Laboratório de Física IV

Profª Patricia Teles

Sala 3006-A

Email: athenafma@gmail.com

<u>Aula1</u>: Sobre o Curso e Método dos Mínimos Quadrados (regressão linear)

Sobre o curso

Link para informações e material do curso:
http://dfnae.fis.uerj.br/twiki/bin/view/DFNAE/FisicaExp#Slides_Profa_Patricia

Cronograma do Curso: link

28/02: MMQ
14/03: Intensidade Luminosa
21/03: Polarização - Mallus
28/03: Reflexão
04/04: Refração
11/04: Fendas - Young
18/04: Reposição
25/04: Prova 1
02/05: Difração 1
09/05: Difração 2
16/05: Espectroscopia
23/05: Constante de Rydberg
30/05: Carga/Massa
06/06: Reposição
13/06: Prova 2

*Ver Caderno de Lab. do IF Unicamp link

Relatório (r_i) de cada prática deverá ser entregue ao professor na semana seguinte à execução e deve ser elaborado seguindo o seguinte protocolo*:

1. **Título do experimento, data de realização e colaboradores;**
2. **Objetivos do experimento;**
3. **Roteiro dos procedimentos experimentais;**
4. **Esquema do aparato utilizado;**
5. **Descrição dos principais instrumentos;**
6. **Dados medidos;**
7. **Cálculos;**
8. **Gráficos;**
9. **Resultados e conclusões.**

$$NL = \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)F, \quad \text{com } F = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i\, r_i$$

F = Fator presença = (presença na aula *i* (0 ou 1) x nota do relatorio *i*) / nro de práticas

Normas:

- presença obrigatória;
- frequência < 75% reprovação por falta;
- Entrega de resultados que não sejam obtidos pelo estudante ou seu grupo serão anulados;

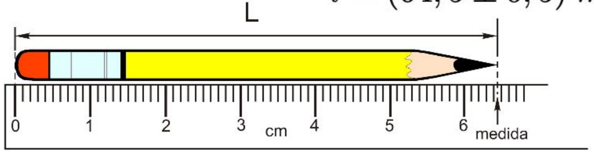
Medidas e Incertezas

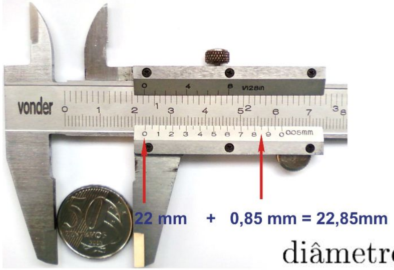
Experimentos em qualquer área:

- envolvem medidas às quais estão relacionadas incertezas: estimar, reduzir ou controlar essas incertezas (erros);
- qualquer medida só faz sentido se vier acompanhada de sua incerteza (erro): **(valor da medida +/- erro)**
- Classificação geral de medidas:
    - **Diretas**: valores obtidos diretamente de escalas ou especificações de instrumentos
        - No caso de escalas (régua, paquímetro etc): a incerteza é dada por L/2 onde L é o valor da menor divisão

$$\sigma_{ap} = 1/2 \times (precis\tilde{a}o\ da\ r\acute{e}gua\ milimetrada) = 0,5mm$$

$$l = (64,5 \pm 0,5)\ mm$$

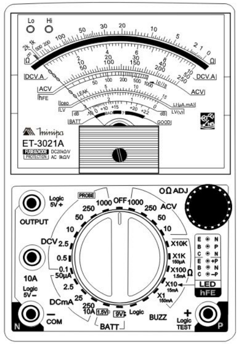




Paquimetro com precisao
1/N = 1/20 = 0.05 mm,
onde N=20 é o nro de divisoes do
Nonio (ou Vernier metrico)

$$\text{diâmetro da moeda é } (22,85 \pm 0,05\ mm)$$

- No caso de instrumentos (fotômetro, multímetro etc):



Multimetro Analogico (especificações)
Resistência
Precisão: ± 3,0% arco de escala

Multimetro Digital (especificações)
Precisão: 2000Ω ~ 200kΩ ±(0,8%+5D)

Medidas e Incertezas (continuação)

- Classificação geral de medidas:
  - **Indiretas**: medição de grandezas que dependem de outras grandezas, as quais podem ser medidas diretamente.
    - Supõem um modelo ou uma relação matemática que permite obter uma grandeza desconhecida (grandeza de saida) através de grandezas conhecidas (grandeza de entrada)
    - Observar que as incertezas calculadas nas medidas diretas são propagadas para as medidas indiretas (**propagação de erros**)

$$g = 4\pi^2 l/T^2 \quad u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{\bar{T}^2}\right]^2 u^2(l) + \left[4\pi^2 \frac{2\bar{l}}{\bar{T}^3}\right]^2 u^2(T)$$

(1) as melhores estimativas $\bar{l} = 1{,}000\ m$ e $\bar{T} = 2{,}00\ s$; e (2) as incertezas de medição $u(l) = 0{,}005\ m$ e $u(T) = 0{,}01\ s$ das grandezas de entrada. Com isso, obtemos:

$$u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{2{,}00^2}\right]^2 0{,}005^2 + \left[4\pi^2 \frac{2 \cdot 1{,}000}{2{,}00^3}\right]^2 0{,}01^2 \cong \pi^4 \cdot 0{,}005^2 + \pi^4 \cdot 0{,}01^2$$

$$\therefore u(g) \cong \sqrt{\pi^4 \cdot 0{,}005^2 + \pi^4 \cdot 0{,}01^2} \cong 0{,}1103\ m/s^2$$

Enfim, arredondando $u(g)$ para apresentar somente um algarismo não-nulo e arredondando $\bar{g}$ para apresentar a mesma quantidade de algarismos após a vírgula que $u(g)$, temos que a aceleração local da gravidade pode ser expressa por $(9{,}9 \pm 0{,}1)\ m/s^2$. Ou seja, no nosso exemplo, o valor (verdadeiro) da aceleração local da gravidade provavelmente pertence ao intervalo de $9{,}8\ m/s^2$ a $10{,}0\ m/s^2$.

Considere o seguinte modelo matemático genérico que relacione uma grandeza de saída y às grandezas de entrada $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Seja $\bar{x}_i$ a melhor estimativa da i-ésima grandeza de entrada e $u(x_i)$ sua incerteza de medição. Assumindo que a correlação entre as n grandezas de entrada pode ser desprezada e que o modelo matemático $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é aproximadamente linear na região de interesse, é possível estimar a incerteza $u(y)$ da grandeza de saída pela seguinte lei de propagação:

$$u^2(y) \cong \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2 u^2(x_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^2 u^2(x_2) + \cdots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^2 u^2(x_n)$$

Medidas e Incertezas (continuação)

No procedimento de tomada de dados no laboratório deve-se prezar por

- Minimizar o quanto puder as fontes de erros sistemáticos em suas medidas.

➡ Isto é, tomar cuidado na montagem, nas conexões, tomadas, modo de operação, escalas, o alinhamento, etc, dos seus aparelhos.

ERROS SISTEMÁTICOS
menor exactidão

- más condições de calibração dos instrumentos de medida
- uso destes instrumentos em condições diferentes das que são recomendadas
- leituras sistematicamente incorrectas do observador (e.g. paralaxe)
- utilização de um método físico que não é adequado à descrição da experiência.

ERROS ALEATÓRIOS
menor precisão

- falta de sensibilidade dos instrumentos e do observador
- leituras incorrectas (mas não sistemáticas)
- ruído (vibrações mecânicas ou eléctricas)
- processos estatísticos intrínsecos ao fenómeno observado (e.g. declínio radioactivo).

A **precisão** de uma série de medições é o grau da concordância entre determinações repetidas. A **exactidão** é tanto maior quanto menor for a distância entre a medida (ou a média de determinações repetidas) e um valor "verdadeiro", "nominal", "tomado como referência" ou "aceite". A esta distância damos o nome de **erro experimental**.

Referencia e slide Prof. Antonio

Algarismos Significativos

Qualquer algarismo à **direita**, no sentido usual de leitura, do **primeiro algarismo não nulo**

Exemplos:

0,02	**⇒ 1 algarismo significativo**
0,2	**⇒ 1 algarismo significativo**
2	**⇒ 1 algarismo significativo**
2,0	**⇒ 2 algarismos significativos**
2,00	**⇒ 3 algarismos significativos**
2000	**⇒ 4 algarismos significativos**
$2,0 \times 10^3$	**⇒ 2 algarismos significativos**

Aproximações

3,870001 → 3,87
3,874999 → 3,87
3,875001 → 3,88
3,879999 → 3,88
3,875000 → ?

Convenção "ímpar":
3,875000 → 3,87
3,885000 → 3,89
3,895000 → 3,89

Convenção "par":
3,875000 → 3,88
3,885000 → 3,88
3,895000 → 3,90

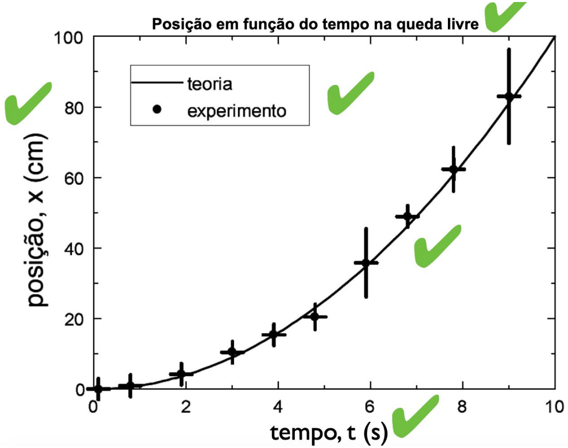
Slide Prof. Antonio

Gráficos

Devem conter:

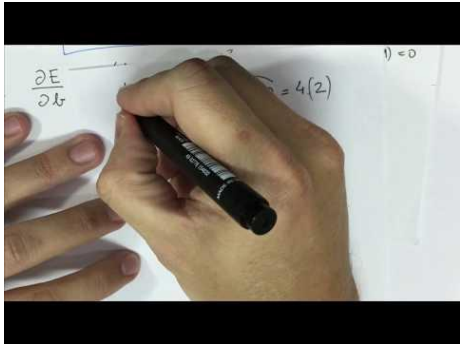
1. **os pontos experimentais** com seus erros quando aplicável
2. **a curva teórica** obtida através do método dos mínimos quadrados, quando aplicável

Observe as unidades utilizadas, use símbolos diferentes para os pontos experimentais e os pontos usados para traçar a reta teórica. Preste atenção na escala do gráfico, os valores e grandezas de cada eixo, e o título do gráfico, que devem garantir que o gráfico seja compreensível para alguém que não fez o experimento.



Método dos Mínimos Quadrados (caso linear)

Video muito didático sobre MMQ, inclusive ensinando como usar calculadora para aplicar o método



Pelo MMQ a função que melhor se ajusta ao conjunto de dados experimentais é aquela que minimiza a soma do quadrado dos desvios.

Em outras palavras, para medir o erro entre qualquer ponto (xi,yi) e a reta g(x) temos:

Erro = yi - g(xi) que é a distância entre o ponto e a reta.

Repare que se somarmos essas distancias pode acontecer que elas se anulem, então para evitar isso tomamos o módulo Erro = |yi - g(xi)|

As menores distâncias, melhor ajuste dos pontos à reta, deve abarcar todos os pontos

Erro = $\sum_i |yi - g(xi)|$ e esse erro deve ser "minimo"

O ponto de mínimo de uma função é calculado usando derivadas parciais. Por outro lado a função módulo não é diferenciável (tem um "bico") então no lugar dela usamos a funcão quadrática (se erro é mínimo então o erro ao quadrado também é mínimo.

Assim, Erro = $\sum_i (yi - g(xi))^2 = \sum_i (yi - axi - b))^2$

Para obter o mínimo Erro, calculamos as derivadas parciais em relação à "a" e à "b" e as igualamos a zero.

Após alguma algebra (ver vídeo com detalhes) chega-se aos coeficientes angular "a" e linear "b":

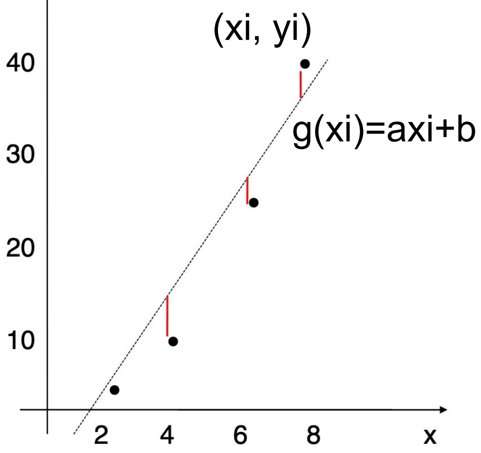
$a = (N \sum_i xi - \sum_i xi \sum_i yi) / N \sum_i xi\text{^}2 - (\sum_i xi)\text{^}2$ e $b=(\sum_i yi - a\sum_i xi) / N$

Com os valores acima se obtem a reta g(x) que melhor se ajusta aos pontos do gráfico.

Nesse caso g(x) = 6.55x - 12.5.

Mas ainda precisamos calcular as incertezas associadas aos coeficientes "a" e "b"

i	1	2	3	4
x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	40



Observação: Os resultados dos cálculos parciais, necessários para aplicação do método dos mínimos quadrados, devem ser colocados nas tabelas 2 e 3. Resultados fora da tabela não serão considerados.

Os coeficientes angular m' e linear b', da reta de ajuste, $y' = m'x + b'$, são dados por:

$$m' = \frac{M_{xy}}{M_{xx}} \qquad \text{e} \qquad b' = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i - m'\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

onde

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) \qquad \text{e} \qquad M_{xx} = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

Os erros associados ao coeficiente angular, $\epsilon_{m'}$ e ao coeficiente linear $\epsilon_{b'}$, bem como o desvio padrão dos dados experimentais são dados respectivamente por:

$$\epsilon_{m'} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{M_{xx}}}; \quad \epsilon_{b'} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N M_{xx}} \sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad \text{e} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - (m'x_i + b')\right)^2$$

De acordo com nomenclatura slide anterior: m’ ⇔ a e b’ ⇔ b

Apesar da planilha disponibilizada, os alunos deverão preencher essa tabela.

	x_i	y_i	${x_i}^2$	$x_i \cdot y_i$	$(y_i - (m'x_i + b'))^2$
$\sum_{i=1}^{N}$					

Tabela 2: Cálculos Parciais Método dos Mínimos Quadrados

M_{xy}	M_{xx}	b'	m'	$\epsilon_{m'}$	$\epsilon_{b'}$

Tabela 3: Cálculos Parciais Método dos Mínimos Quadrados

Exemplo de apresentação adequada de resultados

i	y_i	x_i	x.x		x.y					$[y_i\text{-}m.x_i\text{-}b]^2$		
1	0.174	0.122	0.015		0.021					5.43E-07		
2	0.342	0.242	0.059		0.083					5.38E-05		
3	0.500	0.350	0.123		0.175					6.08E-05		
4	0.643	0.438	0.192		0.282					3.70E-05		
5	0.766	0.522	0.273		0.400					3.40E-05		
6	0.866	0.588	0.345		0.509					8.09E-05		
7	0.940	0.649	0.422		0.610					4.24E-05		
N	∑y	∑x	∑x.x		∑x.y	M_{xx}	M_{xy}	m	b	σ^2	ε_m	ε_b
7	4.231	2.911	1.429		2.080	0.218	0.321	1.467	-5.7E-03	6.19E-05	6.6E-03	3.7E-02

$$m = \frac{M_{xy}}{M_{xx}} = 1{,}467 \pm 0{,}007 \text{ [unidades]}$$

nesse caso, mantém-se 3 casas decimais

Se os parametros m ou b tiverem dimensões físicas tem que especificar as **unidades** !!!

- conservar 1 (ou 2, se for 1,X) algarismo(s) significativo(s) no **erro ε**
- o erro define **o número de casas decimais** na média (têm que ter o mesmo)

$$b = \text{-}0{,}006 \pm 0{,}04 = \text{-}0{,}01 \pm 0{,}04 \text{ [unidades]}$$

mantém-se só 2 casas decimais

Equação da reta

$$y = 1{,}467\, x - 0{,}01 \text{ [unid.]}$$

slide Prof. Antonio

Próxima Aula: 14 de Março
Prática 1: Intensidade Luminosa