

# Física IV

## Aula I

Baseado no material preparado por  
Sandro Fonseca  
Helena Malbouisson  
Clemencia Mora

# Normas e Dados

- Presença é **obrigatória** as aulas de lab. e os alunos somente podem faltar a **uma\*** prática.
  - A partir da segunda falta a média de lab. será **reduzida em 10%**
- Os gráficos correspondentes a cada prática serão usados na avaliação.

média do lab  $\rightarrow M_E = \left( \frac{P_1 + P_2}{2} \right) \times F$

fator de presença  $\rightarrow F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \cdot r_i$

- Os alunos com **menos de 75% de presença serão reprovados por falta\***.
- Em princípio, 2 aulas de reposição 1 semana antes de cada prova.

<http://dfnae.fis.uerj.br/twiki/bin/view/DFNAE/FisicaExp>

\* serão considerados separadamente casos excepcionais

# Aula de Hoje

- Medidas, Ajustes e Gráficos
- Métodos dos Mínimos Quadrados-MMQ

# Principais fontes de erros em medidas experimentais

# Erros sistemáticos

- Tem sua origem:
  - ✱ Erro da aferição da medida;
  - ✱ Falta de ajuste do instrumento de medida;
  - ✱ Calibração do instrumento.
- Exemplos:
  - ✓ Procedimento do experimentador;
  - ✓ Alinhamento incorreto do instrumento.

# Erros estatísticos

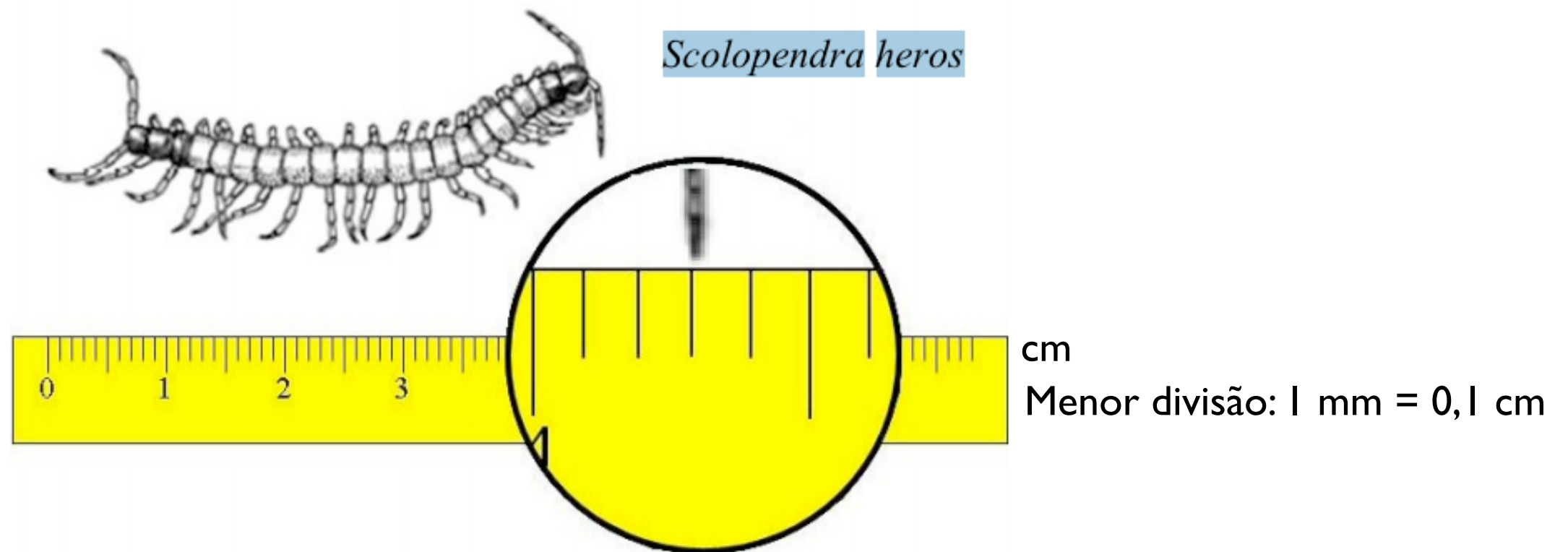
- Tem sua origem:
  - ✓ Ocorrem por variações incontroláveis e aleatórias dos instrumentos de medida;

# Medições na Aula de Laboratório

No procedimento de tomada de dados no laboratório deve-se prezar por

- Minimizar o quanto puder as fontes de erros sistemáticos em suas medidas.
  - ➡ Isto é, tomar cuidado na montagem, nas conexões, tomadas, modo de operação, escalas, o alinhamento, etc, dos seus aparelhos.

# Algarismos Significativos



Qual é o comprimento afinal?

4,32 cm

Algarismo  
duvidoso

4,32 ± 0,05

cm

Erro: metade  
da menor  
divisão



**Quais são os algoritmos  
significativos?**

# Algarismos Significativos

**Qualquer algarismo à direita, no sentido usual de leitura, do primeiro algarismo não nulo**

**Exemplos:**

<b>0,02</b>	<b><math>\Rightarrow</math> 1 algarismo significativo</b>
<b>0,2</b>	<b><math>\Rightarrow</math> 1 algarismo significativo</b>
<b>2</b>	<b><math>\Rightarrow</math> 1 algarismo significativo</b>
<b>2,0</b>	<b><math>\Rightarrow</math> 2 algarismos significativos</b>
<b>2,00</b>	<b><math>\Rightarrow</math> 3 algarismos significativos</b>
<b>2000</b>	<b><math>\Rightarrow</math> 4 algarismos significativos</b>
<b><math>2,0 \times 10^3</math></b>	<b><math>\Rightarrow</math> 2 algarismos significativos</b>

# Aproximações

$3,870001 \rightarrow 3,87$

$3,874999 \rightarrow 3,87$

$3,875001 \rightarrow 3,88$

$3,879999 \rightarrow 3,88$

$3,875000 \rightarrow ?$

Convenção “ímpar”:

$3,875000 \rightarrow 3,87$

$3,885000 \rightarrow 3,89$

$3,895000 \rightarrow 3,89$

Convenção “par”:

$3,875000 \rightarrow 3,88$

$3,885000 \rightarrow 3,88$

$3,895000 \rightarrow 3,90$

# Dominando os Gráficos

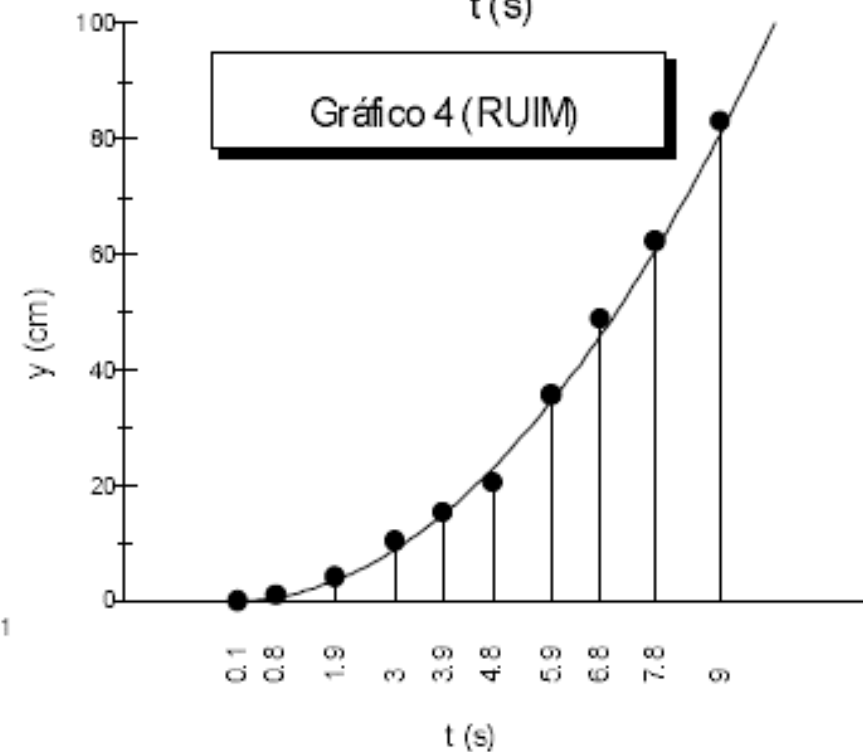
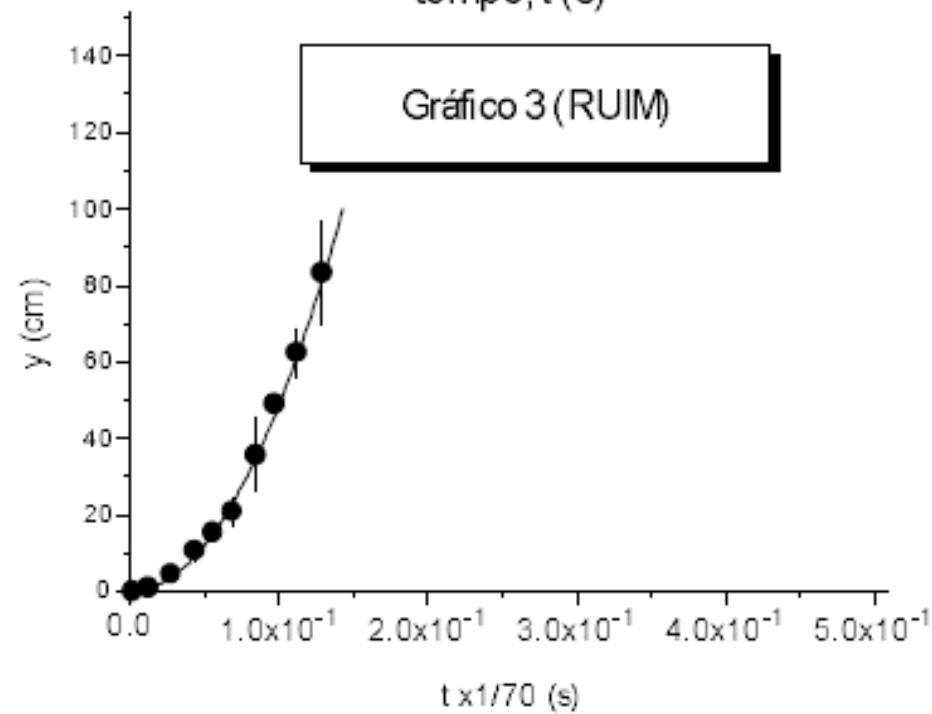
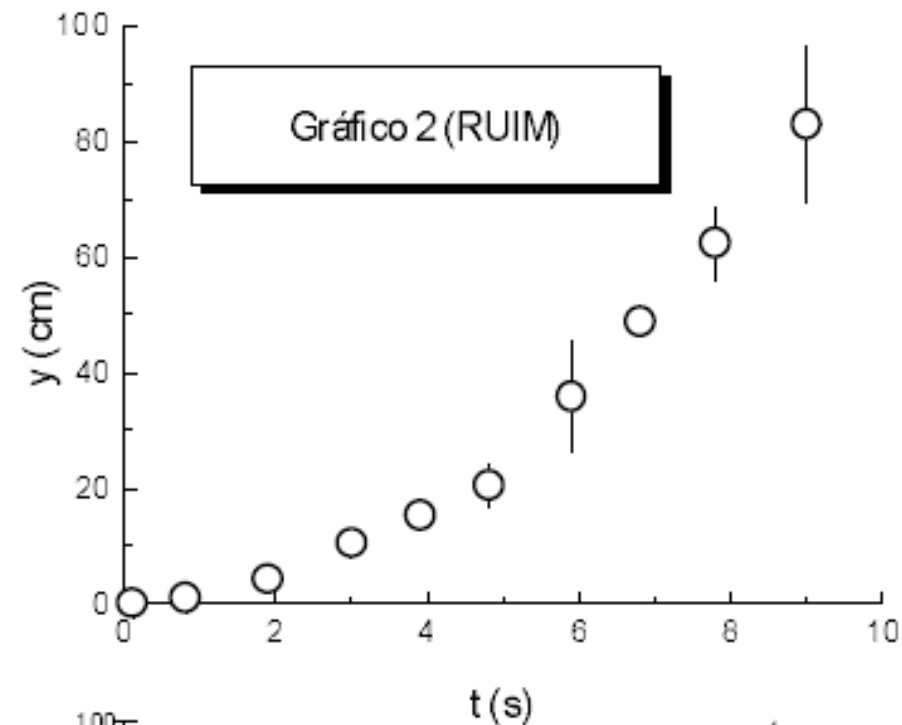
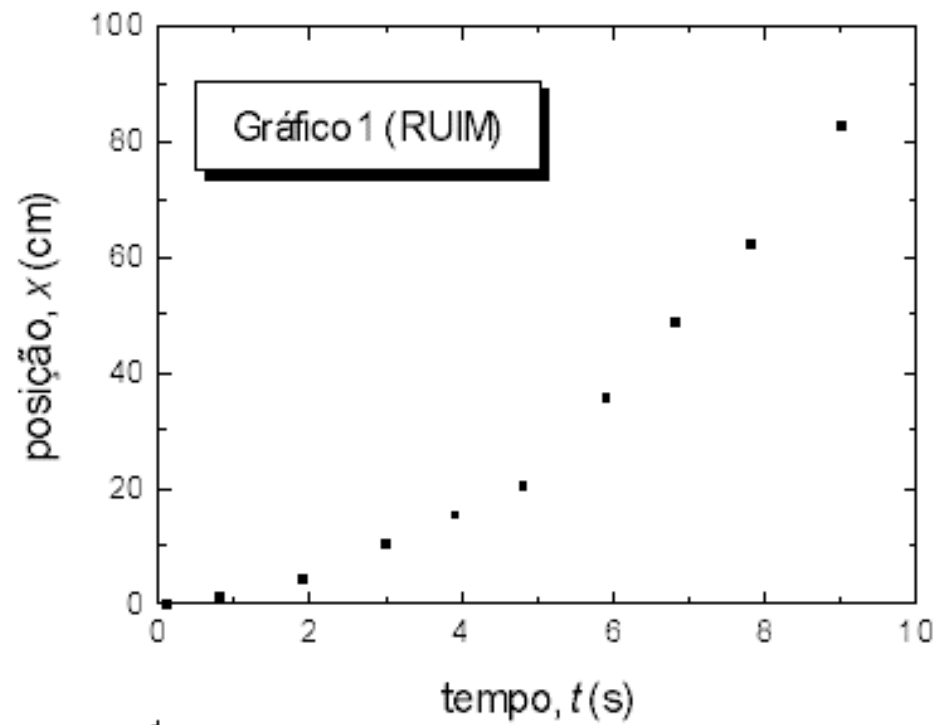
# Gráficos

Devem conter:

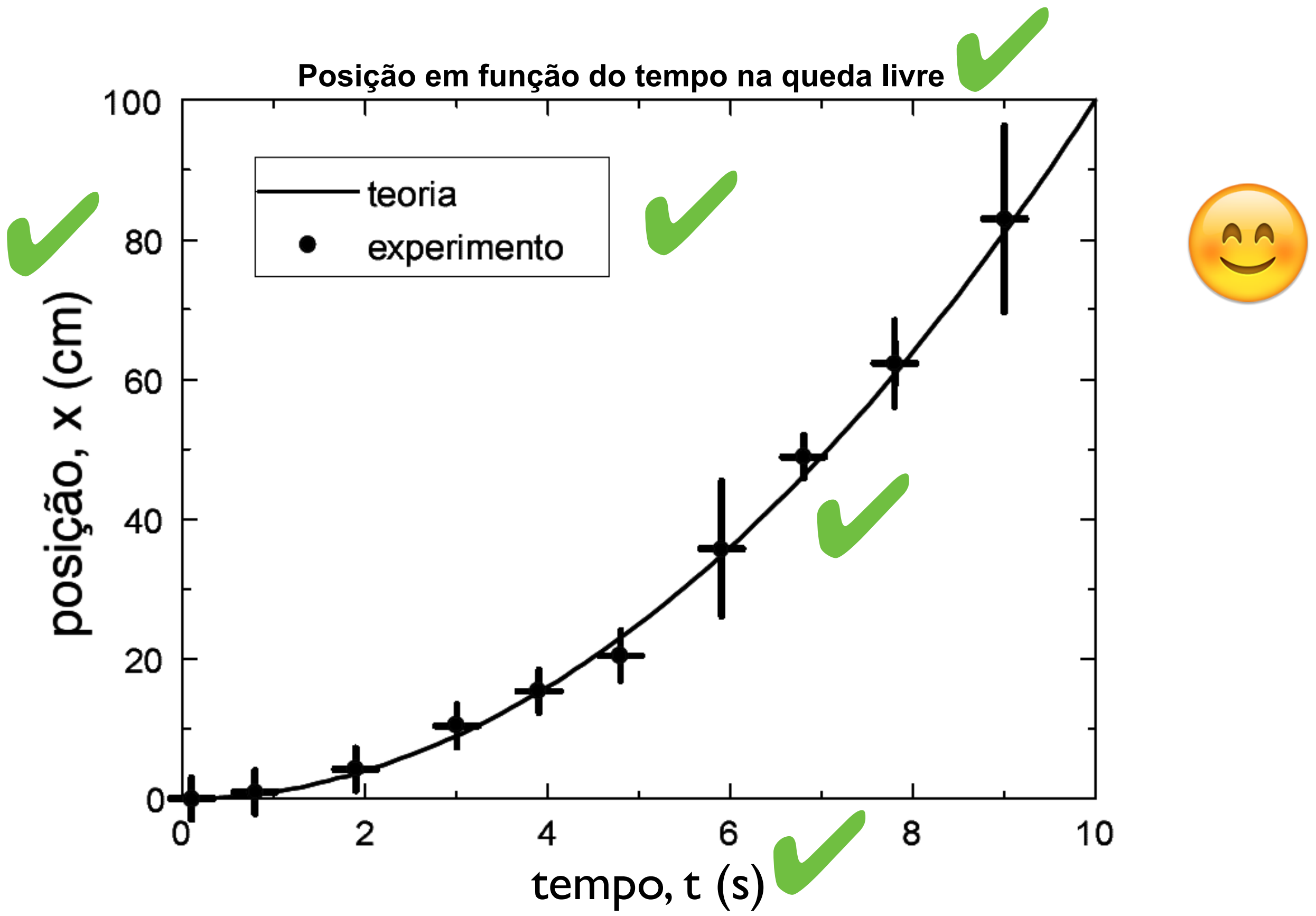
1. **os pontos experimentais** com seus erros quando aplicável
2. **a curva teórica** obtida através do método dos mínimos quadrados, quando aplicável

Observe as **unidades utilizadas**, use símbolos diferentes para os **pontos experimentais** e os **pontos usados para traçar a reta teórica**. Preste atenção na **escala** do gráfico, os valores e grandezas de cada **eixo**, e o **título** do gráfico, que devem garantir que o gráfico seja compreensível para alguém que não fez o experimento.

# Gráficos



# Gráficos

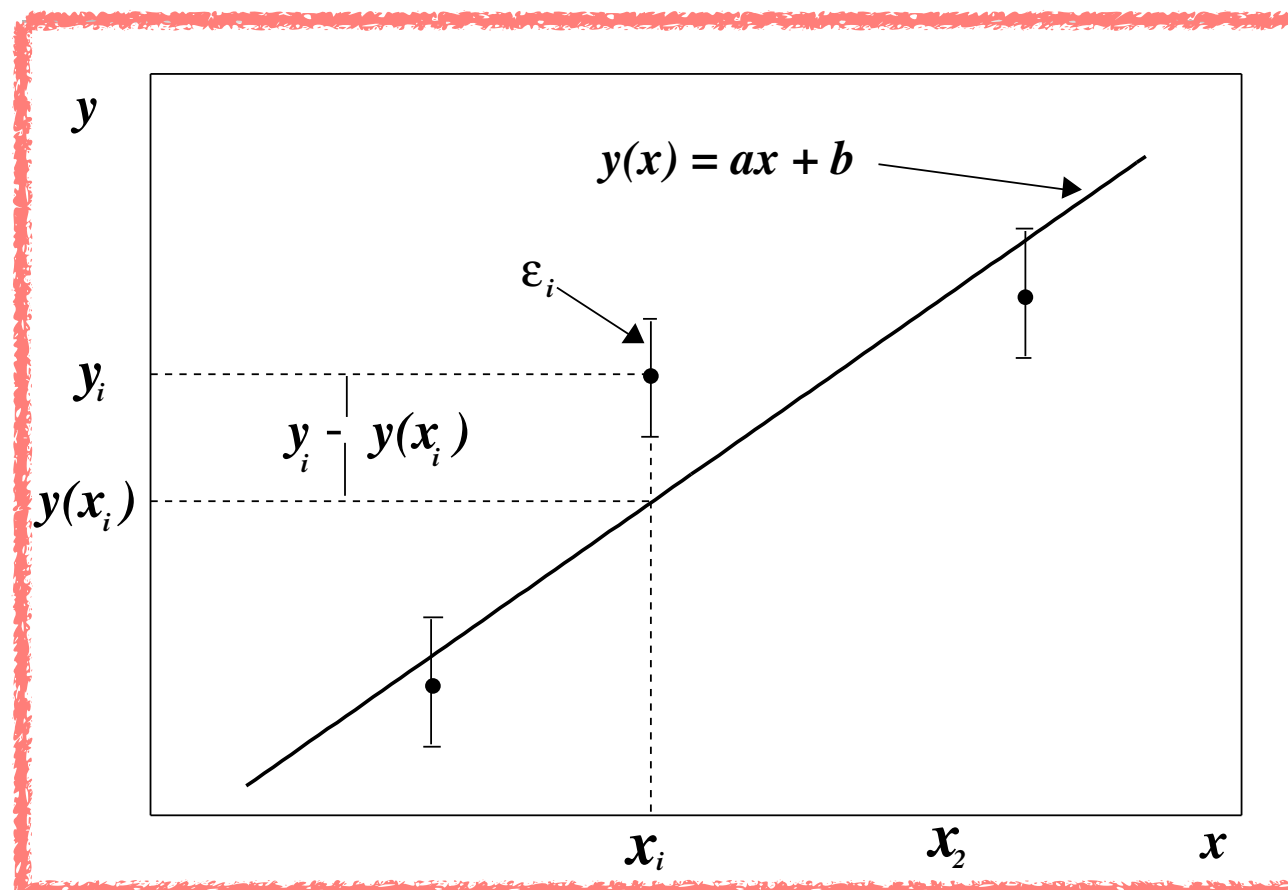


# Ajuste de Funções



# Métodos dos Mínimos Quadrados

- Encontrar **a melhor curva regular** (reta, parábola ou outro polinômio, função exponencial, etc) que se **ajuste** aos **dados experimentais**.
- Nesta disciplina vamos utilizar o MMQ que possibilita encontrar uma curva que **melhor representa** um determinado conjunto de dados experimentais.
  - ✓ O critério: minimizar a soma dos quadrados da distância vertical dos pontos até a curva.



# Métodos dos Mínimos Quadrados

Vamos definir uma **função linear** do tipo:  $y' = m.x + b$

Pelo MMQ a função que melhor se ajusta ao conjunto de dados experimentais é aquela que minimiza a soma do quadrado dos desvios,

$$\sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)^2$$

Diagram illustrating the components of the sum of squared residuals formula:

- $y_i$  (Experimental value): valor experimental
- $y'_i$  (Value obtained from the function): valor obtido pela função

# Métodos dos Mínimos Quadrados

Considerando todos os dados, temos o conjunto de desvios:

$$d_i = y_i - (m.x_i + b), i = 1, 2, \dots, N$$

Assim utilizando o quadrado da soma dos desvios, a soma dependerá apenas da escolha dos coeficientes da função.

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^N d_i^2$$

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - mx_i - b]^2$$

# Métodos dos Mínimos Quadrados

$$\frac{\partial f(m, b)}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[ \sum_{i=1}^N [y_i - mx_i - b]^2 \right] = 0$$

$$m \sum_{i=1}^N (x_i^2) + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\frac{\partial f(m, b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left[ \sum_{i=1}^N [y_i - mx_i - b]^2 \right] = 0$$

Estas são chamadas  
equações normais

N é o número  
de medidas  
experimentais  
(pontos)

$$m \sum_{i=1}^N (x_i) + Nb = \sum_{i=1}^N (y_i)$$

# Métodos dos Mínimos Quadrados

Resolvendo o sistema de equações anteriores, temos que:

$$m = \frac{M_{xy}}{M_{xx}}$$
$$M_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i \right)$$
$$M_{xx} = \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

$$b = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N y_i - m \sum_{i=1}^N x_i \right)$$

# Métodos dos Mínimos Quadrados

O desvio padrão e os erros associados ao coeficiente angular (m) e linear (b) são respectivamente:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - b - mx_i)^2$$

$$\epsilon_m = \sqrt{\frac{\sigma^2}{M_{xx}}}$$

$$\epsilon_b = \sqrt{\frac{\sigma^2}{NM_{xx}} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Usando o MMQ  
para um ajuste linear

# Métodos dos Mínimos Quadrados

i	y <sub>i</sub>	x <sub>i</sub>	x.x		x.y				[y <sub>i</sub> -m.x <sub>i</sub> -b] <sup>2</sup>			
1	0.174	0.122	0.015		0.021				5.43E-07			
2	0.342	0.242	0.059		0.083				5.38E-05			
3	0.500	0.350	0.123		0.175				6.08E-05			
4	0.643	0.438	0.192		0.282				3.70E-05			
5	0.766	0.522	0.273		0.400				3.40E-05			
6	0.866	0.588	0.345		0.509				8.09E-05			
7	0.940	0.649	0.422		0.610				4.24E-05			
N	Σ y	Σ x	Σ x.x		Σ x.y	M <sub>xx</sub>	M <sub>xy</sub>	m	b	σ <sup>2</sup>	ε <sub>m</sub>	ε <sub>b</sub>
7	4.231	2.911	1.429		2.080	0.218	0.321	1.467	-5.7E-03	6.19E-05	6.6E-03	3.7E-02

$$m = \frac{M_{xy}}{M_{xx}} = 1,467 \pm 0,007 \text{ [unidades]}$$

nesse caso, mantém-se 3 casas decimais

Se os parametros  $m$  ou  $b$  tiverem dimensões físicas tem que especificar as **unidades !!!**

- conservar 1 (ou 2, se for 1,X) algarismo(s) significativo(s) no erro  $\epsilon$
- o erro define o **número de casas decimais** na média (têm que ter o mesmo)

$$b = -0,006 \pm 0,04 = -0,01 \pm 0,04 \text{ [unidades]}$$

mantém-se só 2 casas decimais

**Equação da reta**

$$y = 1,467 x - 0,01 \text{ [unid.]}$$



# Próxima Aula

- Prática: Intensidade Luminosa.