

- a equação (2.3)

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

em analogia com a Eq. (2.1), mostra que uma variação temporal de indução magnética é capaz de criar um campo elétrico \mathbf{E} . A situação geométrica entre estas grandezas é a mostrada na Fig. 2.6.

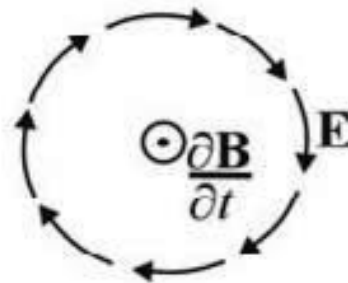


Figura 2.6 – posicionamento entre E e variação temporal de indução magnética

Imaginemos que \mathbf{B} esteja aumentando no sentido que sai do plano da figura. Neste caso, devido ao sinal negativo da expressão, o campo elétrico \mathbf{E} teria a direção e sentido mostrado na Fig. 2.6.

- a equação (2.4)

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho$$

mostra que o fluxo do vetor \mathbf{D} não é conservativo. Desta maneira, podemos conceber volumes no espaço onde há uma variação entre os fluxos elétricos que entram e saem destes. Esta situação pode ser exemplificada na Fig. 2.7, onde temos uma carga elétrica centrada numa esfera, que pode ser o volume através do qual há uma variação de fluxo.

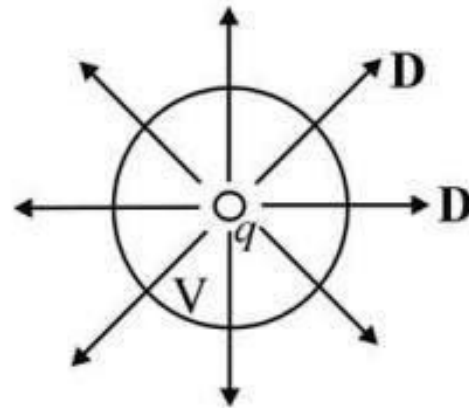


Figura 2.7 – posicionamento entre indução elétrica e carga elétrica

Sendo \mathbf{D} e ρ ligados por um divergente, conforme o que foi visto no Cap. 1, o posicionamento geométrico entre a carga e \mathbf{D} é o mostrado na Fig. 2.7. O fluxo do vetor \mathbf{D} através da superfície que envolve o volume da esfera é diferente de zero. **(teor. divergência)**

2.2.3 As equações de Maxwell sob a forma integral

As equações de Maxwell sob a forma local são extremamente convenientes para que façamos manipulações matemáticas, pois elas são de escrita compacta e as operações envolvendo gradiente, divergente e rotacional são bem conhecidas e simples. Podemos, por exemplo, sem dificuldades, obter as equações diferenciais de segunda ordem envolvendo as grandezas eletromagnéticas.

No entanto, para a resolução analítica de problemas,

onde por exemplo,

desejamos conhecer \mathbf{H} criado por \mathbf{J}

é mais conveniente utilizar as equações de Maxwell sob a forma integral.

Neste caso, é necessário que associemos estas equações a

volumes ou seções nos quais devemos integrá-las.

A utilização dos teoremas da divergência e de Stokes são fundamentais para que,

na resolução, não precisemos manipular diretamente com divergentes ou rotacionais.

Veremos agora as quatro equações de Maxwell sob a forma integral.

- equação 2.1

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

Definamos uma superfície S onde desejamos realizar um estudo envolvendo correntes e campos magnéticos.

Chamemos $L(S)$ a linha envolvendo esta superfície; aplicando a integração em S na equação acima, temos:

$$\int_S \text{rot}\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.7)$$

Teorema de Stokes (cálculo vectorial)

Circulação (integral de linha) de um campo vectorial E ao longo de uma linha fechada Γ_f = fluxo do rotacional de E através da área A .

$$\int_{\Gamma_f} E \cdot dl = \int_A \nabla \times E \cdot dA$$

Temos então, do lado esquerdo desta equação, a circulação de campo \mathbf{H} ao longo de $L(S)$. No lado direito temos dois termos:

- O primeiro, chamado "corrente de condução" I ;

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

que representa as correntes, atravessando a seção S , em geral, através de condutores.

- O segundo, é chamado "corrente de deslocamento" I_d ;

$$I_d = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Este termo pode ter duas conotações. A primeira é relativa à ondas eletromagnéticas e representa a variação do campo elétrico ($\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$) que cria o campo magnético. A segunda, relativa a fenômenos capacitivos, será vista logo a seguir.

Como exemplo de utilização desta equação consideremos, para um caso estático, um fio infinito percorrido por uma corrente I ; suponhamos que deseja-se calcular o campo magnético criado por este fio a uma distância " r " do mesmo, conforme Fig. 2.8.

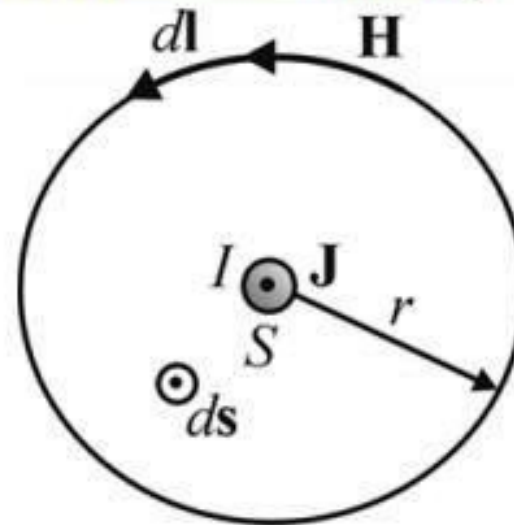


Figura 2.8 – campo criado por um fio infinito

Nesta figura temos uma vista do fio segundo o qual a corrente I (e sua densidade superficial \mathbf{J}) está saindo do plano da figura. Como superfície S escolhemos um círculo de raio " r ". Em qualquer um dos pontos da circunferência $L(S)$ podemos obter o valor do campo \mathbf{H} .

Neste caso só temos a corrente I de condução. A equação sob a forma integral é:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Como \mathbf{H} e \mathbf{J} são ligados por um rotacional, \mathbf{H} é tangencial e, por uma questão de homogeneidade, podemos supor que seu módulo, para um " r " constante, é também constante. Como \mathbf{H} e $d\mathbf{l}$ são colineares e de mesmo sentido (Fig. 2.8), temos, para o primeiro lado da equação acima

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L(S)} H dl = H \oint_{L(S)} dl = 2\pi r$$

Quanto ao segundo membro da equação, podemos destacar (na superfície total S) a superfície S_f do fio onde $J \neq 0$. É evidente que a integração só será diferente de zero na seção do fio e que ela valerá I .

Obtemos assim

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (2.7)$$

Esta equação, escrita sob esta forma, é chamada “Lei de Ampère”.

Neste caso particular, levando em conta o desenvolvimento de ambos os lados da equação, temos:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (2.8)$$

Vejamos agora um exemplo onde temos um dispositivo constituído por duas placas metálicas paralelas separadas por um material isolante, conforme Fig. 2.9a.

CAPACITOR

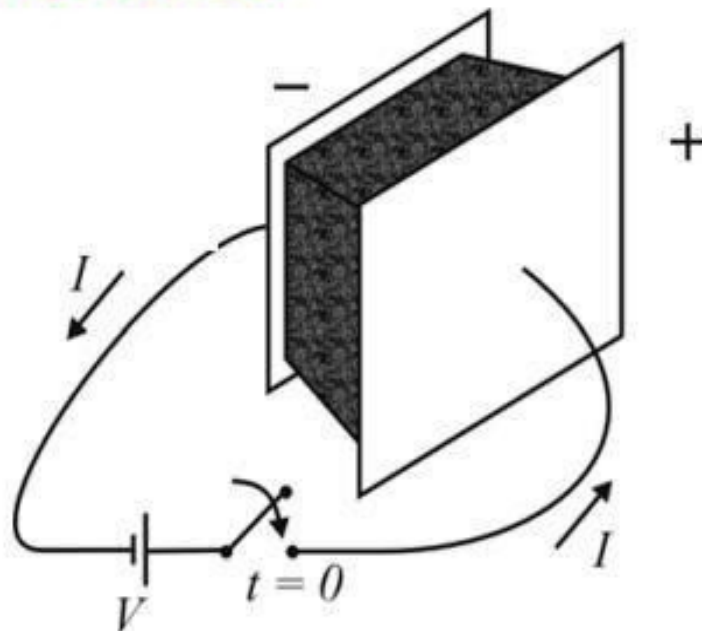


Figura 2.9a – capacitor ligado a uma fonte de tensão

Suponhamos que em $t=0$, a chave é fechada; haverá então uma corrente I que será criada. No entanto, esta corrente não atravessará o isolante, e sua existência é relacionada com o movimento de cargas positivas e negativas para as placas.

Representemos esta situação sob a forma esquemática da Fig. 2.9b.

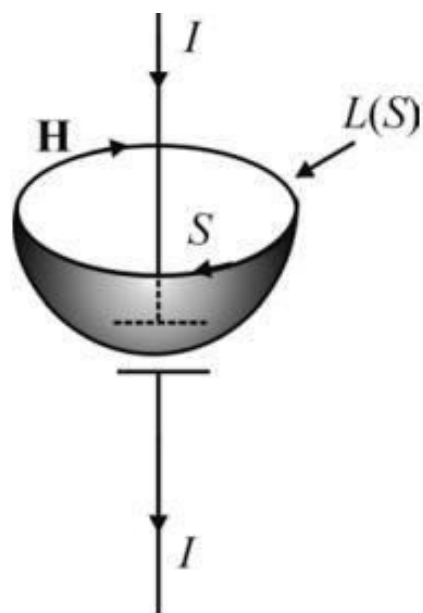


Figura 2.9b

Havendo corrente no fio, existe então o campo magnético \mathbf{H} .

Porém, nada impede que a superfície S , correspondente ao $L(S)$ passe pelo meio isolante por onde não há corrente. Neste caso, onde $J=0$, é o termo $\partial\mathbf{D}/\partial t$ (cuja integração fornece a corrente de deslocamento) o responsável pela geração de \mathbf{H} . Assim, o campo \mathbf{H} é justificado pela variação temporal de indução elétrica \mathbf{D} no dielétrico, não havendo corrente entre as placas.

- equação 2.2

À equação $\text{div}\mathbf{B} = 0$ associaremos um volume dentro do qual \mathbf{B} é definido. Chamaremos $S(V)$ a superfície que envolve o volume V . Temos então, utilizando o teorema da divergência que:

$$\int_V \text{div}\mathbf{B} dv = \oint_{S(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.9)$$

significando que o somatório do fluxo de \mathbf{B} através de uma superfície fechada é nulo, ou seja, que o fluxo magnético é conservativo. Em outras palavras, o fluxo que penetra num volume é idêntico ao que sai do mesmo. Sugerimos a leitura da seção 1.5.3, onde a conservação de fluxo é mostrada num tubo de fluxo.

- equação 2.3

A equação $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ é certamente a mais complexa e veremos aqui

sucintamente um exemplo

Imaginemos uma superfície S onde \mathbf{E} e \mathbf{B} sejam definidos e apliquemos a integração

$$\int_S \text{rot}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Pelo teorema de Stokes obtemos

$$\oint_{L(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

onde $L(S)$ é a linha que limita a superfície S

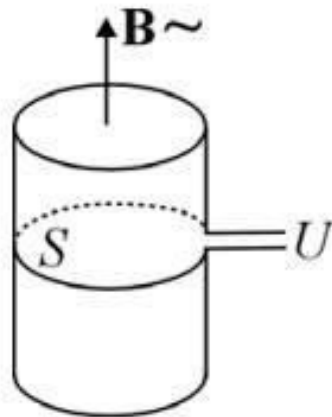


Figura 2.10a – variação de B e campo E

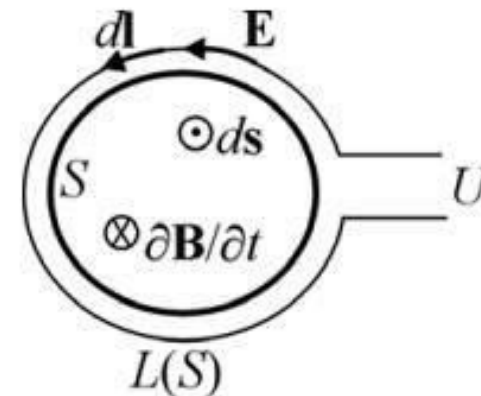


Figura 2.10b

Consideremos a existência de um núcleo de um material magnético de tal maneira que este possua a propriedade de manter B constante em sua seção S . No entanto, suporemos que B é variável no tempo. Como superfície S utilizaremos a própria seção deste núcleo. Uma espira de material condutor será colocada em contato com este núcleo (porém isolada eletricamente do mesmo), de tal forma que possamos considerá-la como sendo o caminho $L(S)$.

Fazendo uma analogia entre as equações $rot\mathbf{H} = \mathbf{J}$ e $rot\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ notamos que a

variação de \mathbf{B} cria um campo elétrico \mathbf{E} na espira que será rotacional em relação à $-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$, da mesma forma que \mathbf{J} cria \mathbf{H} .

Observemos inicialmente que, assumindo como sentido de $d\mathbf{s}$ o mostrado na Fig. 2.10b, o sentido de $d\mathbf{l}$ deve ser o indicado na mesma figura. Como o sentido de $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ assumido, temos

$$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

mostrando a coerência do posicionamento dos vetores da Fig. 2.10b.

$$\oint_{L(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$