Física IV - Laboratório

Apresentação, Estatística Básica e Incertezas

PROF.: HELIO NOGIMA

DFNAE - Departamento de Física Nuclear e Altas Energias
Sala 3030A (Bloco A)

Email:
nogima@uerj.br

Estrutura e Normas

- 10 práticas relativas a fenômenos óticos, eletromagnéticos e de tópicos de física moderna.
- Os roteiros e informações adicionais estão no site: http://dfnae.fis.uerj.br/twiki/bin/view/DFNAE/FisicaExp
- Cada prática será executada durante os dois tempos de aula, após a discussão sobre a experiência.
- Conforme a disponibilidade de equipamentos, as práticas serão executadas em grupos de até 4 alunos. Grupos menores são preferíveis.
- Cada prática deve resultar em uma análise quantitativa com gráficos e conclusões, que deverá ser entregue ao professor na semana seguinte à execução.

Práticas

1. Intensidade Luminosa
2. Polarização da luz
3. Interferência luminosa
4. Difração A
5. Difração B
6. Reflexão
7. Refração
8. Espectroscopia A
9. Espectroscopia B
10. Relação Carga-Massa do elétron
11. Análise de dados de física da partículas

Avaliação

Além das práticas, serão aplicadas provas nas seguintes datas:

- Prova 1: na aula da semana de 11 a 15 de junho.
- Prova 2: na aula da semana de 30 de julho a 3 de agosto.

A nota de laboratório será dada por

$$NL = \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)F, \quad \text{com } F = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i\, r_i$$

onde, P_1 e P_2 são as provas e p_i e r_i são a presença na prática e entrega da análise respectivamente.

Estrutura e Normas

- A presença é obrigatória. Frequência abaixo de 75% leva a reprovação por falta.
- Entrega de resultados de dados que não sejam os coletados pelo próprio estudante (ou seu grupo) serão anulados.
- Será aberta a possibilidade de apenas uma reposição de prática antes de cada prova.

Aula de hoje:

Relembrando conceitos básicos do tratamento de medidas.

Medidas e Incertezas

O resultado de uma medição tem sempre associada uma incerteza ou erro. Isto resulta do fato de que ela nada mais é do que uma estimativa do real valor que se procura. O chamado *valor esperado**.

Toda medida só faz realmente sentido quando vem junto com sua incerteza. Pois dependendo do valor do erro, a medida pode ser útil ou não.

$$\boxed{\Rightarrow \quad (valor \pm erro)}$$

Classificamos as medidas em duas categorias:

- Medidas diretas: valores obtidos diretamente de escalas ou lidos de instrumentos.

- Medidas indiretas: valores obtidos através de operações matemáticas de medidas diretas

* Mais detalhes sobre esse assunto pode ser encontrado no livro: Estimativas e Erros em Experimentos de Física (Ed. UERJ).

Como Estimar as Incertezas

- Medidas diretas: a incerteza é determinada segundo a seguinte regra geral: Para escalas graduadas em separações entre duas marcas consecutivas da ordem de ~1 mm, a incerteza é dada como sendo L/2. Onde L é o valor da menor divisão da escala (o chamado *limite de erro*). Para os instrumentos digitais, em que a leitura é dada diretamente em valores numéricos, através de um mostrador por exemplo, a incerteza é determinada pelo próprio fabricante.

- Medidas indiretas: A *propagação de erros* é o procedimento utilizado para o caso em que operações matemáticas são efetuadas sobre outros valores que possuem erros estimados. Mas há também o *ajuste de função* que é tanto utilizado para obter o valor da medida como o seu erro.

Propagação de Erros

Medidas indiretas envolvendo adição ou subtração

O caso mais simples é aquele no qual a expressão envolve apenas a adição ou subtração das grandezas,

$$z = x + y \quad \text{ou} \quad z = x - y$$

Nesse caso, se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as respectivas médias das medidas e $\sigma_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{y}}$ os respectivos erros, a melhor estimativa para o valor esperado de z é dada por

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{ou} \quad \bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$$

O erro padrão nesse caso será,

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$$

p/ x e y não correlacionados

ou

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2\sigma_{xy} / N}$$

quando x e y são correlacionados

Propagação de Erros

Medidas indiretas envolvendo multiplicação ou divisão

$$u = x\,y \quad \text{ou} \quad u = \frac{x}{y}$$

A melhor estimativa para o valor esperado será

$$\bar{u} = \bar{x}\,\bar{y} \qquad \text{ou} \qquad \bar{u} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

e o erro relativo padrão, se as variáveis são não correlacionadas, pela soma em quadratura dos erros relativos, ou seja

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{\bar{u}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

Propagação de Erros

Em particular, quando temos uma constante *α* envolvida, temos que

$$u = \alpha x \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\overline{u}} = |\alpha| \sigma_{\overline{x}}$$

e

$$u = \frac{\alpha}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\overline{u}} = \frac{|\alpha|}{\overline{x}^2} \sigma_{\overline{x}}$$

Propagação de Erros

Quando a expressão envolve uma potência maior que um.

$$u = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_u}{u} = \frac{\sigma_{x^2}}{x^2} = 2\frac{\sigma_x}{x}$$

genericamente,

$$u = x^n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_u}{u} = \frac{\sigma_{x^n}}{x^n} = n\frac{\sigma_x}{x}$$

Propagação de Erros

No caso mais geral, onde $u = f(x,y)$ é dada por uma expressão mais complexa, o valor esperado é dado por

$$\bar{u} = f(\bar{x},\bar{y})$$

e o erro padrão por

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_{xy}$$

Sendo as derivadas consideradas no ponto $(\bar{x},\bar{y})$.

Propagação de Erros

Exemplo de aplicação:

Peso (p) de um corpo ao ser pendurado num dinamômetro de constante elástica k e elongá-lo de um comprimento l:

$p = kl$ que é o caso equivalente a $\bar{u} = \bar{x}\,\bar{y}$.

Sendo a incerteza dada por

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{\bar{u}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$ teremos que

$$p = kl \quad \text{e} \quad \sigma_p = p\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$$

Propagação de Erros

Exemplo de aplicação:

Velocidade de um corpo ao cair em queda livre do repouso de uma altura h:

$$v = \sqrt{2gh} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{v^2}}{v^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

pela formulação geral podemos encontrar

$$\sigma_{v^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial v^2}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2} = 2v\sigma_v \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{v^2}}{v^2} = 2\frac{\sigma_v}{v}$$

ou seja,

$$\boxed{v = \sqrt{2gh} \quad \text{e} \quad \frac{\sigma_v}{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}}$$

Ajuste de Funções

Métodos dos Mínimos Quadrados

- Encontrar a melhor curva regular que se ajuste aos dados experimentais.
- Pode-se usar um critério individual para traçar uma curva que se ajuste a um conjunto de dados.
- Entretanto, afim de evitar este tipo de critério, vamos utilizar o MMQ que possibilita encontrar uma curva que melhor representa um determinado conjunto de dados experimentais.

Métodos dos Mínimos Quadrados

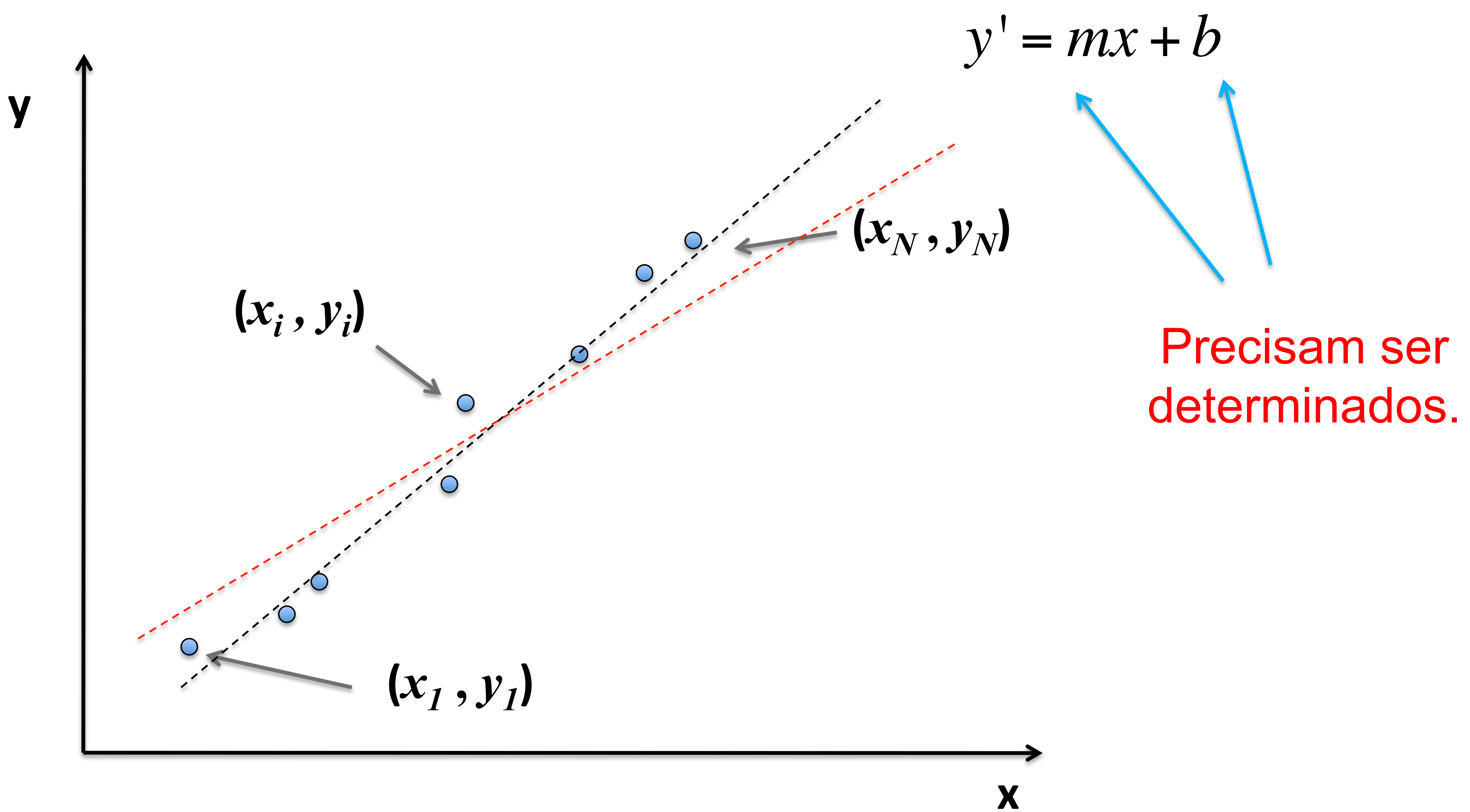
Vamos definir uma função linear do tipo: $y' = m.x + b$

Pelo MMQ a função de melhor se ajusta ao conjunto de dados experimentais, é aquela que minimiza a soma do quadrado dos desvios,

$$\sum_{i=1}^{N} (\underbrace{y_i}_{\text{valor experimental}} - \underbrace{y'_i}_{\text{valor obtido pela função}})^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - y'(x_i) \right]^2$$

Procura-se o valor mínimo dessa quantidade.



Métodos dos Mínimos Quadrados

$$\frac{\partial f(m,b)}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left[\sum_{i=1}^{N}[y_i - mx_i - b]^2\right] = 0$$

$$\boxed{m\sum_{i=1}^{N}(x_i^2) + b\sum_{i=1}^{N}x_i = \sum_{i=1}^{N}x_i\,y_i}$$

$$\frac{\partial f(m,b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{N}[y_i - mx_i - b]^2\right] = 0$$

$$\boxed{m\sum_{i=1}^{N}(x_i) + Nb = \sum_{i=1}^{N}(y_i)}$$

Estas são chamadas equações normais.

N é o número de medidas experimentais

Métodos dos Mínimos Quadrados

Resolvendo o sistema de equações anteriores, temos que:

$$m = \frac{M_{xy}}{M_{xx}}$$

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i.y_i - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i\right) \qquad M_{xx} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

$$\boxed{b = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i - m\sum_{i=1}^{N} x_i\right)}$$

Métodos dos Mínimos Quadrados

O desvio padrão e os erros associados ao coeficiente angular (m) e linear (b) são respectivamente:

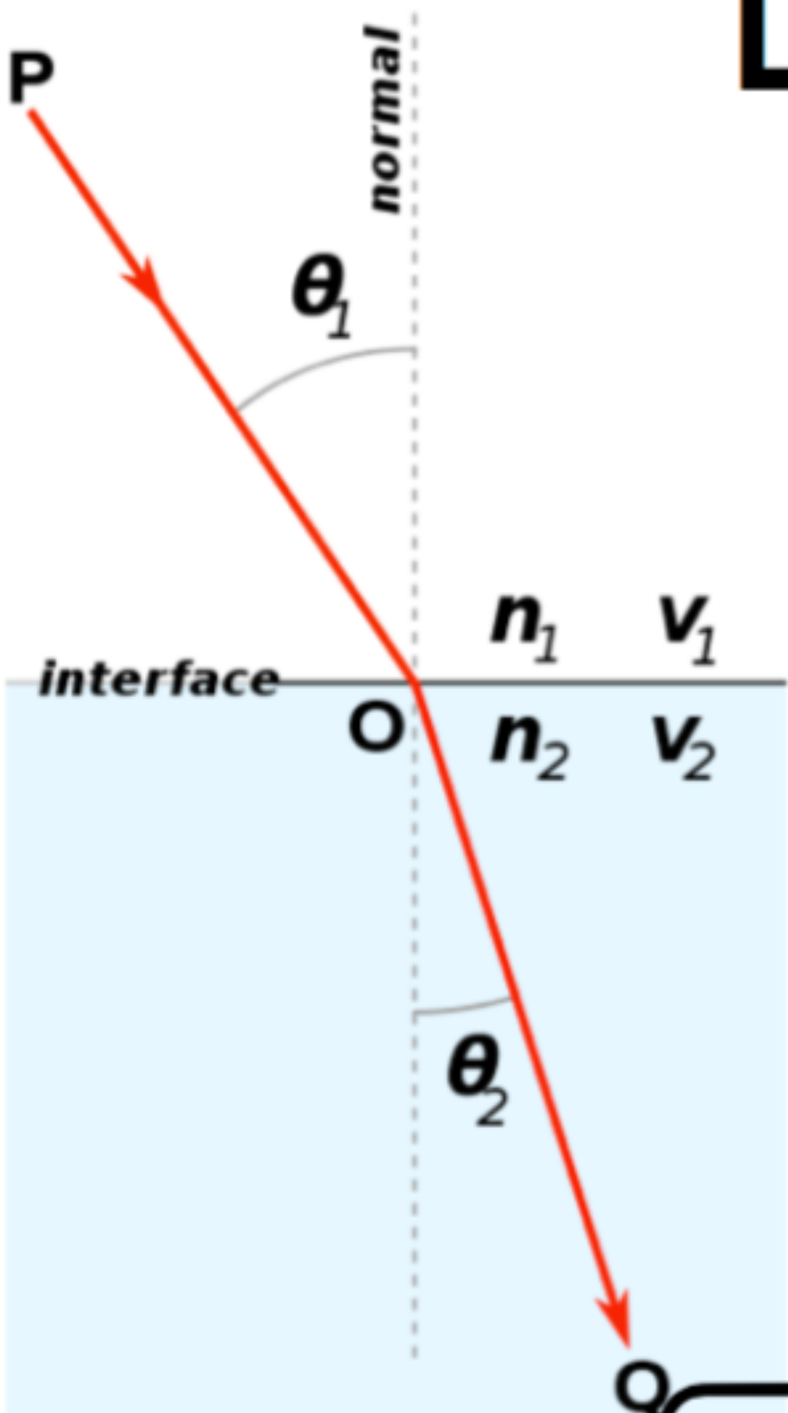
$$\sigma = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - b - mx_i)$$

$$\epsilon_m = \sqrt{\frac{\sigma^2}{M_{xx}}}$$

$$\epsilon_b = \sqrt{\frac{\sigma^2}{NM_{xx}}\sum_{i=1}^{N}x_i^2}$$

Usando os MMQ

Lei de Snell



$$\eta_1.sen\theta_1 = \eta_2.sen\theta_2$$

θ1 em graus:	θ2 em graus:
10,0	7,0
20,0	14,0
30,0	20,5
40,0	26,0
50,0	31,5
60,0	36,0
70,0	40,5

$$\boxed{sen\theta_1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}.sen\theta_2}$$

$$\boxed{y = m.x + b}$$

$$\boxed{y = sen\theta_1 \quad x = sen\theta_2 \quad m = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad b = 0}$$

Métodos dos Mínimos Quadrados

N	y	x	xx	yy	x.y	Mxx	Mxy	m	b	σ^2	εm	εb
	0,174	0,122	0,015	0,030	0,021	0,013	0,019	1,40	4,00E-04	1,46E-06		
	0,342	0,242	0,059	0,117	0,083	0,052	0,074	1,41	1,95E-04	3,47E-07		
	0,500	0,350	0,123	0,250	0,175	0,109	0,156	1,42	2,54E-04	5,90E-07		
	0,643	0,438	0,192	0,413	0,282	0,171	0,251	1,47	-3,91E-05	1,39E-08		
	0,766	0,522	0,273	0,587	0,400	0,243	0,356	1,46	1,46E-04	1,94E-07		
	0,866	0,588	0,345	0,750	0,509	0,307	0,452	1,48	-1,89E-04	3,27E-07		
	0,940	0,649	0,422	0,883	0,610	0,375	0,542	1,45	2,34E-04	5,00E-07		
N	∑y	∑x	∑x.x	∑y.y	∑x.y	Mxx	Mxy	m	b	σ^2	εm	εb
9,0	4,231	2,911	1,429	3,030	2,080	0,487	0,712	1,46	-2,00E-03	3,66E-05	5,06E-03	4,89E-02

$$\boxed{m = \frac{\eta_2}{\eta_1} = 1,46 \pm 0,01}$$

$$\boxed{y = 1,46.x}$$

Métodos dos Mínimos Quadrados

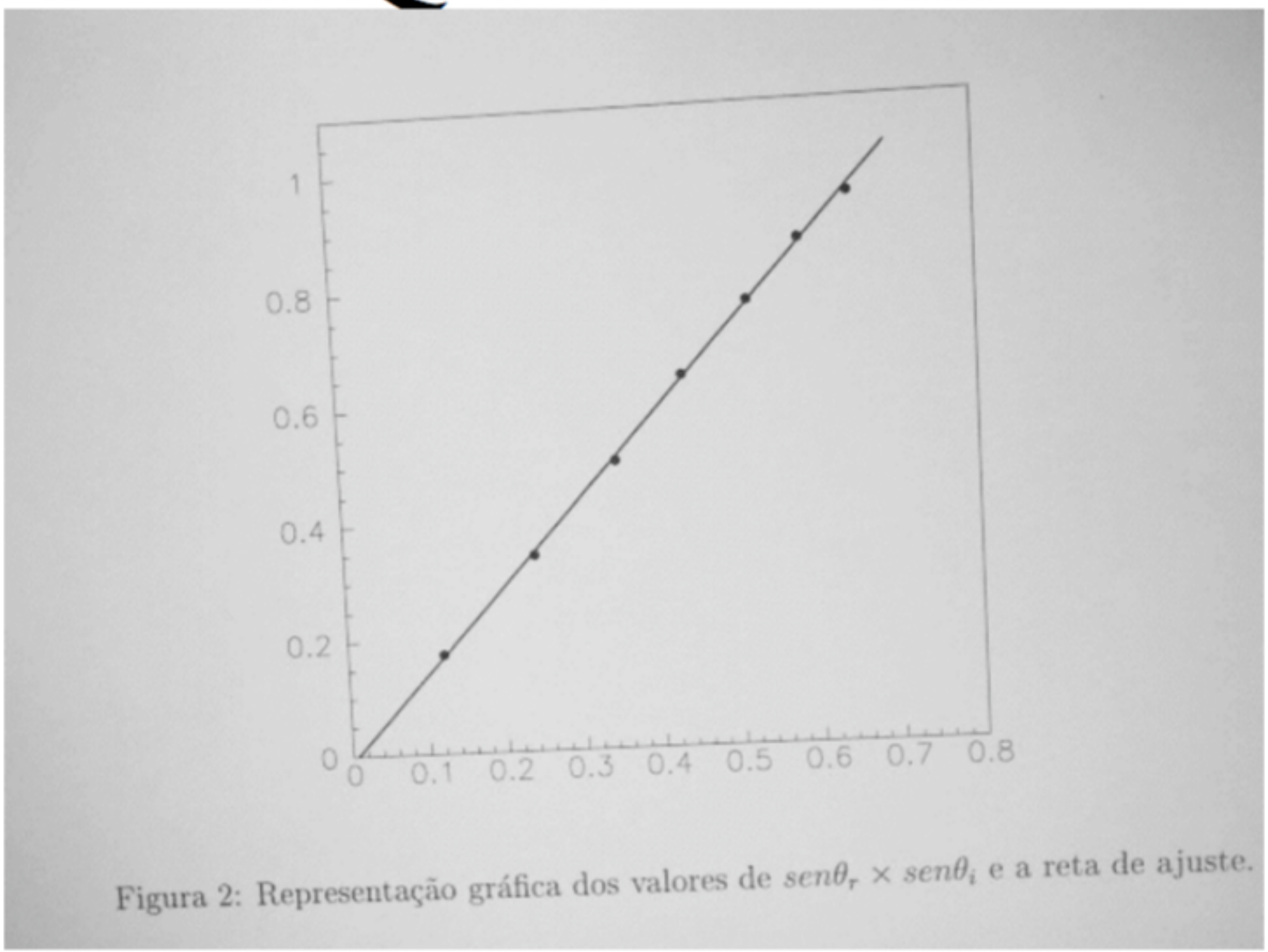
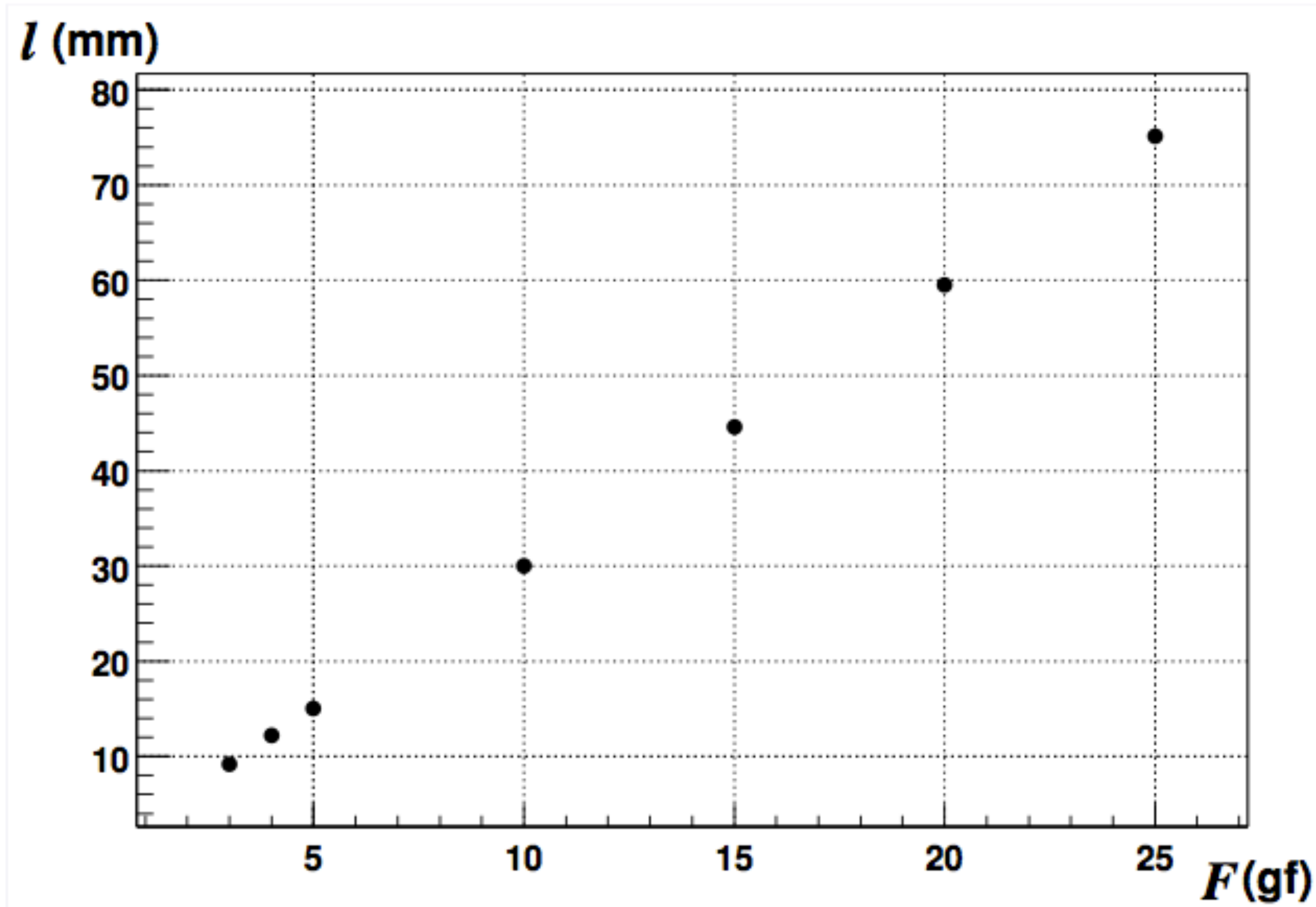


Figura 2: Representação gráfica dos valores de $sen\theta_r \times sen\theta_i$ e a reta de ajuste.

Exemplo: dinamômetro de mola

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Exemplo: organizando os dados

x_i	y_i	x_i^2	$x_i.y_i$	$[y_i - (ax_i + b)]$	$[y_i - (ax_i + b)]^2$
3	9.2	9	27.6	0.1101	0.0121
4	12.2	16	48.8	0.1270	0.0161
5	15	25	75	-0.0561	0.0032
10	30	100	300	0.0282	0.0008
15	44.6	225	669	-0.2874	0.0826
20	59.5	400	1190	-0.3031	0.0918
25	75.1	625	1877.5	0.3813	0.1454
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i.y_i$		$\Sigma[y_i - (ax_i + b)]^2$
82	245.6	1400	4187.9		0.3520
$(\Sigma x_i)/N$	$(\Sigma y_i)/N$	$(\Sigma x_i^2)/N$	$(\Sigma x_i.y_i)/N$		
11.7143	35.0857	200.0000	598.2714		
σ_{xy}	σ_x^2				ε_y
187.2673	62.7755				0.2653

a	b	σ_a	σ_b
2.9831	0.1405	0.0127	0.1790

Exemplo: resultados

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

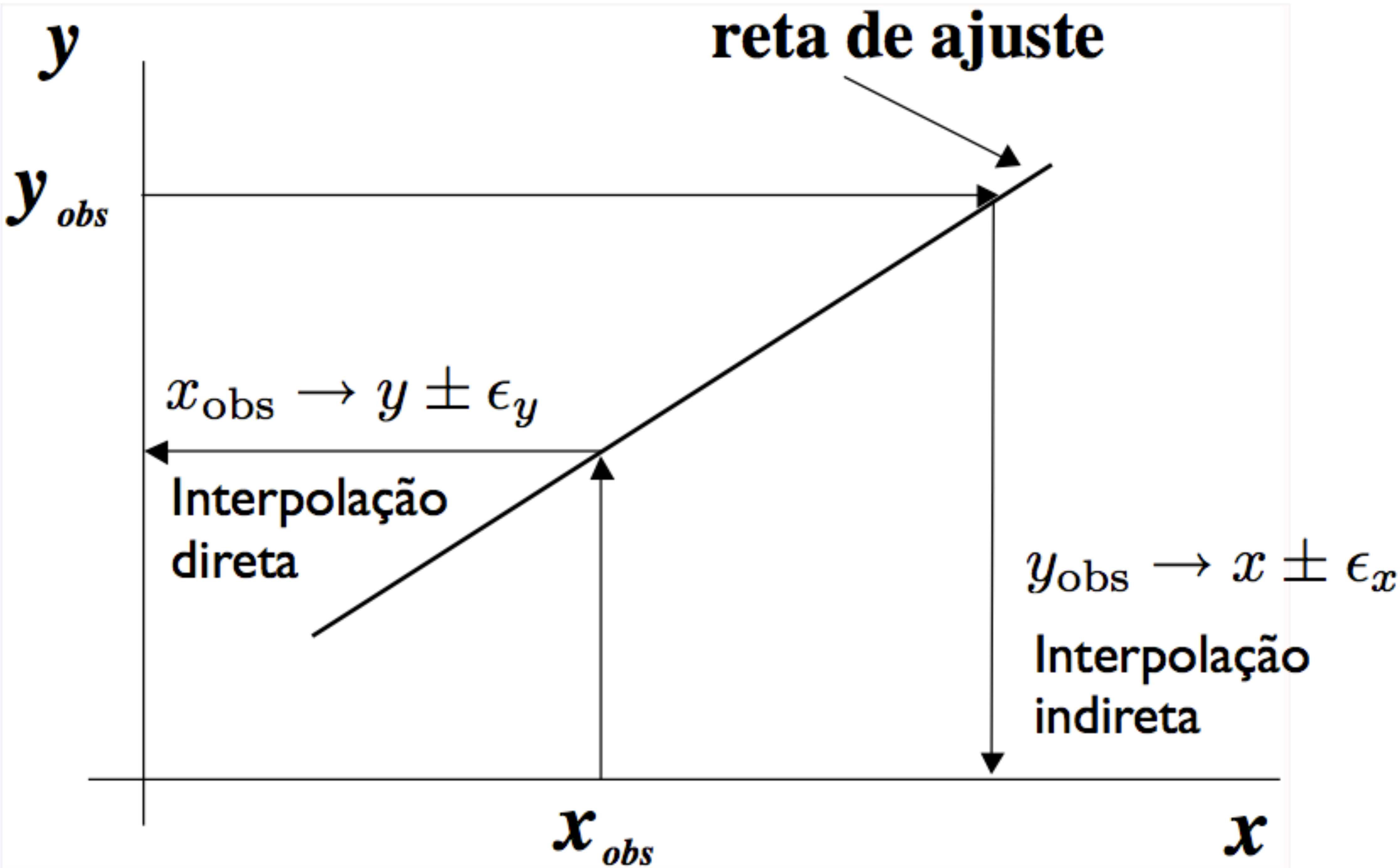
$$a = (2.983 \pm 0.013)\ \mathrm{mm/gf}$$

$$b = (0.14 \pm 0.18)\ \mathrm{mm}$$

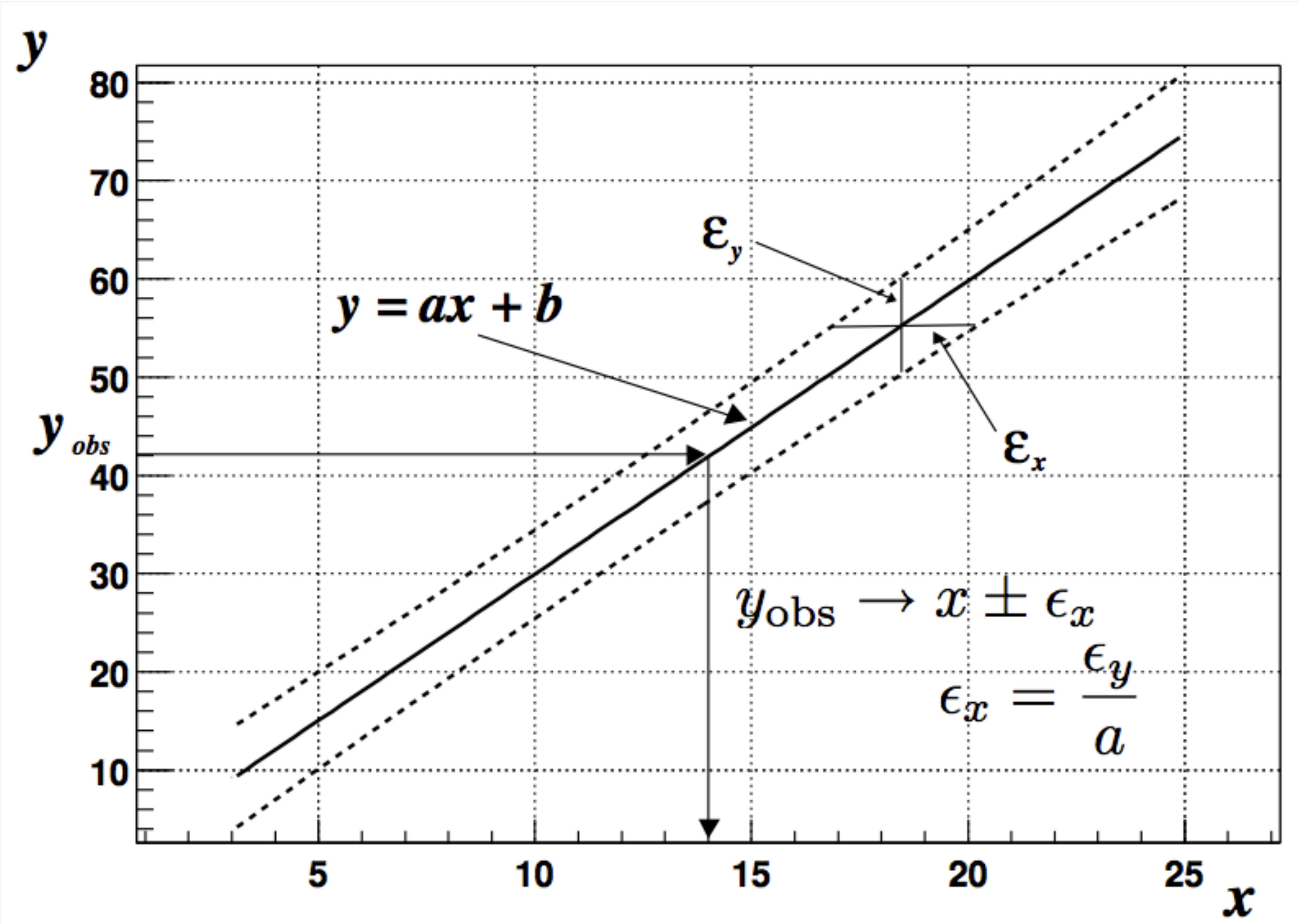
Equação da reta:

$$l\ (\mathrm{mm}) = 2.983 \cdot F\ (\mathrm{gf}) + 0.14$$

Reta de calibração e interpolação



Faixa de confiança



Algarismos Significativos

Qualquer algarismo à **direita**, no sentido usual de leitura, do **primeiro algarismo não nulo**

Exemplos:

0,02	**⇒ 1 algarismo significativo**
0,2	**⇒ 1 algarismo significativo**
2	**⇒ 1 algarismo significativo**
2,0	**⇒ 2 algarismos significativos**
2,00	**⇒ 3 algarismos significativos**
2000	**⇒ 4 algarismos significativos**
$2{,}0 \times 10^3$	**⇒ 2 algarismos significativos**

Algarismos Significativos

O correto número de algarismos significativos para expressar um resultado numérico é aquele condizente com a sua incerteza.

- Devem ser determinados apenas após o cálculo da incerteza;

- Geralmente expressa-se a incerteza apenas com um algarismo significativo;

- Expressa-se o valor da estimativa até o algarismo do erro (incerteza).

Exemplo:

Supondo a estimativa de um comprimento e do seu erro sejam respectivamente:

$$\bar{x} = 73{,}648\ \text{cm} \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{x}} = 0{,}2285\ \text{cm}$$

Escreve - se

$$\boxed{(73{,}6 \pm 0{,}2)\ \text{cm} \quad \text{ou} \quad 73{,}6(2)\ \text{cm}}$$

Aproximações

$$N = 3{,}87\mathbf{XY} \begin{cases} N = 3{,}88 \ \text{ se } X>5 \\ N = 3{,}87 \text{ se } X<5 \\ \text{Se} \qquad X=5 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } Y \geq 5 \text{ depois de } X \Rightarrow N = 3{,}88 \\ \\ \text{se } Y< 5 \text{ depois de } X \Rightarrow N = 3{,}87 \end{cases} \end{cases}$$

Algarismos Significativos

Exemplo:

$$\bar{x} = 128,652\ \text{kg} \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{x}} = 0,428\ \text{kg}$$

Escreve-se

$$(128,7 \pm 0,4)\ \text{kg} \quad \text{ou} \quad 128,7(4)\ \text{kg}$$