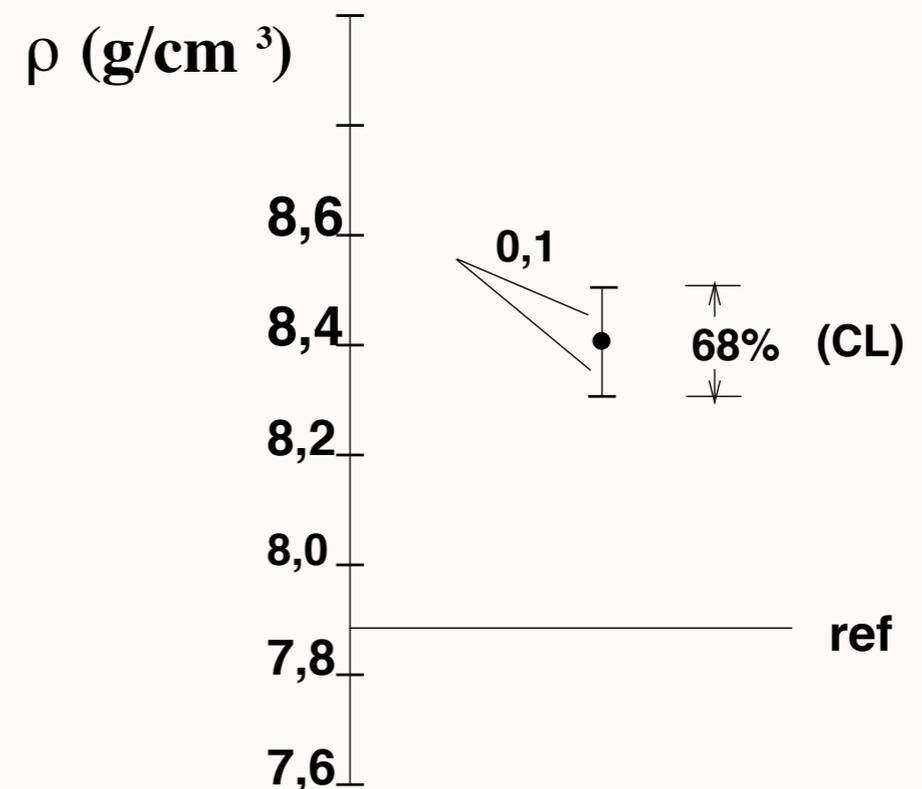
Resultado Exp. 1:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

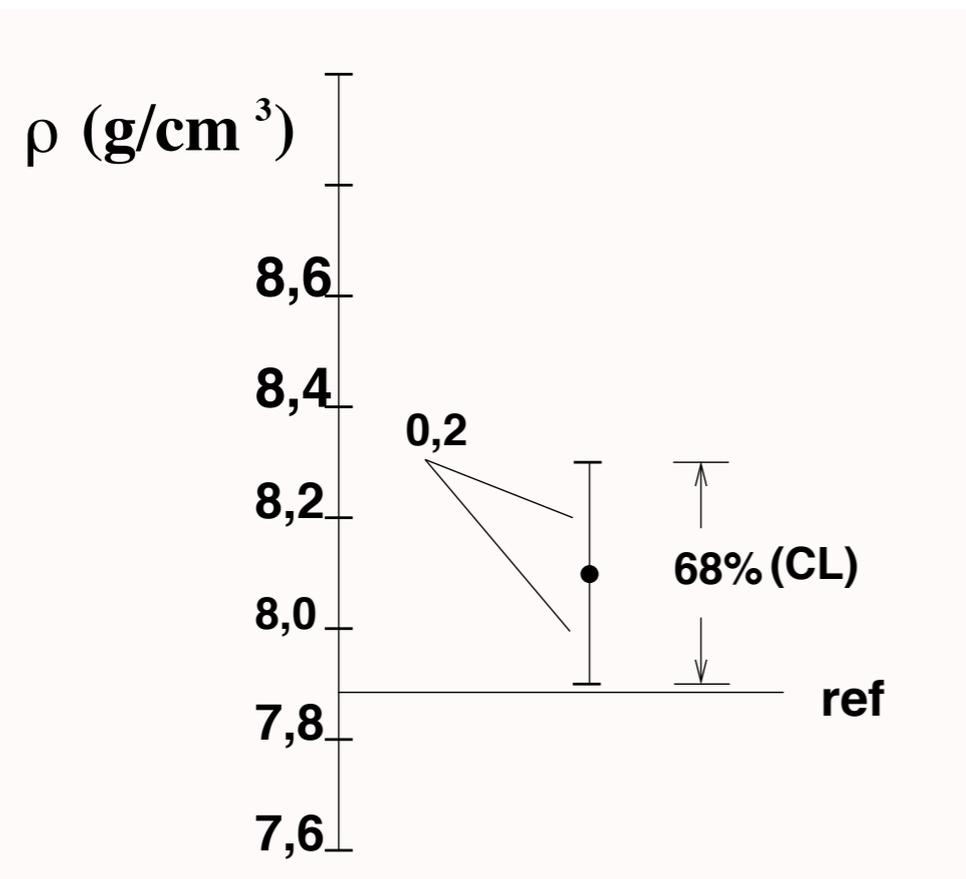


# Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



# Compatibilidade com um valor de referência

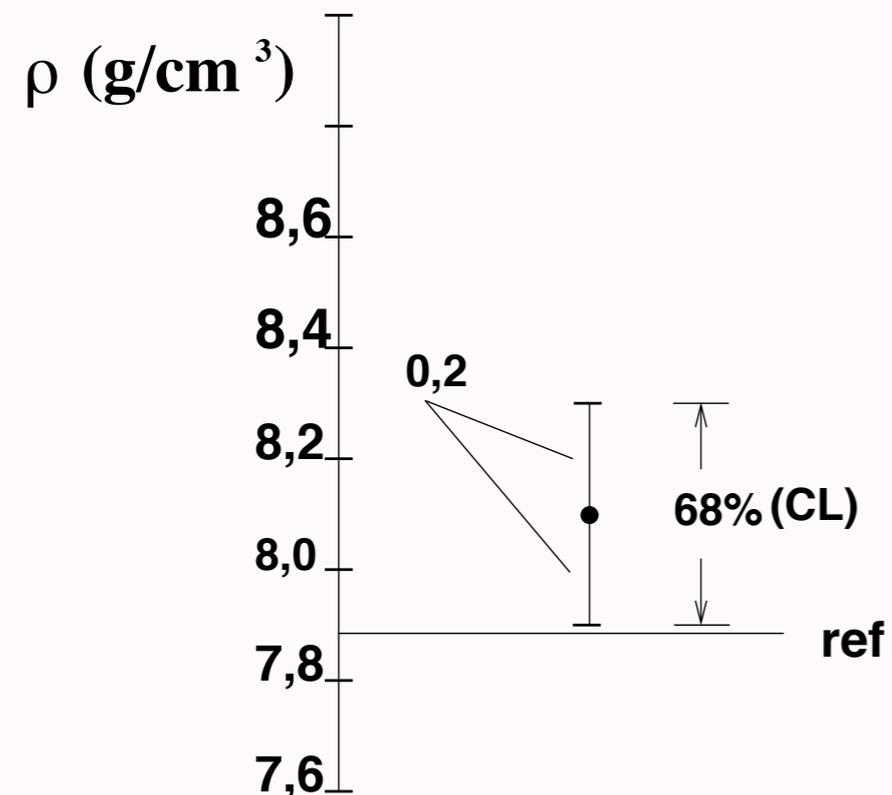
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



# Compatibilidade com um valor de referência

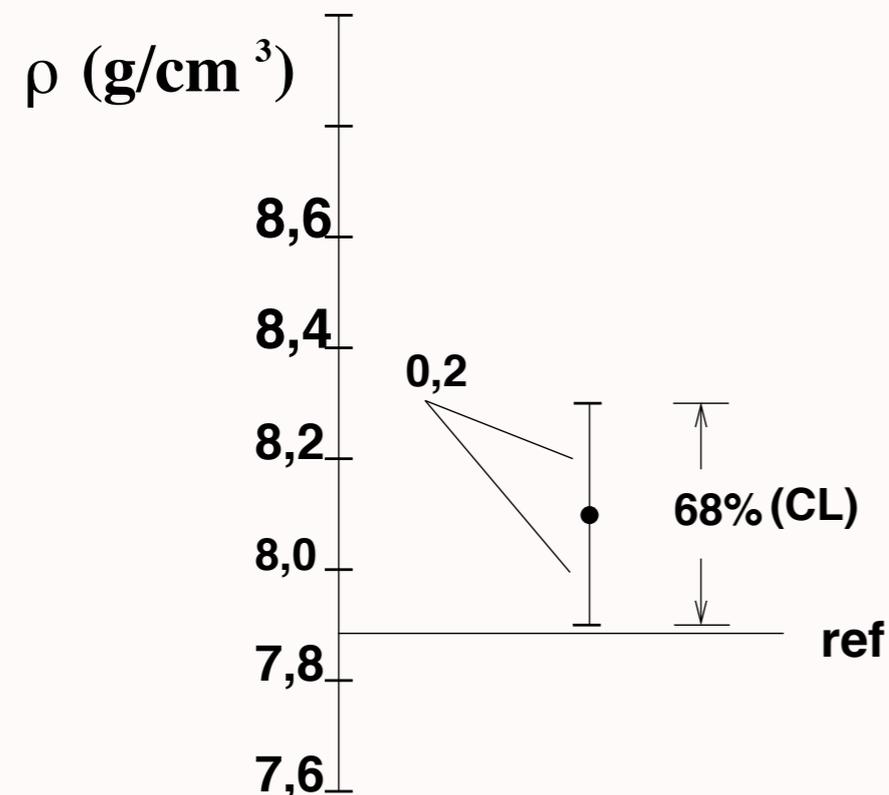
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. I:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$



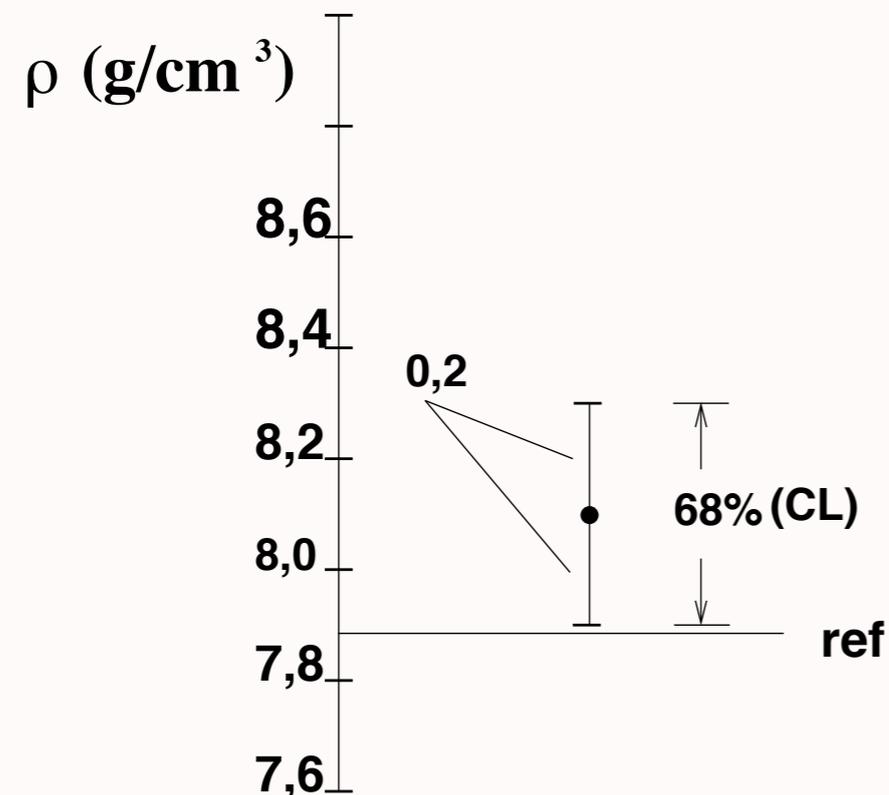
Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas  $\sim 68\%$  de que o intervalo contenha o valor esperado

# Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 1:

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$



*Discrepância*

$$|\rho_1 - \rho_{\text{ref}}| = |8,1 - 7,86| = 0,24 \sim 1\sigma$$

Note que, segundo a Lei dos erros, há uma expectativa de apenas  $\sim 68\%$  de que o intervalo contenha o valor esperado

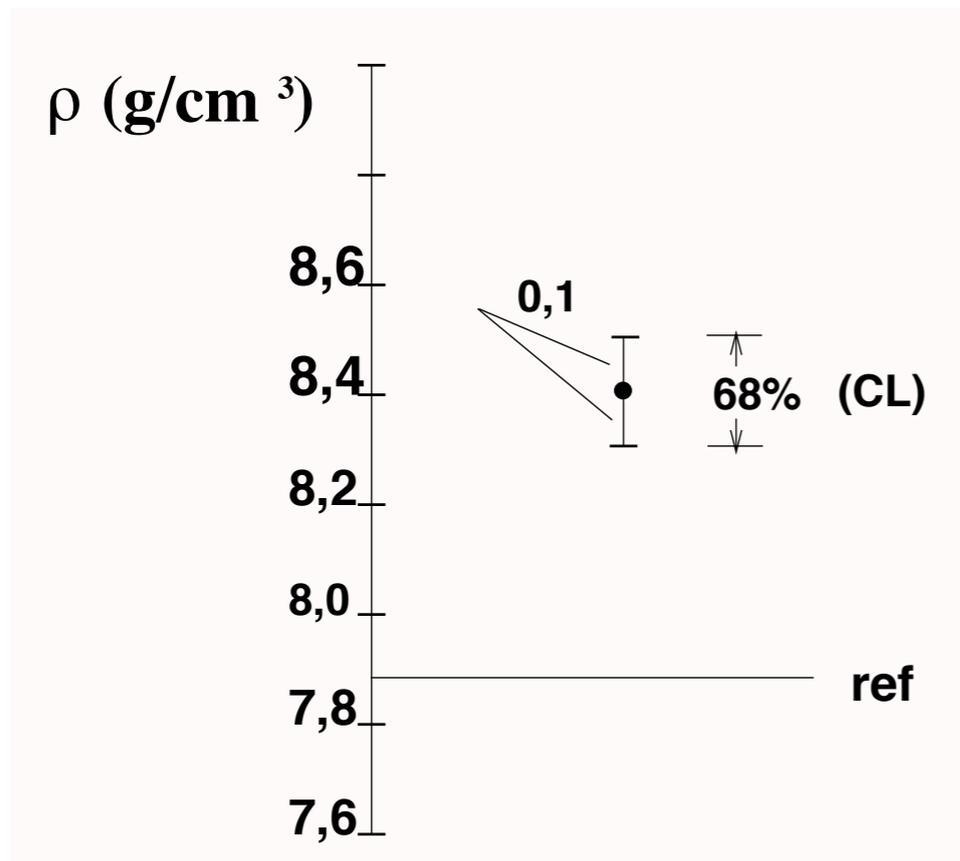
A discrepância não é estatisticamente significativa

# Compatibilidade com um valor de referência

Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



# Compatibilidade com um valor de referência

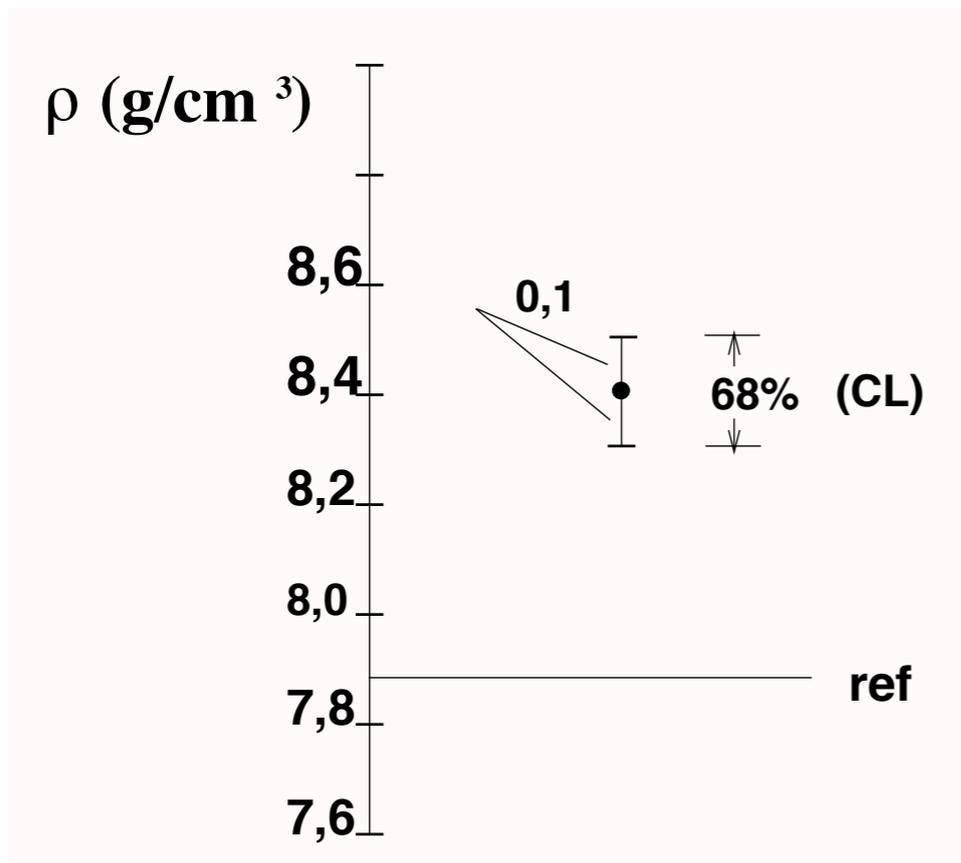
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$





# Compatibilidade com um valor de referência

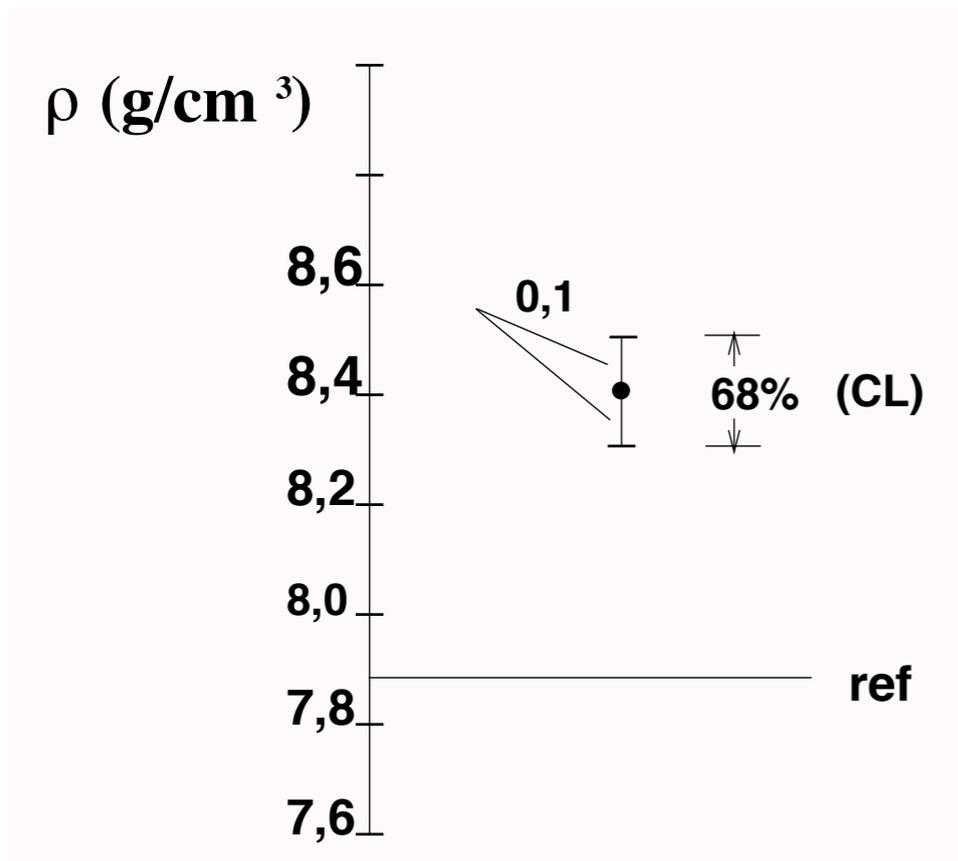
Os resultados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são compatíveis com o valor de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) ?

Resultado Exp. 2:

$$\rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

*Discrepância*

$$|\rho_2 - \rho_{\text{ref}}| = |8,4 - 7,86| = 0,54 > 3\sigma$$



Uma discrepância de valor maior que 3 erros padrão é muito pouco provável ( $< 1\%$ ) e podemos dizer que o resultado é incompatível com o valor de referência

A discrepância é *significativa*

# Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

# Compatibilidade com um valor de referência

A compatibilidade ou incompatibilidade de um resultado com um valor de referência depende portanto do nível de confiança associado. Por exemplo, dizemos que o resultado é incompatível quando a expectativa de se obter uma determinada discrepância é menor que 5%, 1% ou 0,1%?

Regra prática: Vamos considerar um resultado compatível com um valor de referência quando a discrepância for menor que dois erros padrão. Se a discrepância for maior que três erros padrão ela é significativa e os resultados incompatíveis:

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 2\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Compatíveis}$$

$$|\bar{x} - x_{\text{ref}}| > 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Incompatíveis}$$

$$2\sigma_{\bar{x}} < |\bar{x} - x_{\text{ref}}| < 3\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow \text{Inconclusivo}$$

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_2 = (1,75 \pm 0,07) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_3 = (1,62 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron:  $1,60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_2 = (1,75 \pm 0,07) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_3 = (1,62 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron:  $1,60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ C}$

i) Discrepância para  $e_1$ :  $|1,72 - 1,60217733| \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0,12 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$\rightarrow |e_1 - e_{\text{ref}}| \sim 3\sigma \quad (\sigma = 0,04 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_2 = (1,75 \pm 0,07) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_3 = (1,62 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron:  $1,60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ C}$

i) Discrepância para  $e_1$ :  $|1,72 - 1,60217733| \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0,12 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$\rightarrow |e_1 - e_{\text{ref}}| \sim 3\sigma \quad (\sigma = 0,04 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

ii) Discrepância para  $e_2$ :  $|1,75 - 1,60217733| \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0,15 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$\rightarrow 2\sigma < |e_2 - e_{\text{ref}}| < 3\sigma \quad (\sigma = 0,07 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

Exercício (3.7.5): A partir de três medidas da carga do elétron, com nível de confiança de 68%:

$$e_1 = (1,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_2 = (1,75 \pm 0,07) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_3 = (1,62 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Determine se cada uma das medidas é compatível com o valor de referência para a carga do elétron:  $1,60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ C}$

i) Discrepância para  $e_1$ :  $|1,72 - 1,60217733| \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0,12 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$\rightarrow |e_1 - e_{\text{ref}}| \sim 3\sigma \quad (\sigma = 0,04 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

ii) Discrepância para  $e_2$ :  $|1,75 - 1,60217733| \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0,15 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$\rightarrow 2\sigma < |e_2 - e_{\text{ref}}| < 3\sigma \quad (\sigma = 0,07 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

iii) Discrepância para  $e_3$ :  $|1,62 - 1,60217733| \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0,02 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$\rightarrow |e_3 - e_{\text{ref}}| < 1\sigma \quad (\sigma = 0,03 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9\} \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

- a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido
- b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de  $1,8524(4) \text{ g/cm}^3$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9\} \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

- a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido
- b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de  $1,8524(4) \text{ g/cm}^3$

a) Estimativa para o valor esperado:

→ Média: 1,9000

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9\} \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

- a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido
- b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de  $1,8524(4) \text{ g/cm}^3$

a) Estimativa para o valor esperado:

→ Média: 1,9000

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Estimativa padrão para a incerteza:

→ Erro padrão: 0,0316228

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9\} \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

- a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido
- b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de  $1,8524(4) \text{ g/cm}^3$

a) Estimativa para o valor esperado:

→ Média: 1,9000

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Estimativa padrão para a incerteza:

→ Erro padrão: 0,0316228

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$(1,90 \pm 0,03) \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

Exercício (3.7.7): Dado um conjunto de medidas da densidade de um líquido:

$$\{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9\} \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

- a) Determine a estimativa padrão para a densidade do líquido
- b) Analise a discrepância entre a estimativa e o valor de referência de  $1,8524(4) \text{ g/cm}^3$

b) Discrepância entre  $(1,90 \pm 0,03) \text{ (g/cm}^3\text{)}$  e o valor de referência  $1,8524(4) \text{ g/cm}^3$ :

$$| d_l - d_{\text{ref}} | = | 1,90 - 1,8524 | \text{ g/cm}^3 = 0,0476 \text{ g/cm}^3$$

$$\rightarrow | d_l - d_{\text{ref}} | \sim 1,5\sigma \quad (\sigma = 0,03 \text{ g/cm}^3)$$

→ Discrepância menor que  $2\sigma$ . Podemos dizer que há compatibilidade entre a medição e o valor de referência

Exercício (3.7.10): Um estudante apresenta como estimativa padrão da medição da aceleração local da gravidade o resultado:

$$g = (9,5 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$$

Se o valor de referência é  $9,78791660(15) \text{ m/s}^2$ , analise o resultado.

Exercício (3.7.10): Um estudante apresenta como estimativa padrão da medição da aceleração local da gravidade o resultado:

$$g = (9,5 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$$

Se o valor de referência é  $9,78791660(15) \text{ m/s}^2$ , analise o resultado.

i) Discrepância entre  $g = (9,5 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$  e o valor de referência  $9,78791660 \text{ m/s}^2$ :

$$|g| - g_{\text{ref}} = 0,287916 \text{ m/s}^2$$

$$\rightarrow |g| - g_{\text{ref}} \sim 2,8\sigma \quad (\sigma = 0,1 \text{ m/s}^2)$$

→ Discrepância maior que  $2\sigma$  e menor que  $3\sigma$ . Não há compatibilidade entre a medição e o valor de referência. Podemos dizer que o experimento é inconclusivo.

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Discrepância:  $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

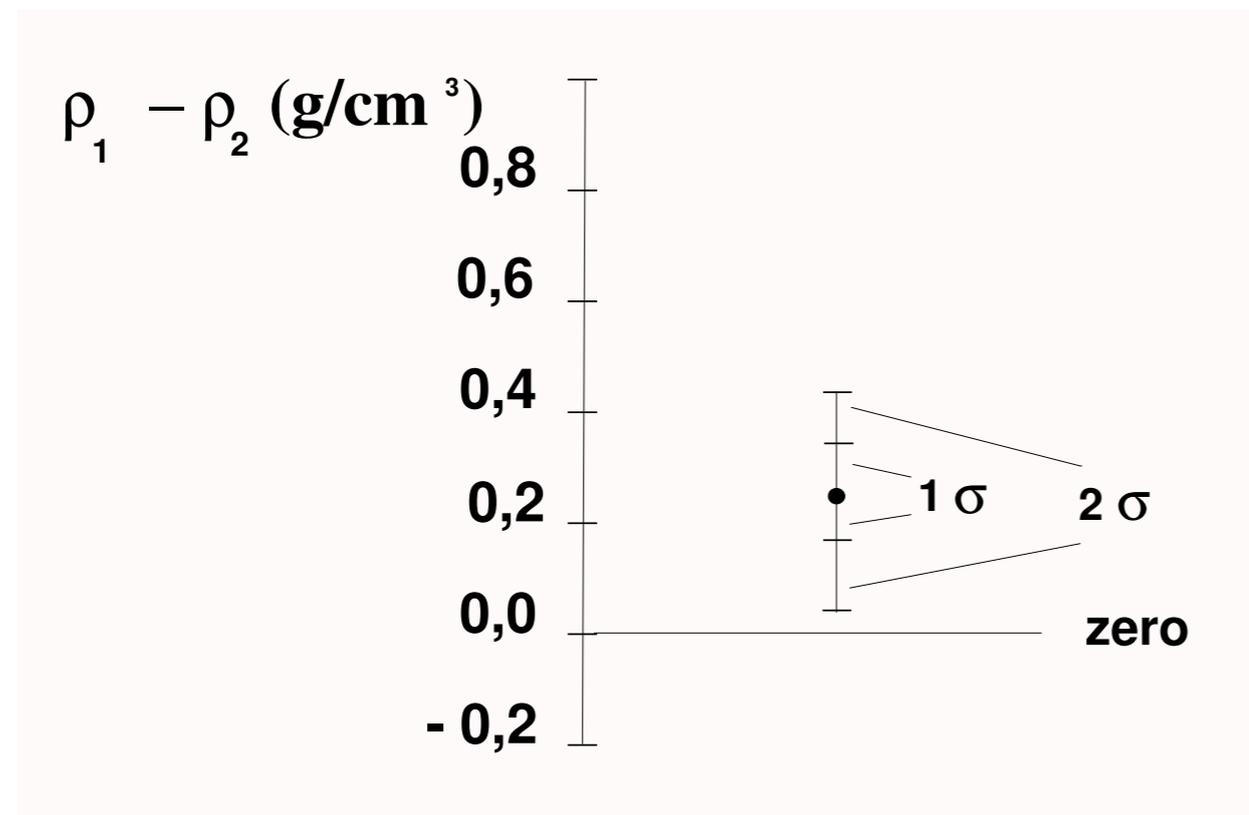
Erro associado:  $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

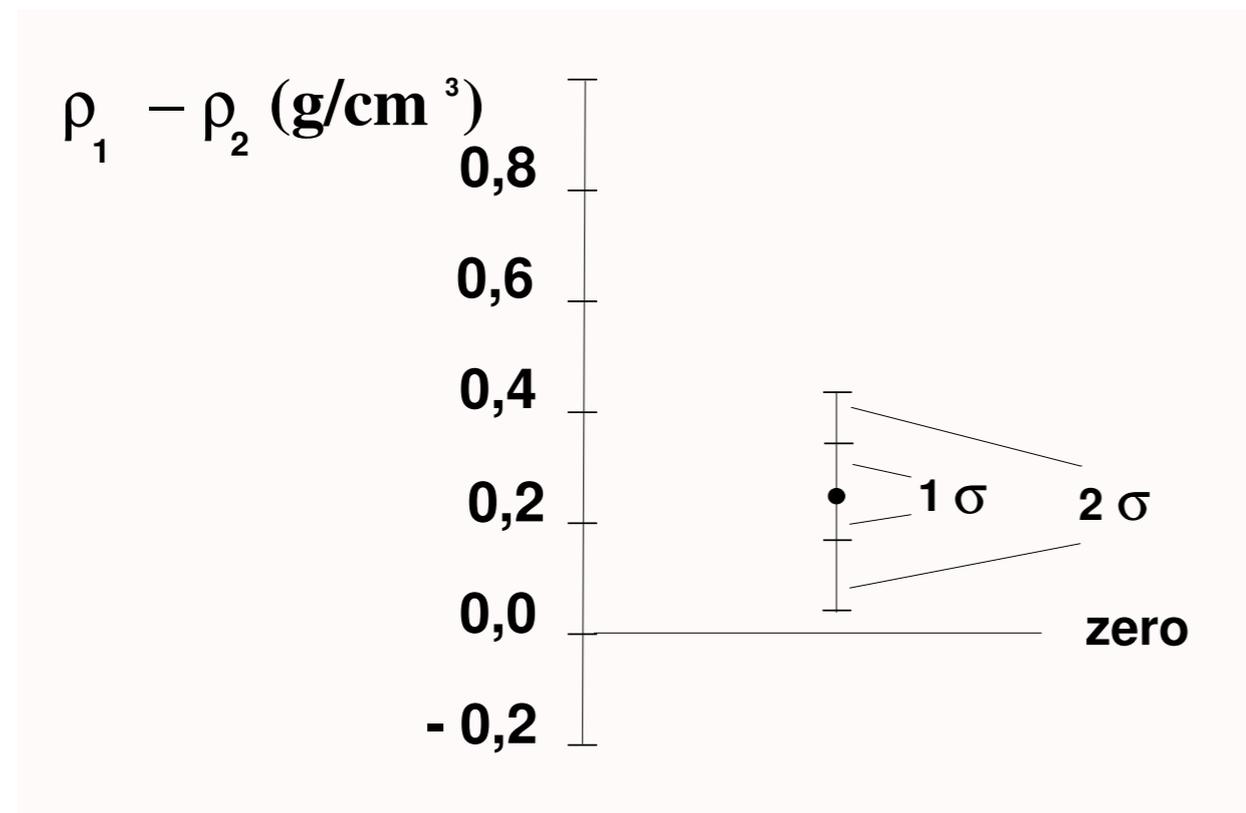


# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



**Discrepância**

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

**Erro associado:**

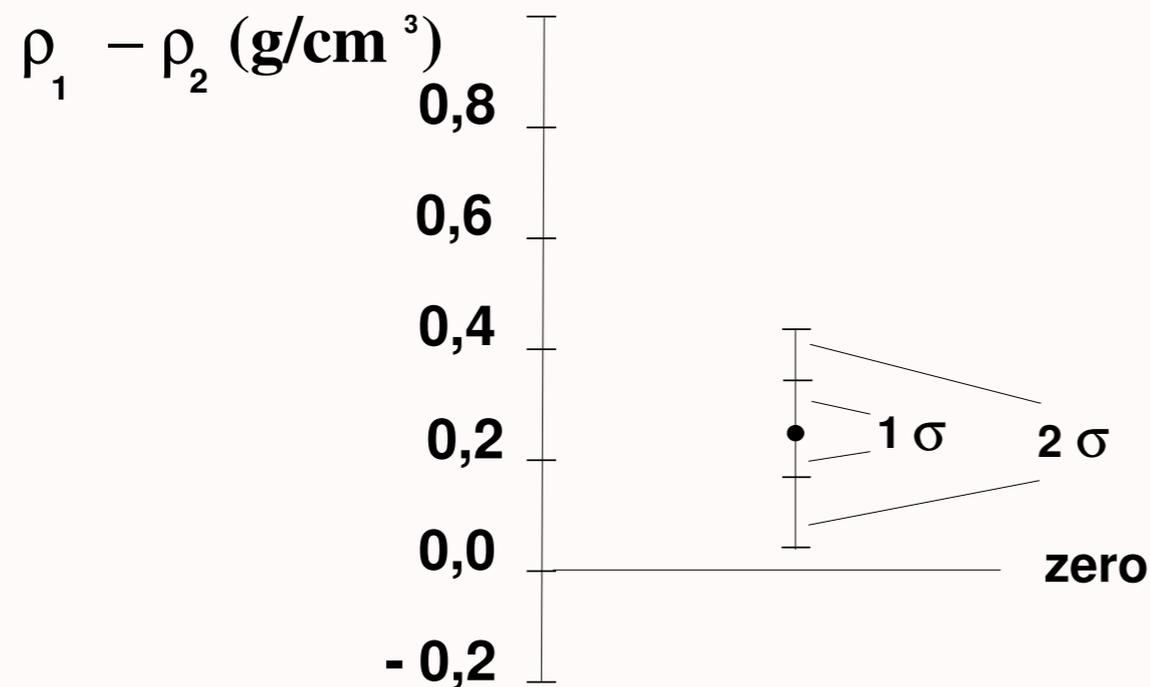
$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

# Compatibilidade de duas estimativas

Se queremos avaliar a compatibilidade entre duas estimativas, podemos considerar a compatibilidade da *diferença* entre elas em relação ao valor de referência zero e considerando o *erro associado entre as estimativas*

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$



**Discrepância**

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,3 \text{ g/cm}^3$$

**Erro associado:**

$$\sigma = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} \approx 0,2 \text{ g/cm}^3$$

As estimativas são compatíveis entre si (discrepância < 2 $\sigma$ )

Exercício (3.7.6): Dois experimentos anunciam a descoberta de uma nova partícula, com a medição da massa apresentada, com nível de confiança de 68%, por :

$$m_1 = (7,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_2 = (7,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Esses valores podem representar a massa de uma mesma partícula?

Exercício (3.7.6): Dois experimentos anunciam a descoberta de uma nova partícula, com a medição da massa apresentada, com nível de confiança de 68%, por :

$$m_1 = (7,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_2 = (7,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Esses valores podem representar a massa de uma mesma partícula?

i) Erro associado entre  $m_1$  e  $m_2$ :  $\sigma = 0,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$        $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

Exercício (3.7.6): Dois experimentos anunciam a descoberta de uma nova partícula, com a medição da massa apresentada, com nível de confiança de 68%, por :

$$m_1 = (7,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_2 = (7,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Esses valores podem representar a massa de uma mesma partícula?

i) Erro associado entre  $m_1$  e  $m_2$ :  $\sigma = 0,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$       $\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$

ii) Discrepância entre  $m_1$  e  $m_2$ :  $|7,8 - 7,0| \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 0,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

→  $|m_1 - m_2| = 2\sigma$

→ Discrepância no nível de  $2\sigma$ . Podemos dizer que o experimento é inconclusivo

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial ( $E_i$ ) e final ( $E_f$ ) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3) \text{ MeV}$$

$$E_f = (60 \pm 9) \text{ MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial ( $E_i$ ) e final ( $E_f$ ) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3) \text{ MeV}$$

$$E_f = (60 \pm 9) \text{ MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

i) Erro associado entre  $E_i$  e  $E_f$ :

$$\sigma = 9,4868 \text{ MeV} \rightarrow 9 \text{ MeV}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial ( $E_i$ ) e final ( $E_f$ ) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3) \text{ MeV}$$

$$E_f = (60 \pm 9) \text{ MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

i) Erro associado entre  $E_i$  e  $E_f$ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

$$\sigma = 9,4868 \text{ MeV} \rightarrow 9 \text{ MeV}$$

ii) Discrepância entre  $E_i$  e  $E_f$ :  $|75 - 60| \text{ MeV} = 15 \text{ MeV}$

$$\rightarrow |E_i - E_f| \sim 1,6\sigma < 2\sigma$$

$\rightarrow$  Discrepância menor que  $2\sigma$ . Podemos dizer que há compatibilidade entre as medições das energias inicial e final na reação

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Estimativa padrão para o valor esperado:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Erro padrão associado:

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ou

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo:

Estimativa 1:  $\bar{x}_1 \pm \sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Estimativa 2:  $\bar{x}_2 \pm \sigma_{\bar{x}_2}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 x_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 x_2$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

# Combinação de resultados compatíveis

A partir de várias estimativas independentes  $\{x_i\}$  do valor esperado de uma grandeza e respectivos erros padrão  $\{\sigma_i\}$ , o resultado *combinado* pode ser obtido da seguinte forma:

Exemplo ( $\rho_{\text{ref}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ):

$$\rho_1 = 8,1 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_2 = 8,4 \pm 0,1 \text{ g/cm}^3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,1)^2}}} = 0,08944$$

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\sigma}{0,2}\right)^2 \cdot 8,1 + \left(\frac{\sigma}{0,1}\right)^2 \cdot 8,4 = 8,3400$$

$$\Rightarrow \rho = (8,34 \pm 0,09) \text{ g/cm}^3$$

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179,0 \pm 5,1) \text{ GeV}/c^2$$

$$m_t(CDF) = (176,1 \pm 6,6) \text{ GeV}/c^2$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179,0 \pm 5,1) \text{ GeV}/c^2$$

$$m_t(CDF) = (176,1 \pm 6,6) \text{ GeV}/c^2$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

i) Erro padrão da combinação de  $m_t(D0)$  e  $m_t(CDF)$ :

$$\sigma = 4,03555 \text{ GeV}/c^2$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Exercício (3.7.9): Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179,0 \pm 5,1) \text{ GeV}/c^2$$

$$m_t(CDF) = (176,1 \pm 6,6) \text{ GeV}/c^2$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

i) Erro padrão da combinação de  $m_t(D0)$  e  $m_t(CDF)$ :

$$\sigma = 4,03555 \text{ GeV}/c^2$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

ii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação de  $m_t(D0)$  e  $m_t(CDF)$ :

$$m_t = 177,916 \text{ GeV}/c^2$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 x_i = \left( \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^2 x_1 + \left( \frac{\sigma}{\sigma_2} \right)^2 x_2$$

**Exercício (3.7.9):** Dois experimentos (*D0* e *CDF*) mediram a massa do *quark top*. As medições são dadas por:

$$m_t(D0) = (179,0 \pm 5,1) \text{ GeV}/c^2$$

$$m_t(CDF) = (176,1 \pm 6,6) \text{ GeV}/c^2$$

Qual o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *quark top*?

i) Erro padrão da combinação de  $m_t(D0)$  e  $m_t(CDF)$ :

$$\sigma = 4,03555 \text{ GeV}/c^2$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

ii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação de  $m_t(D0)$  e  $m_t(CDF)$ :

$$m_t = 177,916 \text{ GeV}/c^2$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 x_i = \left( \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^2 x_1 + \left( \frac{\sigma}{\sigma_2} \right)^2 x_2$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$m_t = (177,9 \pm 4,0) \text{ (GeV}/c^2)$$

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial ( $E_i$ ) e final ( $E_f$ ) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3) \text{ MeV}$$

$$E_f = (60 \pm 9) \text{ MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial ( $E_i$ ) e final ( $E_f$ ) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3) \text{ MeV}$$

$$E_f = (60 \pm 9) \text{ MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

i) Erro associado entre  $E_i$  e  $E_f$ :

$$\sigma = 9,4868 \text{ MeV} \rightarrow 9 \text{ MeV}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

Exercício (3.7.8): No estudo de uma reação nuclear, as energias inicial ( $E_i$ ) e final ( $E_f$ ) são medidas por:

$$E_i = (75 \pm 3) \text{ MeV}$$

$$E_f = (60 \pm 9) \text{ MeV}$$

A discrepância entre elas é significativa?

i) Erro associado entre  $E_i$  e  $E_f$ :

$$\sigma = 9,4868 \text{ MeV} \rightarrow 9 \text{ MeV}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

ii) Discrepância entre  $E_i$  e  $E_f$ :  $|75 - 60| \text{ MeV} = 15 \text{ MeV}$

$$\rightarrow |E_i - E_f| \sim 1,6\sigma < 2\sigma$$

$\rightarrow$  Discrepância menor que  $2\sigma$ . Podemos dizer que há compatibilidade entre a medição e o valor de referência

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da *f.e.m.* de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$\bar{x} = 1,022 \text{ V} \quad \sigma_x = 0,01 \text{ V}$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$\bar{x} = 1,018 \text{ V} \quad \sigma_x = 0,004 \text{ V}$$

Determine a estimativa para *f.e.m.* da pilha resultante da combinação das duas amostras.

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da *f.e.m.* de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$\bar{x} = 1,022 \text{ V} \quad \sigma_x = 0,01 \text{ V}$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$\bar{x} = 1,018 \text{ V} \quad \sigma_x = 0,004 \text{ V}$$

Determine a estimativa para *f.e.m.* da pilha resultante da combinação das duas amostras.

i) Os erros padrão de cada medida são:

$$\sigma_1 = \sigma_x / \sqrt{N-1} = 0,001601 \text{ V}$$

$$\sigma_2 = \sigma_x / \sqrt{N-1} = 0,001333 \text{ V}$$

ii) Erro padrão da combinação:

$$\sigma = 0,001025 \text{ V}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Exercício (3.7.11): A partir de 40 medidas da f.e.m. de uma pilha a média e o desvio padrão são dadas por:

$$\bar{x} = 1,022 \text{ V} \quad \sigma_x = 0,01 \text{ V}$$

Em seguida, com um outro voltímetro, após 10 novas medições encontra-se para a média e o desvio padrão:

$$\bar{x} = 1,018 \text{ V} \quad \sigma_x = 0,004 \text{ V}$$

Determine a estimativa para f.e.m. da pilha resultante da combinação das duas amostras.

iii) Estimativa padrão do valor esperado da combinação:

$$\text{f.e.m.} = 1,01964 \text{ V}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 x_i = \left( \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^2 x_1 + \left( \frac{\sigma}{\sigma_2} \right)^2 x_2$$

Estimativa padrão para o resultado da medição:

$$\text{f.e.m.} = (1,020 \pm 0,001) \text{ (V)}$$