Estimativas e Erros

Propagação de erros e Ajuste de funções

Algumas referências

Estimativas e Erros em Experimentos de Física - Vitor Oguri *et al* (EdUERJ)

Fundamentos da Teoria de Erros - José Henrique Vuolo

Statistical Data Analysis - Glen Cowan (Inglês)

Valor esperado de uma grandeza

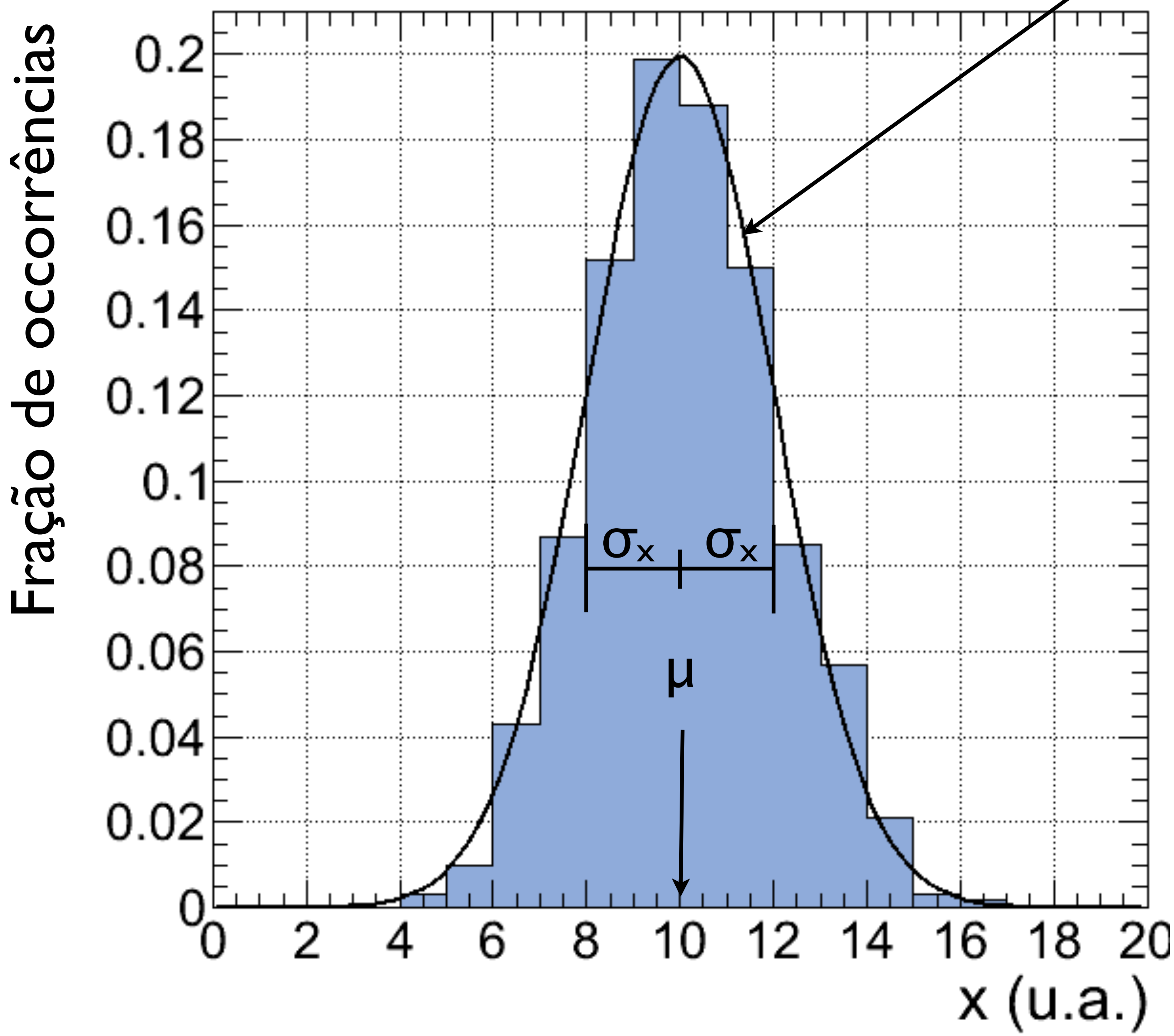
Valor esperado: valor hipotético, μ, de uma grandeza, equivalente ao valor médio de medições repetidas <u>indefinidamente</u>

Fazemos uma <u>estimativa</u> para o valor esperado, a partir de um <u>conjunto finito</u> de medidas de uma grandeza

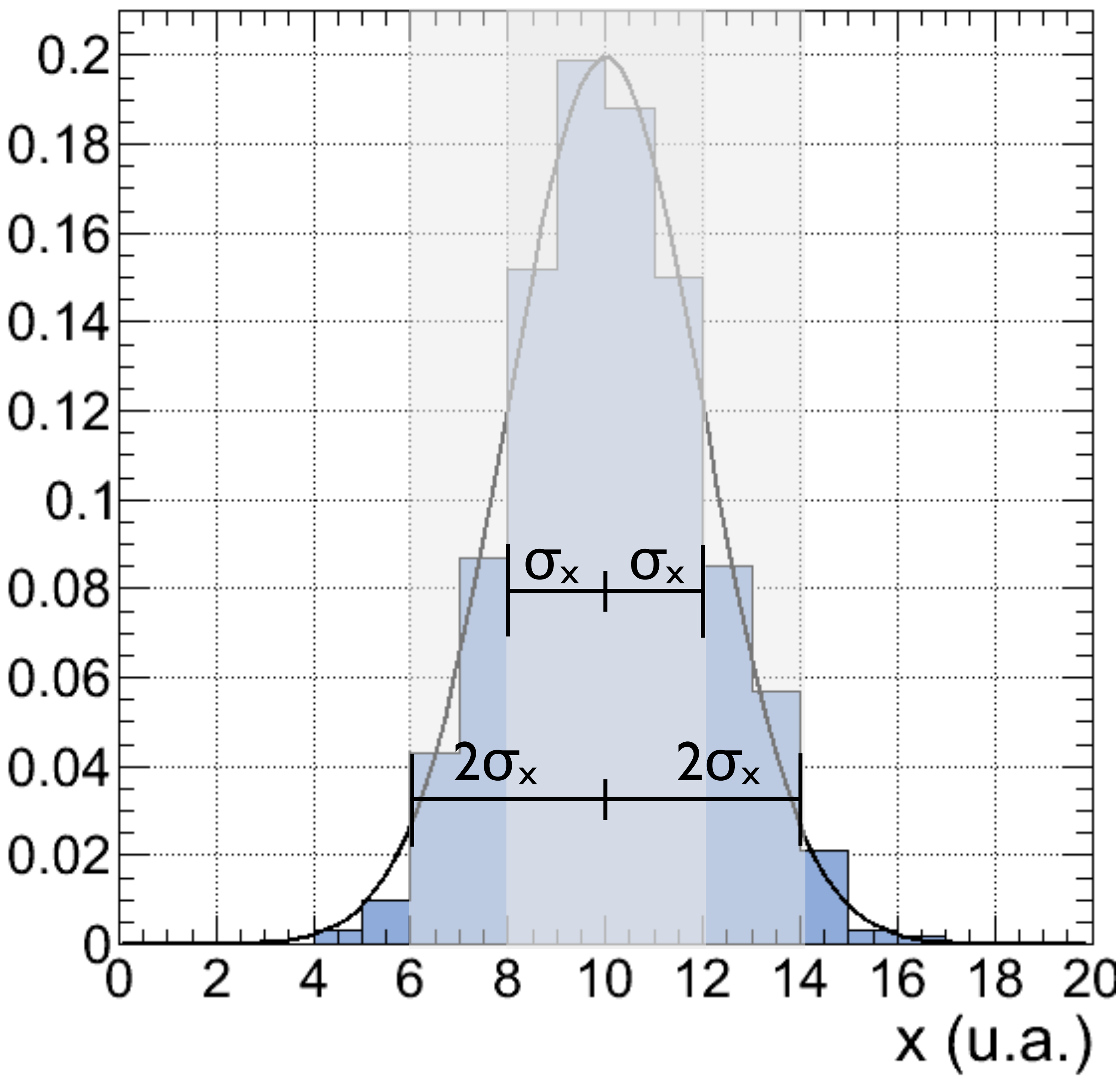
Chamamos esse conjunto finito de uma <u>amostra</u> de todos os possíveis valores para as medidas, ou <u>população</u>

Distribuição Gaussiana

$$f(x;\mu,\sigma_x) = A \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$



Distribuição Gaussiana



68,3% da área está entre $(\mu - \sigma_x)$ e $(\mu + \sigma_x)$

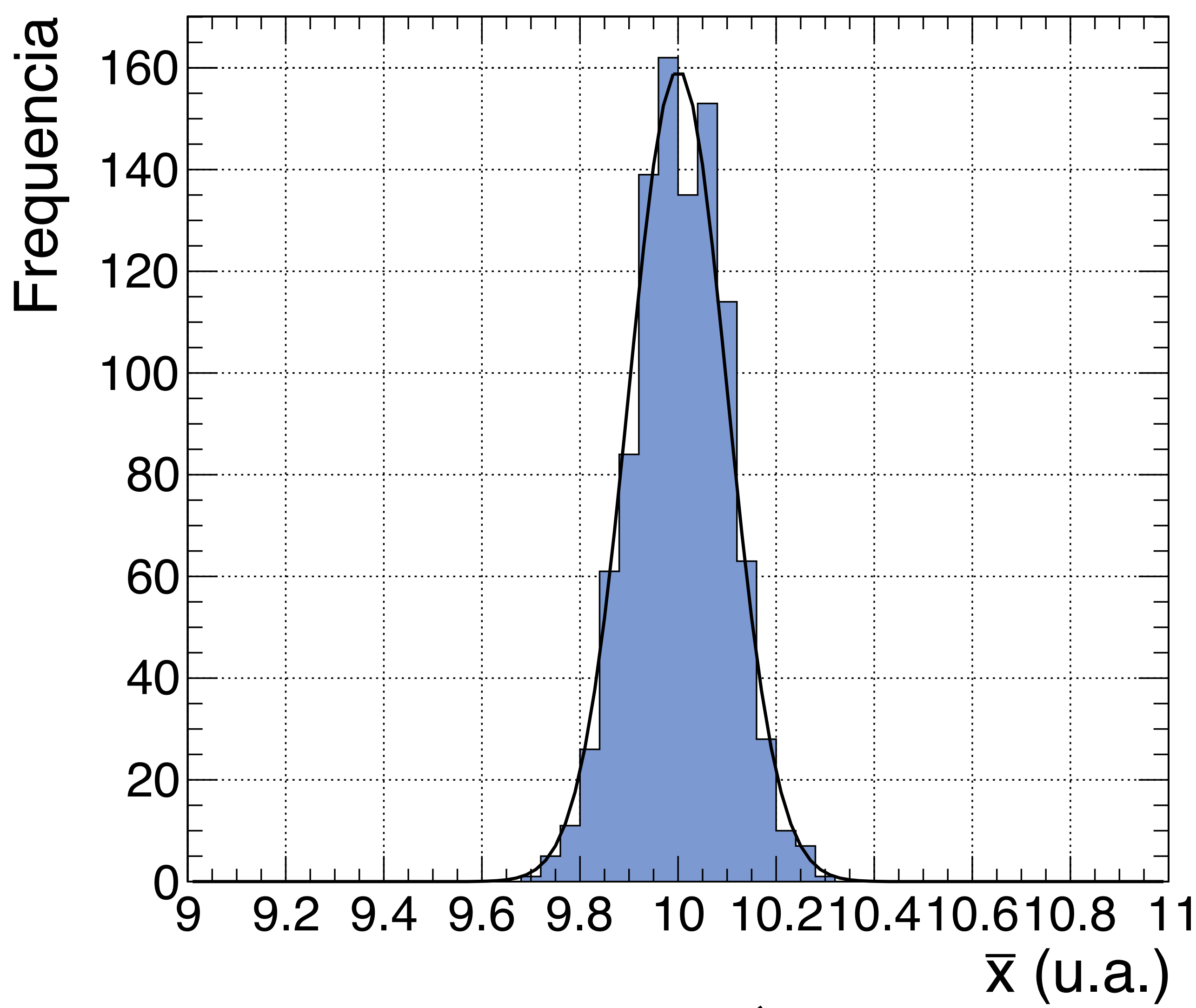
95,5% da área está entre $(\mu - 2\sigma_x)$ e $(\mu + 2\sigma_x)$

99,7% da área está entre $(\mu - 3\sigma_x)$ e $(\mu + 3\sigma_x)$

...

Lei dos Erros

"Lei dos Erros": Para um número indefinidamente grande de medidas a distribuição das frequências das médias se aproxima de uma distribuição Gaussiana



$$f\left(x;\mu,\sigma_x\right) = A\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Intervalo e nível de confiança (Dist. Gaussiana)

Intervalo de Confiança	Nível de Confiança (CL)
$(\overline{x} - 0{,}67\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 0{,}67\,\sigma_{\overline{x}})$	50,0 %
$(\overline{x} - 1{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}00\,\sigma_{\overline{x}})$	68,3 %
$(\overline{x} - 1{,}65\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}65\,\sigma_{\overline{x}})$	90,0 %
$(\overline{x} - 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}})$	95,0 %
$(\overline{x} - 2{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 2{,}00\sigma_{\overline{x}})$	95,5 %
$(\overline{x} - 3{,}00\,\sigma_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + 3{,}00\,\sigma_{\overline{x}})$	99,7 %

Intervalo de confiança a nível de confiança de 68,3%

Intervalo de confiança a nível de confiança de 95,5%

Em geral para um intervalo de confiança [a,b], o nível de confiança pode ser interpretado como a fração de ocorrências em que o valor esperado μ se encontra neste intervalo, se o experimento for repetido um grande número de vezes.

Propagação de erros

- Propagação de erros

$$u = f\left(x\right)$$

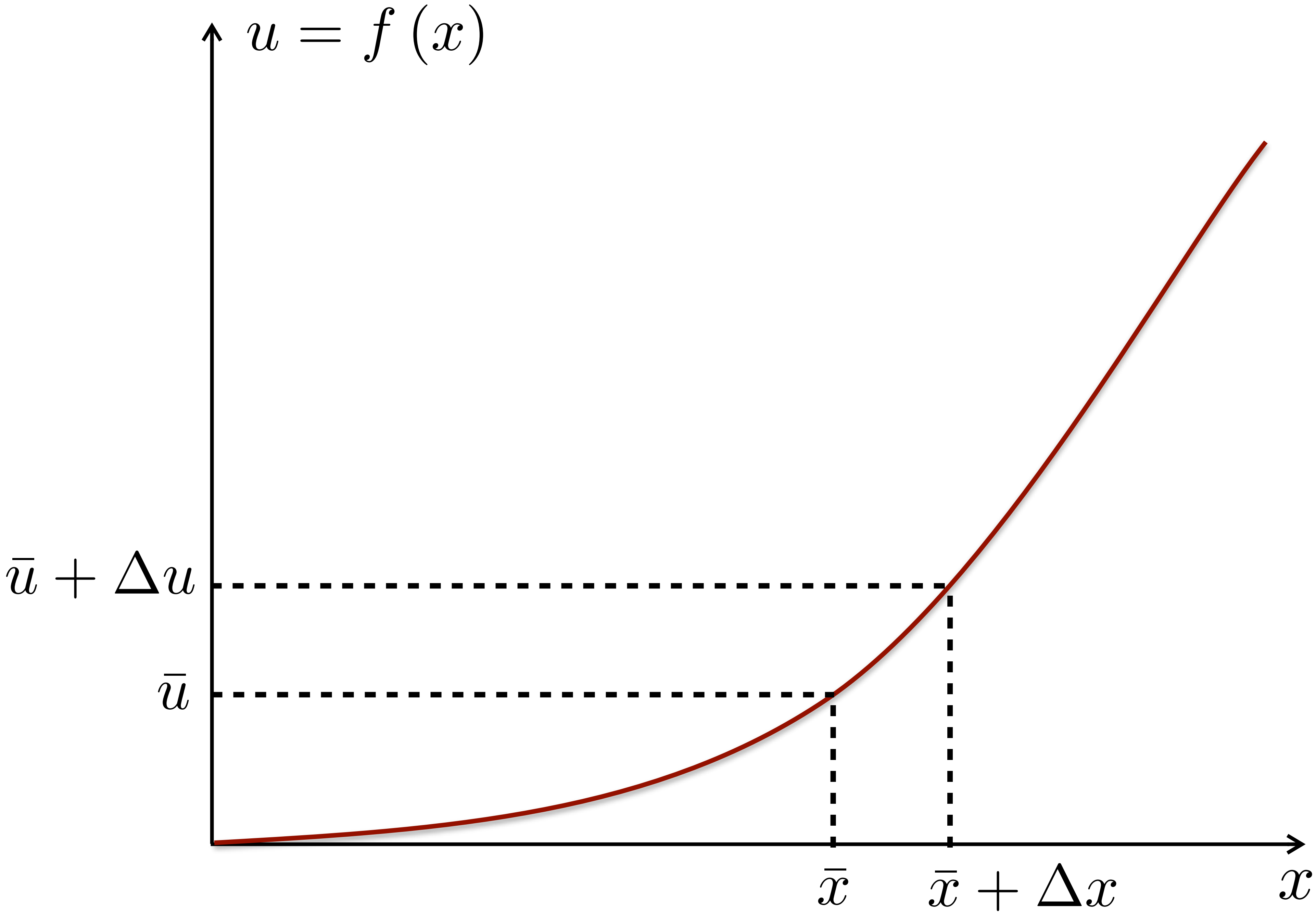
Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas diretas de uma grandeza x: $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

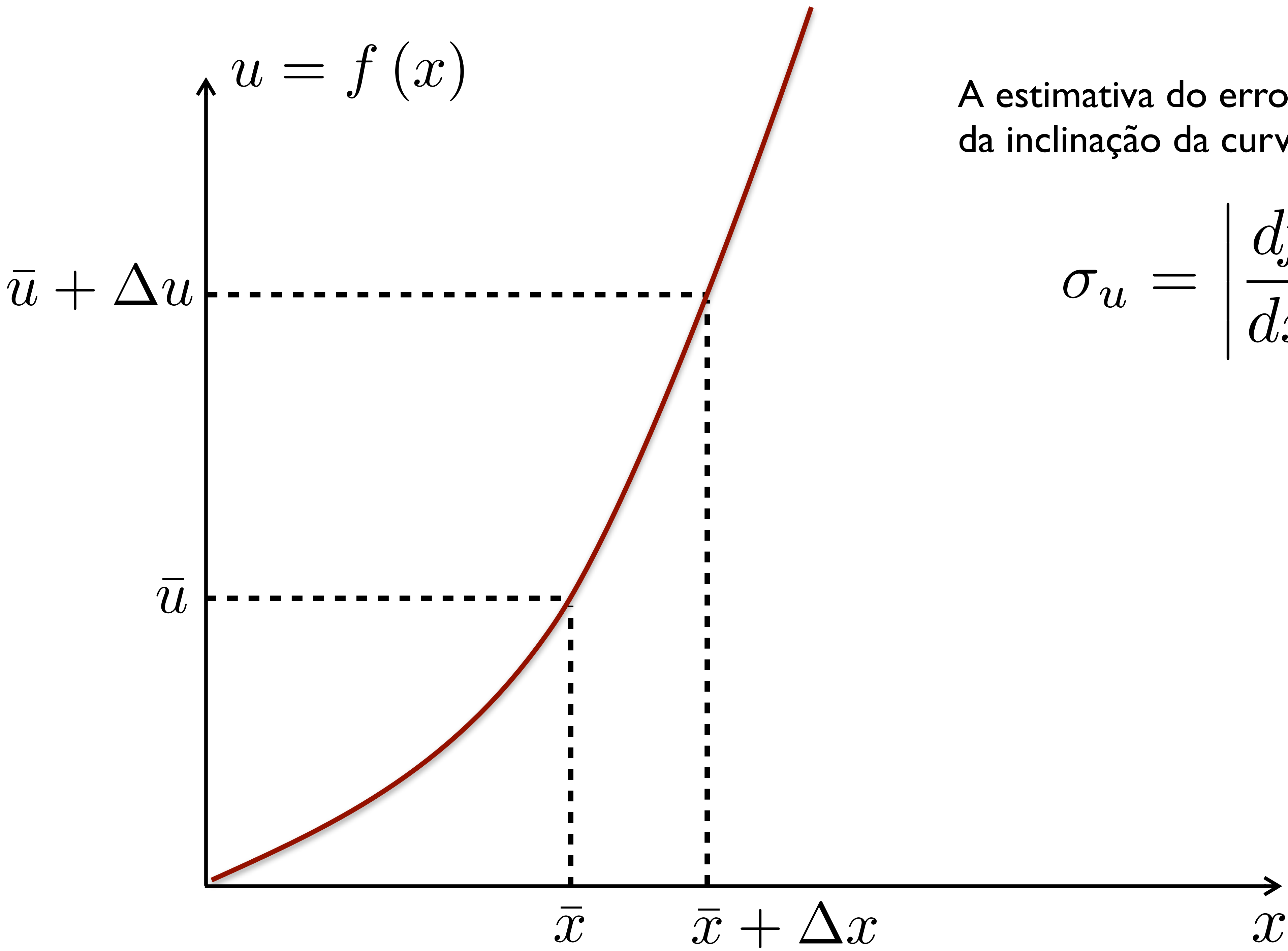
Consideremos a grandeza u como sendo uma função de medida indireta de uma grandeza x.

Como estimamos a incerteza de u? ==> Propagação de erro!

Propagação de erros



Propagação de erros



A estimativa do erro de u depende da inclinação da curva.

$$\sigma_u = \left| \frac{df}{dx} \right| \sigma_x$$

Propagação de erros

$$u = f(x)$$

Considerando que as medidas da grandeza x se distribuem em torno de $\bar{x}$ e que f(x) possa ser considerada como uma função linear de x no intervalo considerado.
Podemos expandir f(x) em uma série de Taylor em $\bar{x}$ até o termo linear da expansão.

$$u = f(x) = f(\bar{x}) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}} (x - \bar{x})$$

$$\bar{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i = f(\bar{x}) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}} \frac{1}{N} \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = f(\bar{x})$$

Propagação de erros

$$\bar{u} = f(\bar{x})$$

A variância do valor esperado de u é dada por:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\cancel{f(\bar{x})} + \left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}}(x_i - \bar{x}) - \cancel{f(\bar{x})}\right]^2$$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}}^2 \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}_{\sigma_x^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_u = \left|\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \sigma_x}$$

O erro da média será dado por:

$$\sigma_{\bar{u}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{N}} = \left|\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \left|\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \sigma_{\bar{x}}$$

Propagação de erros

- Estimativa padrão da incerteza

Exemplo:

$$u = \alpha x \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = |\alpha| \sigma_{\bar{x}}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \sigma_{\bar{u}} = \frac{|\alpha|}{\bar{x}^2} \sigma_{\bar{x}}$$

Propagação de erros

- Propagação de erros

$$u = f\left(x, y\right)$$

Estimativa da grandeza associada (medida indireta)

Medidas de duas grandezas x e y:

$$\left\{\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \ldots, \left(x_N, y_N\right)\right\}$$

Queremos obter: $\bar{u} \pm \sigma_{\bar{u}}$

Propagação de erros

- Em geral:

Considerando que as medidas das grandezas x e y se distribuem em torno de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e que f(x,y) possa ser considerada como uma função linear de x e y.
Podemos expandir f(x,y) em uma série de Taylor em $\bar{x}$ e $\bar{y}$ até o termo linear da expansão.

$$\boxed{u = f(x,y) \approx f(\bar{x},\bar{y}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}(x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}(y-\bar{y})}$$

Derivada parcial de $f(x,y)$ em função de x, com y constante, aplicada no ponto $(\bar{x},\bar{y})$

$$\boxed{\Rightarrow \bar{u} \approx f(\bar{x},\bar{y})}$$

Propagação de erros

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\cancel{f(\bar{x},\bar{y})} + \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(x_i - \bar{x}) + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(y_i - \bar{y}) - \cancel{f(\bar{x},\bar{y})}\right]^2$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(x_i - \bar{x}) + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}(y_i - \bar{y})\right]^2$$

$$\sigma_u^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}^2 \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}_{\sigma_x^2} + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}^2 \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}_{\sigma_y^2} + 2\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}_{\sigma_{xy}}$$

$$\boxed{\sigma_u^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}^2 \sigma_x^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}^2 \sigma_y^2 + 2\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{xy}}$$

Propagação de erros

Em geral: $u = f\left(x, y\right)$

$$\boxed{\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{xy}}$$

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{N} \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad ; \quad \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_y^2}{N}$$

$$\boxed{\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{xy}}$$

Ajuste de funções

- Ajuste de funções

$$y = f\left(x; a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$$

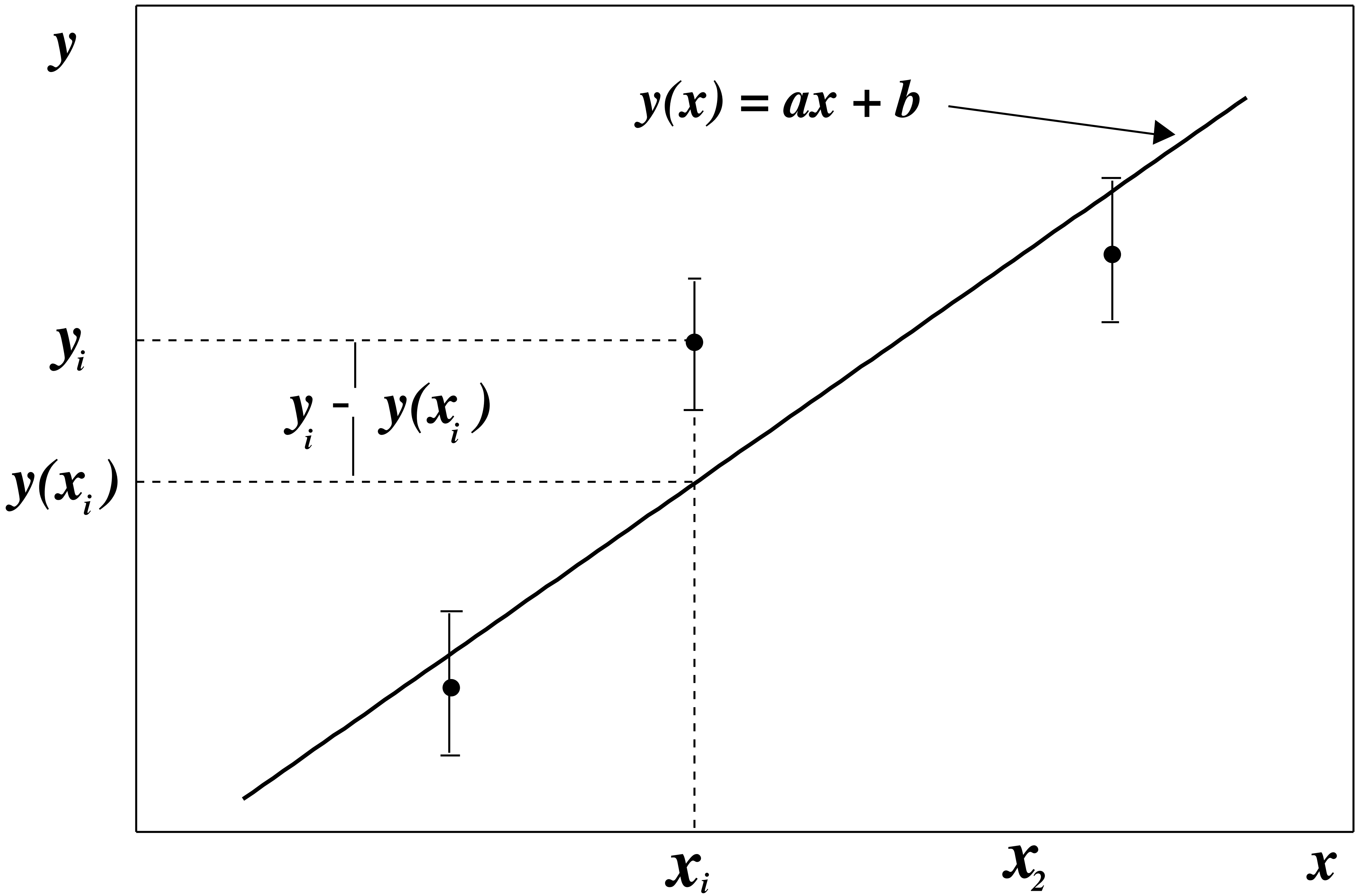
Medidas de duas grandezas x e y:

$$\left\{\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \ldots, \left(x_N, y_N\right)\right\}$$

Estimativa dos parâmetros (a partir de uma relação funcional postulada)

Queremos obter: $a_1 \pm \sigma_{a_1}, \ldots, a_p \pm \sigma_{a_p}$

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear



Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

- Queremos minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre a medidas observadas e os valores previstos pela relação funcional entre y e x:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$$

Medida observada

$$y = f(x_i; a, b) = ax_i + b$$

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i\left(y_i - ax_i - b\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - ax_i - b\right) = 0$$

$$N\left(\overline{xy} - a\overline{x^2} - b\bar{x}\right) = 0 \qquad \Rightarrow a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$N\left(\bar{y} - a\bar{x} - b\right) = 0 \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

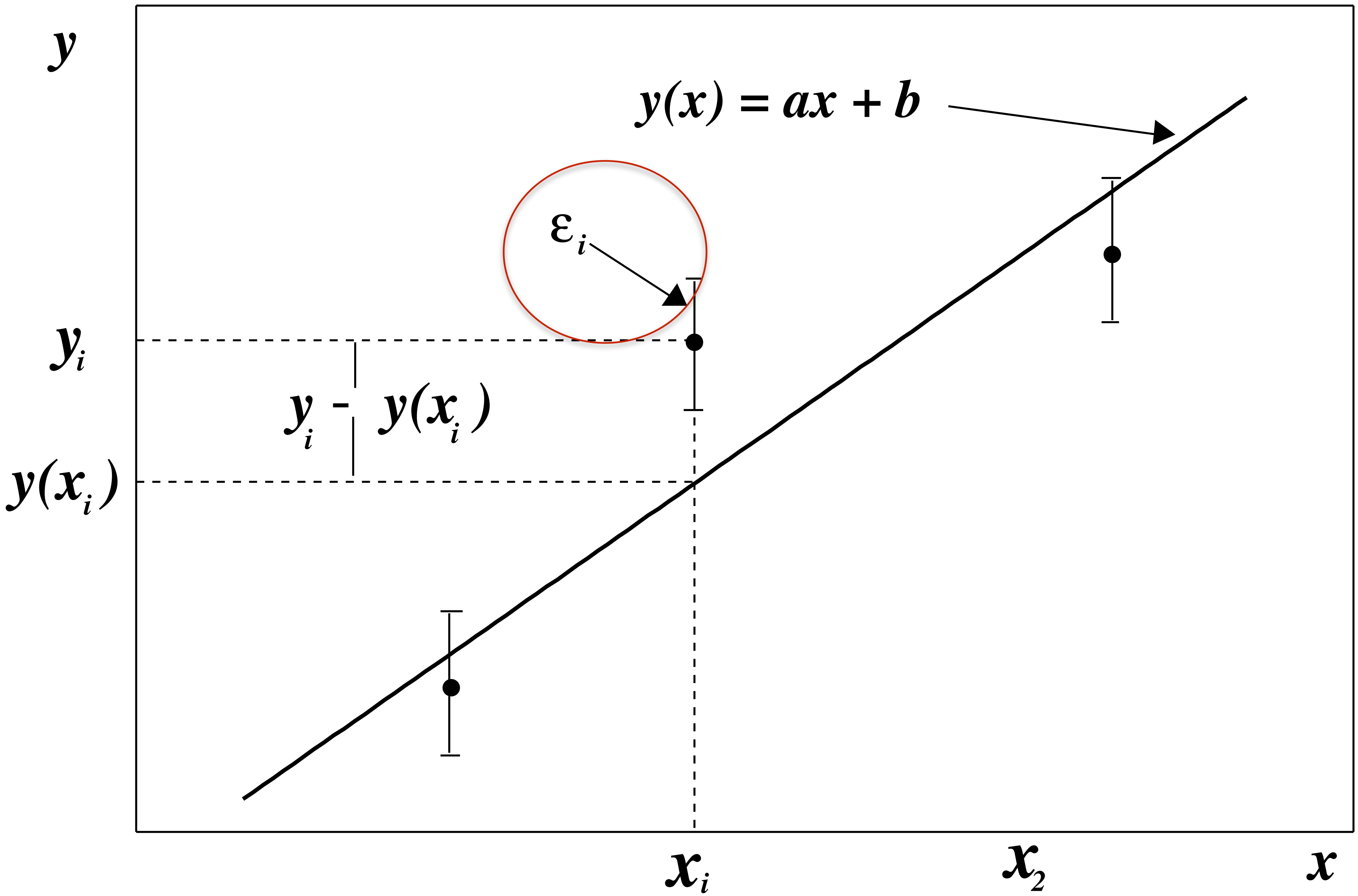
- As estimativas dos parâmetros e suas incertezas são dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ b &= \bar{y} - a\bar{x} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{1}{\sigma_x}\frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}} \\ \sigma_b &= \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}} \end{aligned}}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2}{N-2}} = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{N-2}\left(1 - r^2\right)}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear



Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear com peso

- No caso anterior assumimos que as incertezas nas medidas de y são desconhecidas. Em geral consideramos o erro em cada medida (σ_i):

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\underbrace{\sigma_i}_{\text{Erro em cada medida}}} \right]^2$$

Questões:

Deduza as expressões para as estimativas dos parâmetros segundo o Método dos Mínimos Quadrados.

Como incertezas de medição da variável x podem ser incluídas no método?

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear com peso

$$S\left(a,b\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i-y\left(x_i\right)}{\sigma_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i-\left(ax_i+b\right)}{\sigma_i}\right]^2$$

$$a=\frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2\left(x_i-\overline{x}\right)y_i=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x^2}$$

$$b=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i-a\overline{x}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear com peso

$$a = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 (x_i - \overline{x})\, y_i = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 y_i - a\overline{x}$$

$$\boxed{\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 x_i = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i}$$

$$w_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 (x_i - \overline{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear com peso

$$a = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 (x_i - \overline{x})\, y_i = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 y_i - a\overline{x}$$

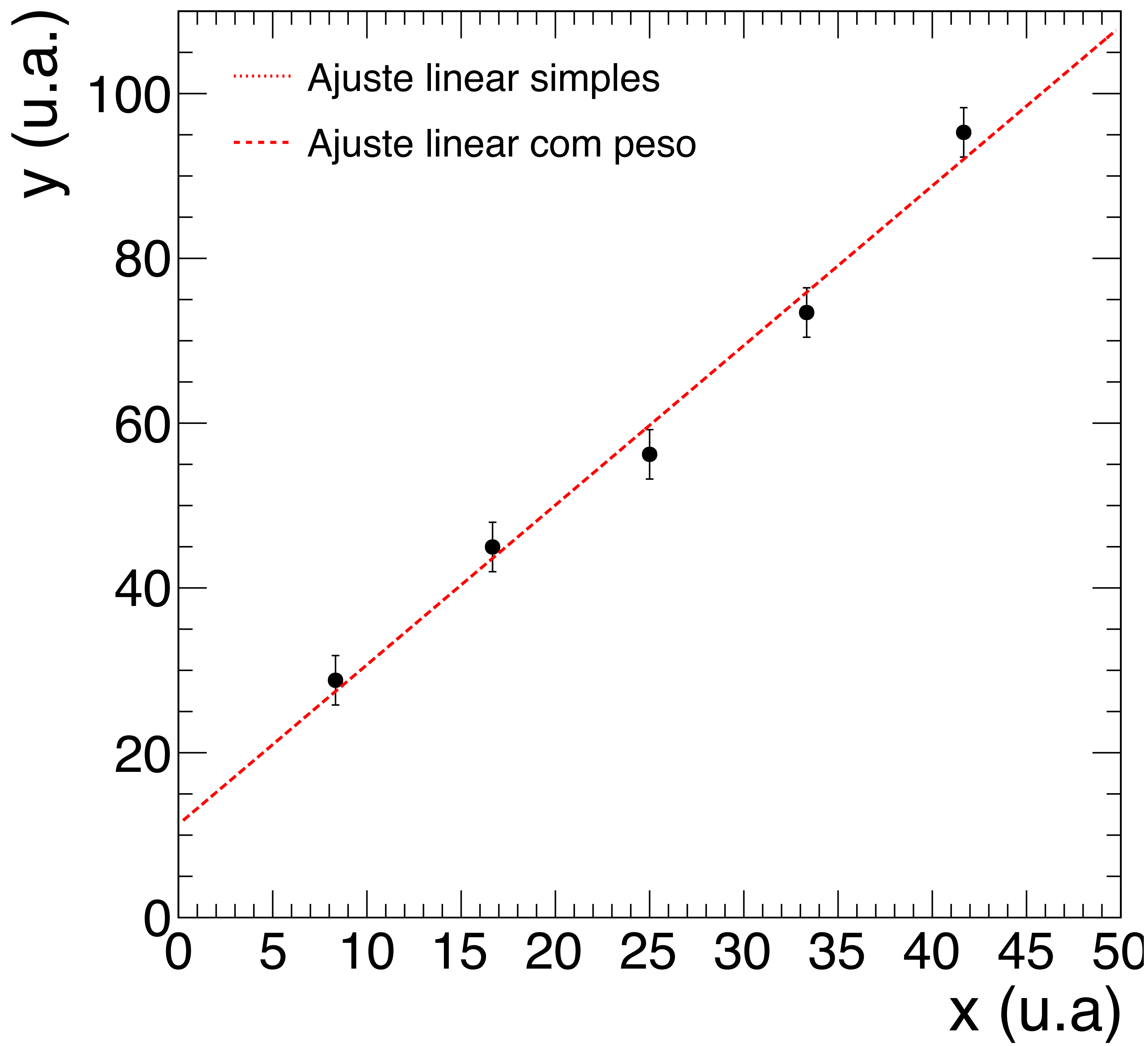
$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma}{\sigma_x}$$

$$\sigma_b^2 = \overline{x^2}\sigma_a^2 \qquad \sigma_b = \sigma_a \sqrt{\overline{x^2}}$$

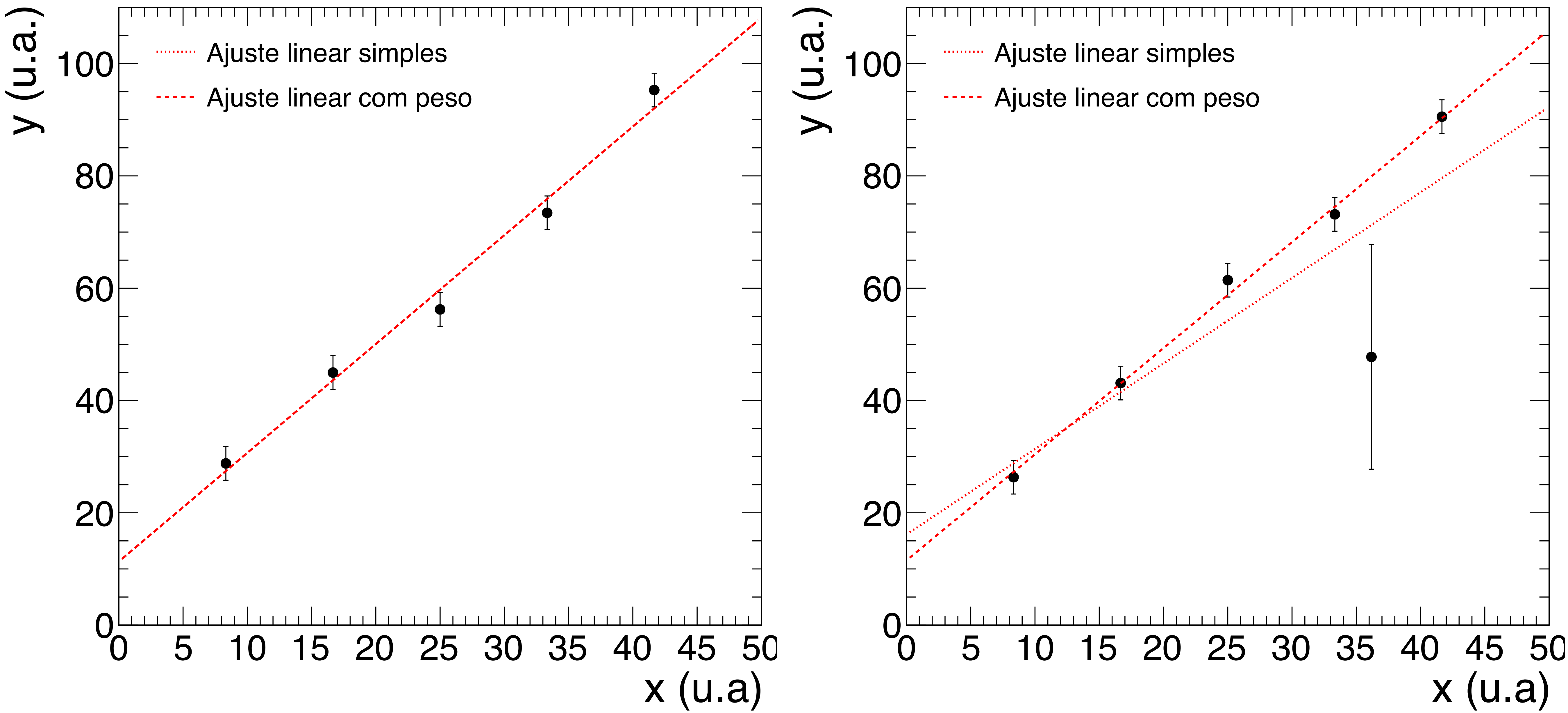
Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear com peso

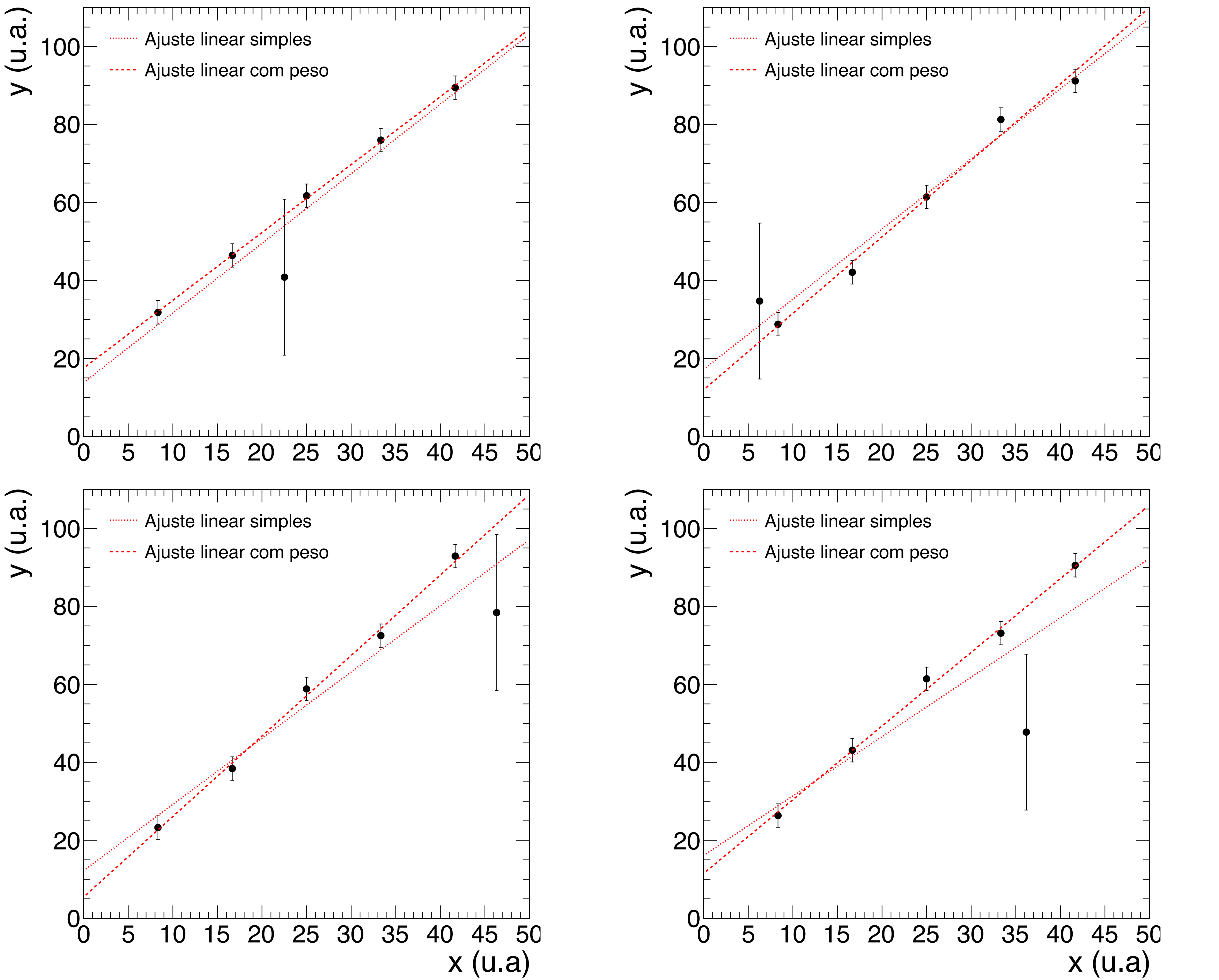
$a = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^2}$	$\bar{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \omega_i y_i = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i$
$b = \bar{y} - a\bar{x}$	$\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 x_i$
$\sigma_a = \dfrac{\sigma}{\sigma_x}$	$\dfrac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_i^2}$
$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\overline{x^2}}$	

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear



Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear





Ajuste linear simples
Ajuste linear com peso
y (u.a.)
x (u.a)
0
20
40
60
80
100
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50

Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste linear

Exercícios:

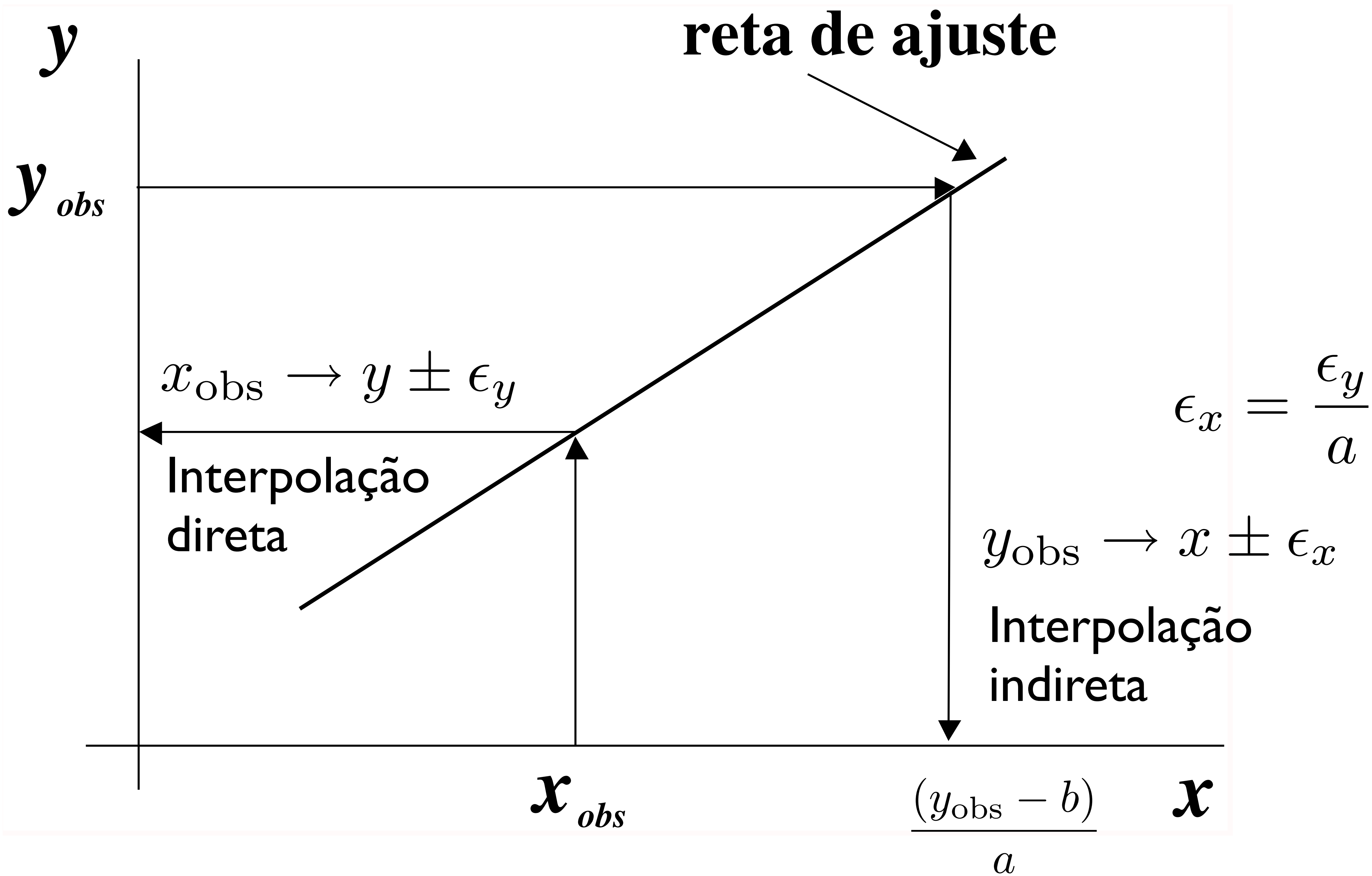
1) Use os dados abaixo para fazer um diagrama de dispersão dos dados e ajustar uma reta através do método dos mínimos quadrados com peso.

x	y
0.174	0.122 +- 0.001
0.342	0.242 +- 0.001
0.5	0.35 +- 0.002
0.643	0.438 +- 0.002
0.766	0.522 +- 0.003
0.866	0.588 +- 0.003
0.94	0.649 +- 0.003

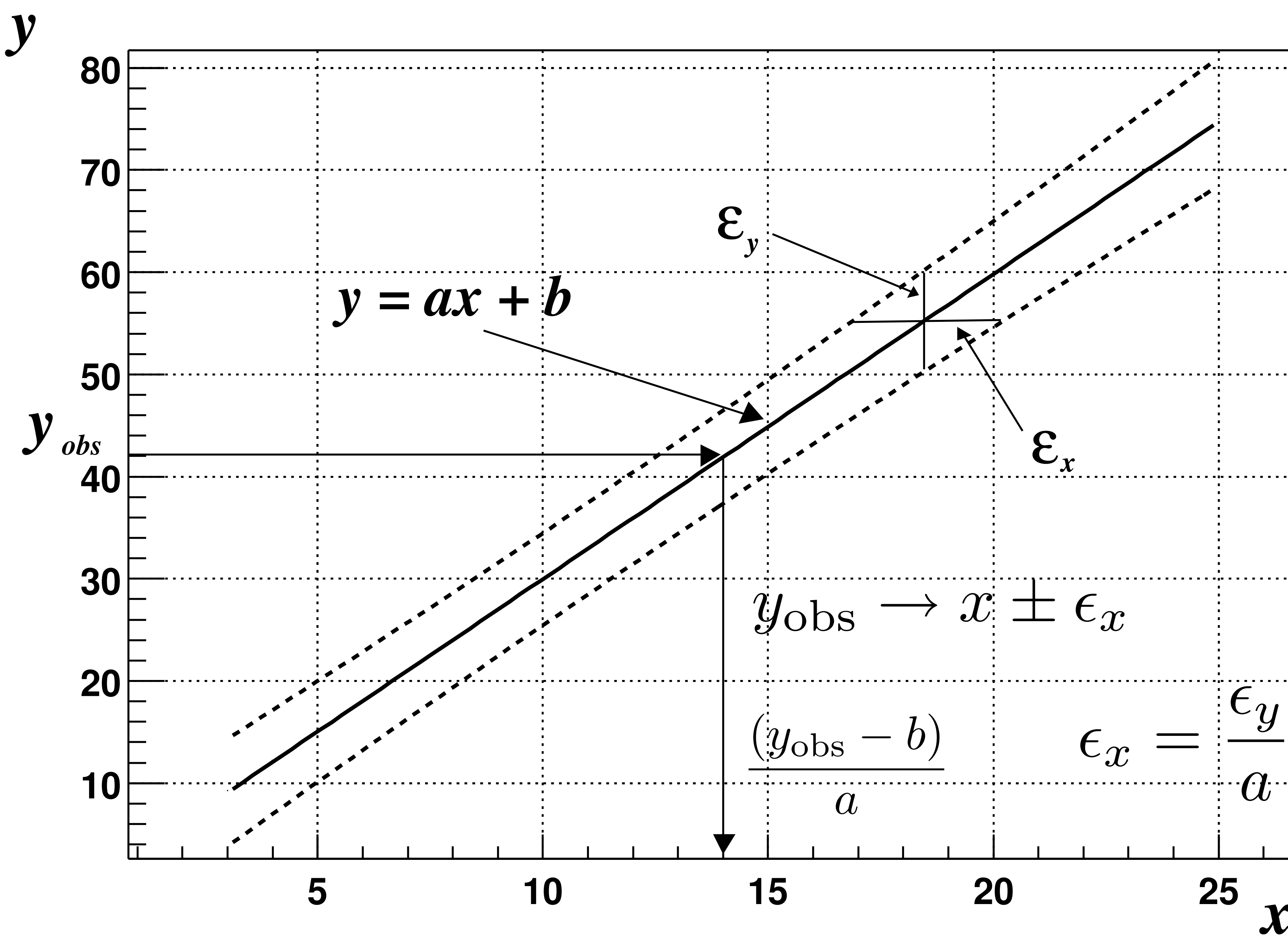
2) Faça o mesmo que em 1), com esses dados:

x	y
0.174	0.122 +- 0.001
0.342	0.242 +- 0.001
0.5	0.35 +- 0.002
0.643	0.438 +- 0.002
0.766	**0.422 +- 0.1**
0.866	0.588 +- 0.003
0.94	0.649 +- 0.003

Reta de calibração e interpolação



Faixa de confiança



Extras

Parâmetros de *posição*

i) *Média*:

Valor médio de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$:

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Dados em *M* classes (intervalos) com ponto médio $\{x_1, x_2, ..., x_M\}$ e frequência $\{n_1, n_2, ..., n_M\}$:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_M x_M}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} n_j x_j$$

ii) *Moda*: Valor mais frequente de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$

iii) *Média quadrática*:

$$x_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

iv) *Mediana* (Mesma quantidade de dados abaixo e acima da mediana):

$$N(\text{ímpar}) \rightarrow x_{\text{med}} = x_{(N+1)/2}$$

$$N(\text{par}) \rightarrow x_{\text{med}} = \frac{x_{N/2} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

Parâmetros de *dispersão*

Variância: Média dos quadrados dos desvios (δx_i)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta x_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

Note que a expressão para a variância pode ser simplificada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Parâmetros de dispersão

Desvio padrão: Raiz quadrada da variância, ou média quadrática dos desvios

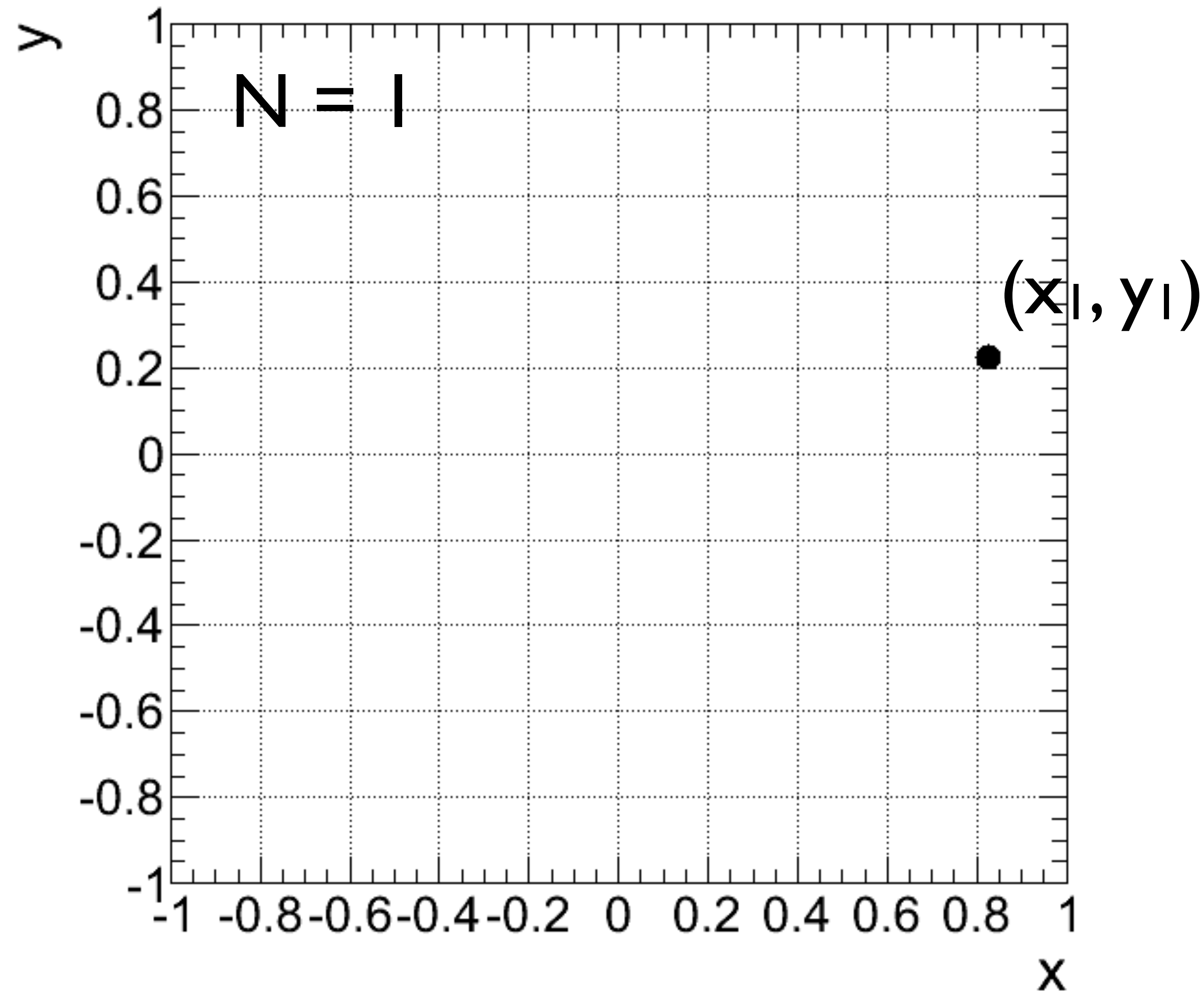
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta x_i)^2} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N}}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_x = \sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}$$

Representando duas variáveis

<u>Diagrama de dispersão</u>: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$

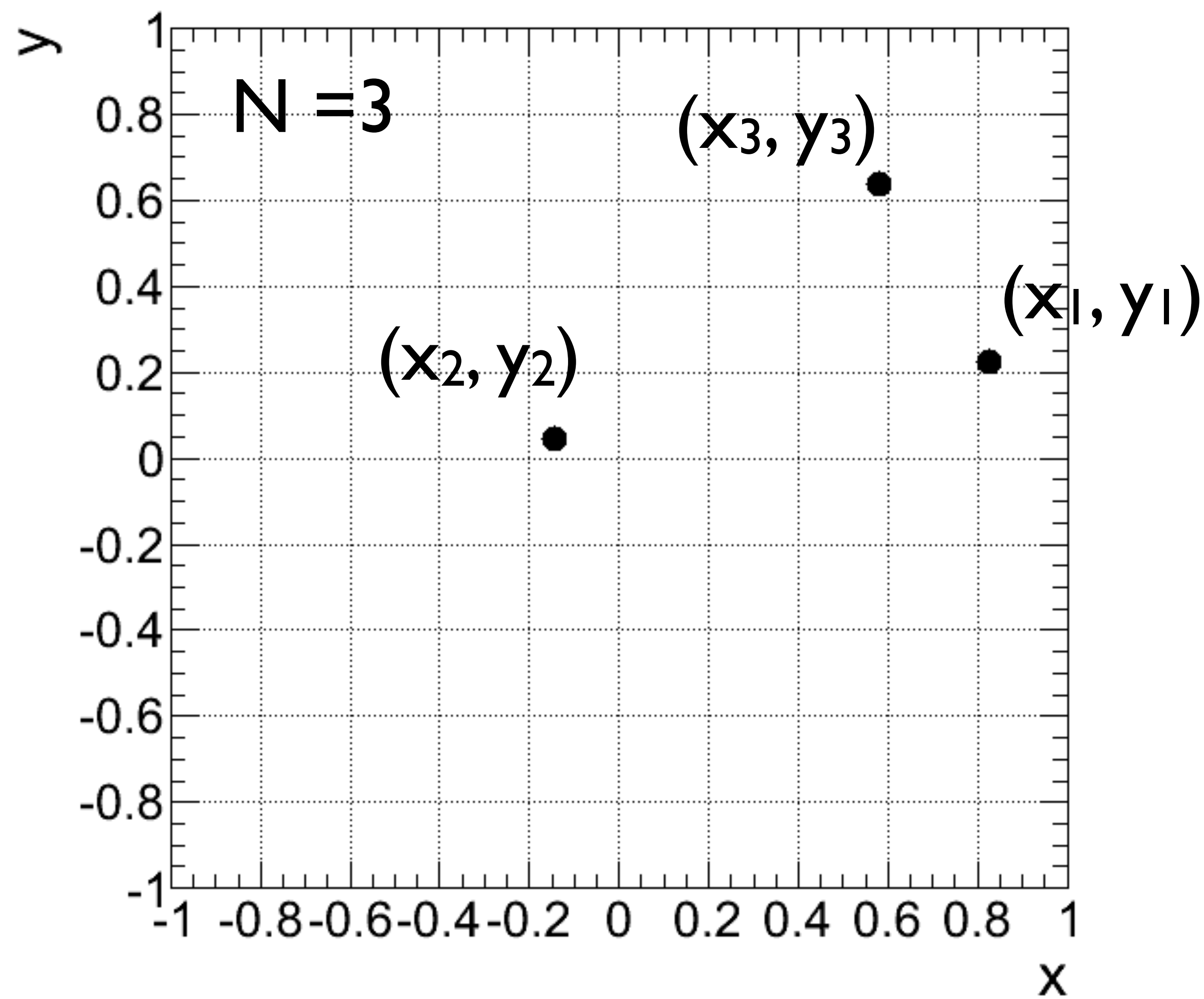
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x,y)



Representando duas variáveis

<u>Diagrama de dispersão</u>: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$

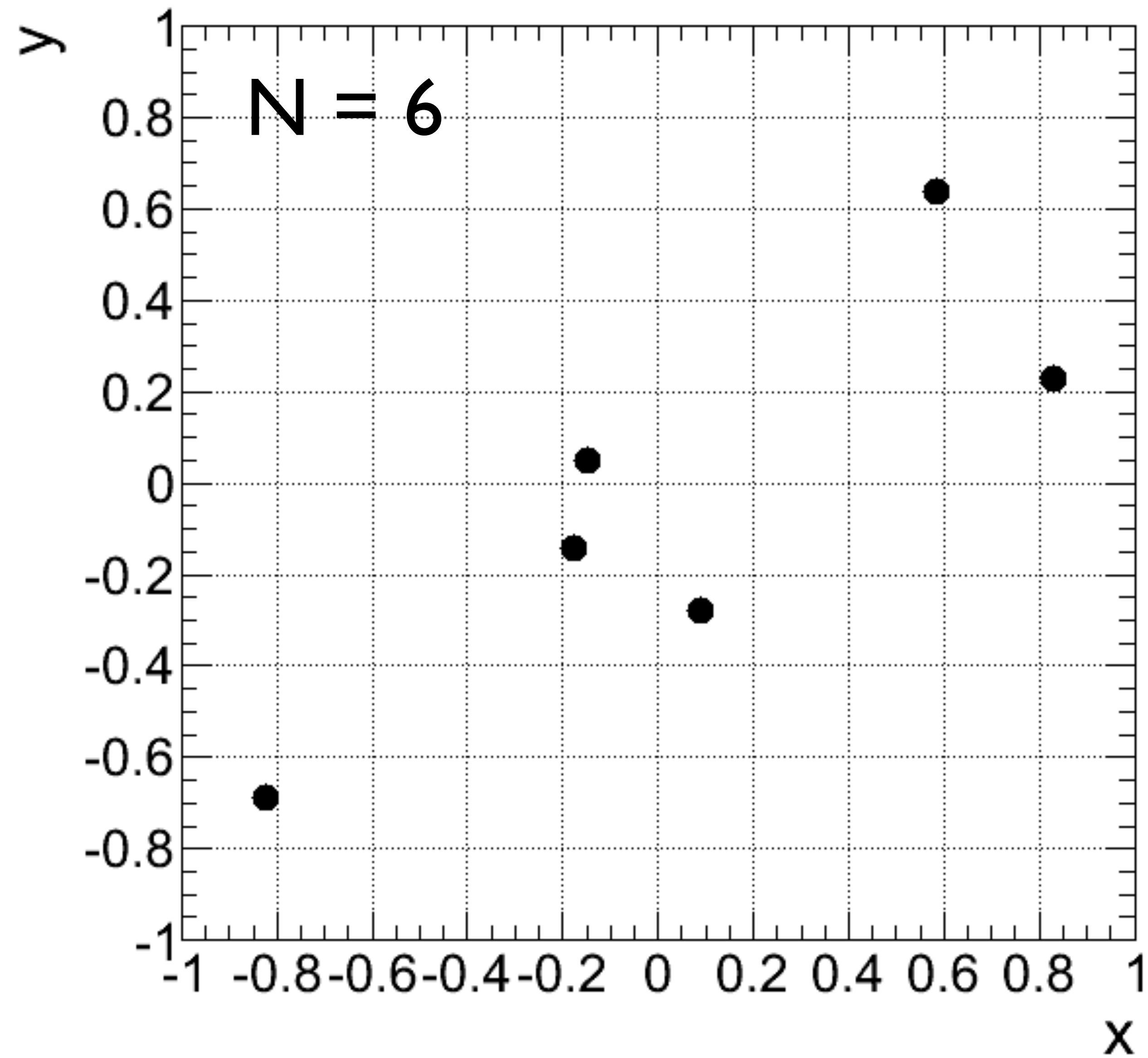
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x,y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$

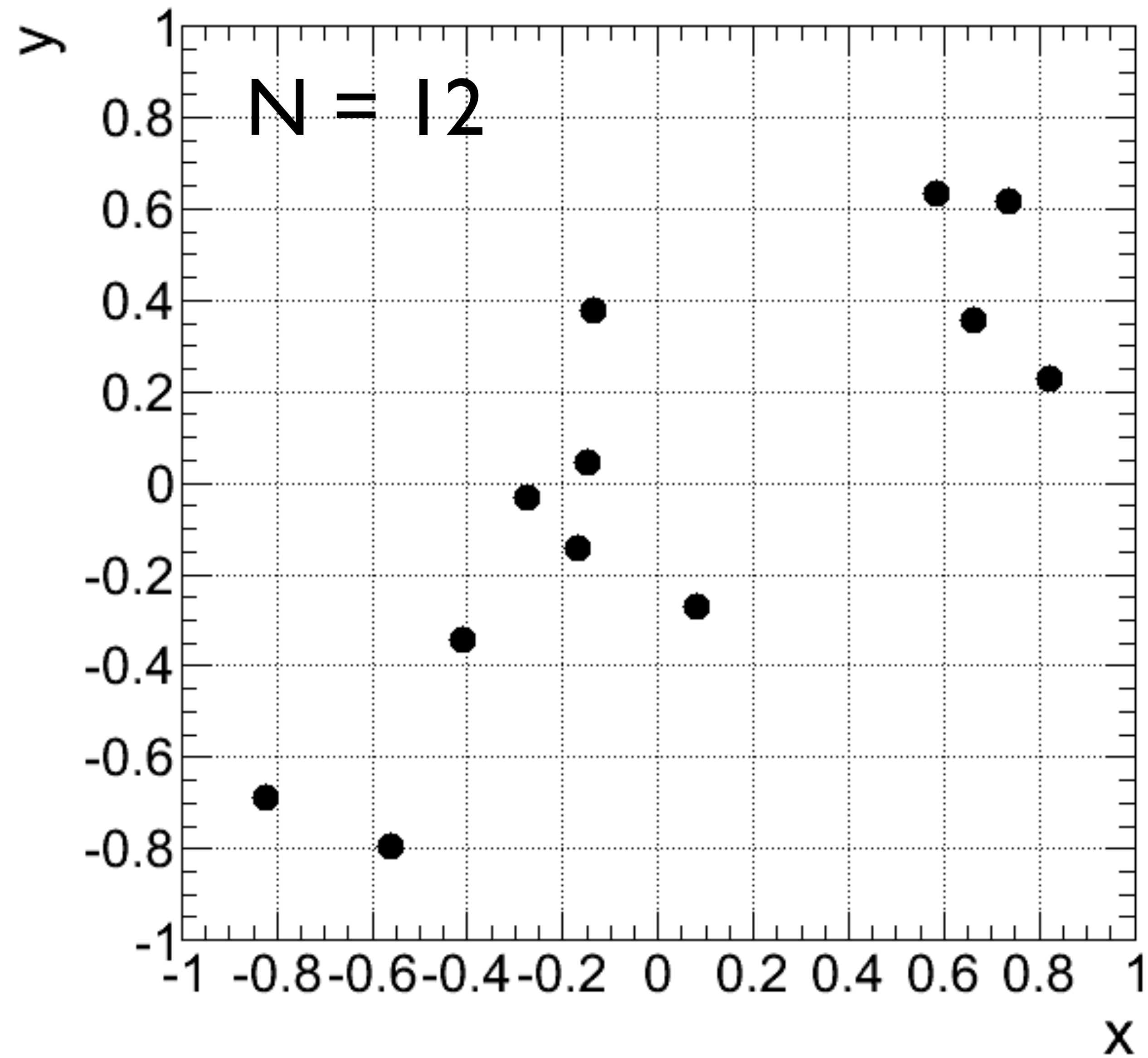
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x,y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$

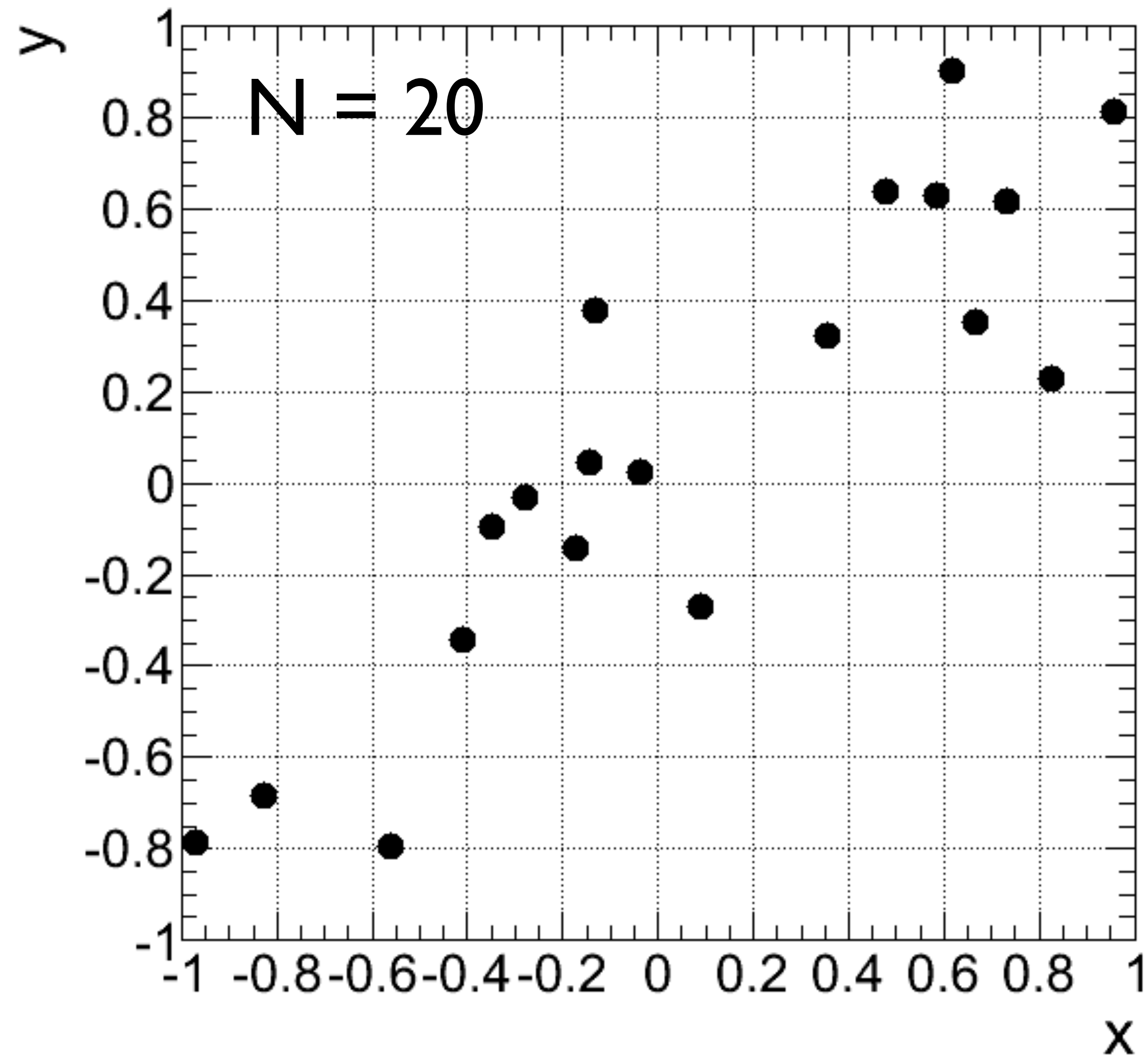
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x,y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$

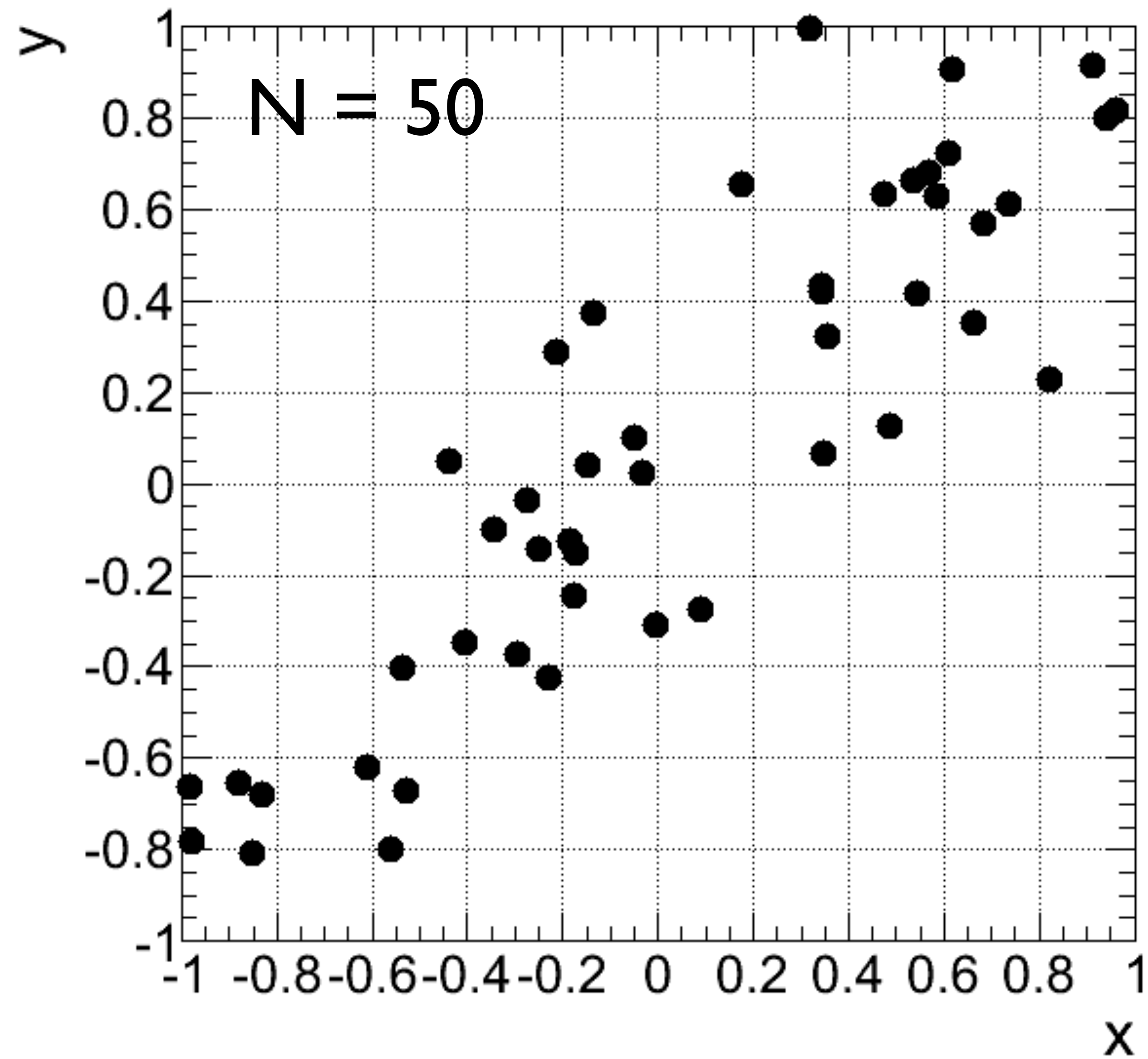
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x,y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$

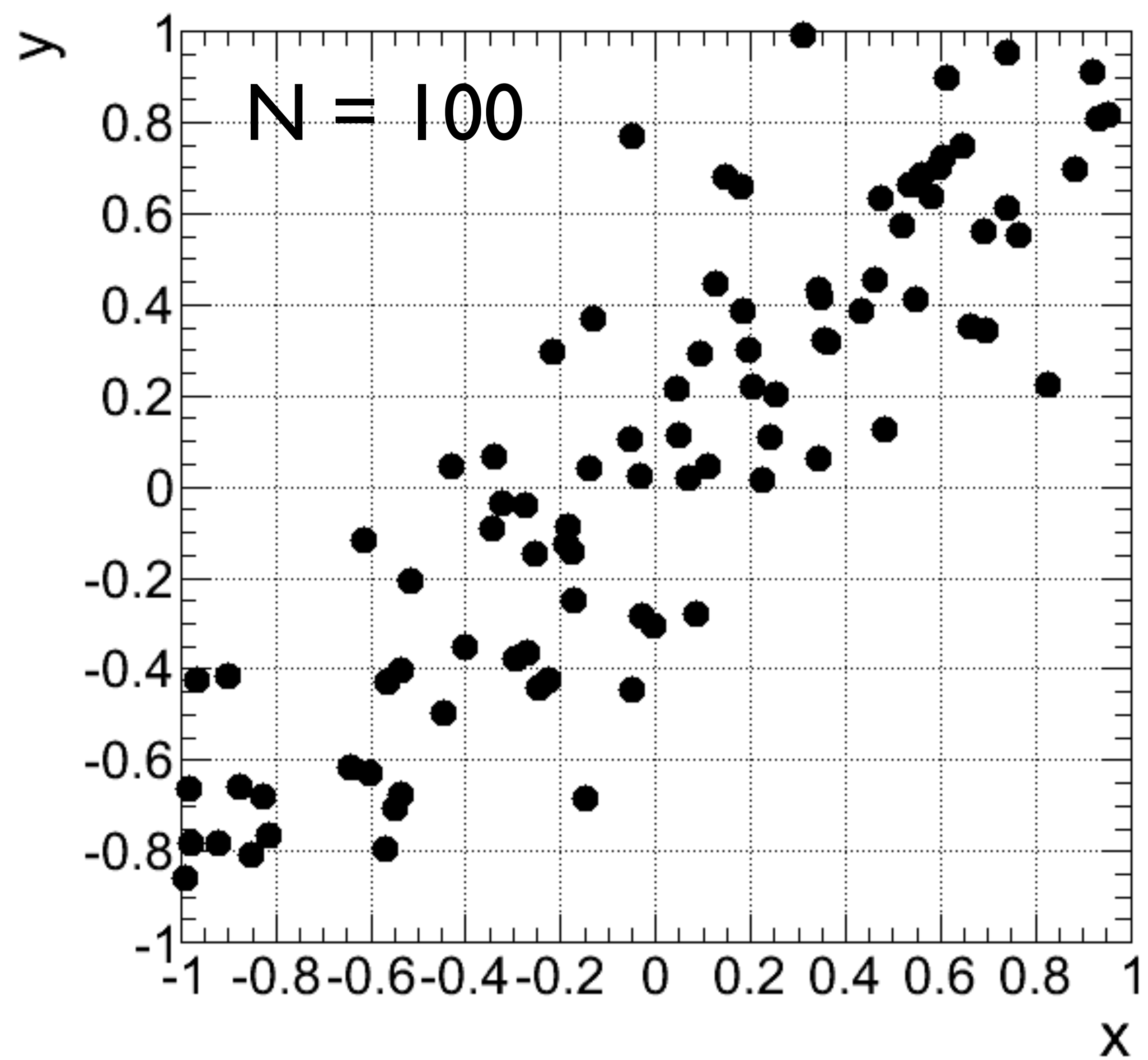
Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x,y)



Representando duas variáveis

Diagrama de dispersão: Gráfico representando medidas em duas variáveis $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$

Exemplo: Considere um conjunto de dados de duas variáveis (x,y)



Parâmetros de correlação

i) *Covariância*: média dos produtos dos desvios nas duas variáveis (δx_i e δy_i)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta x_i \delta y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \ldots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})}{N}$$

Note que a expressão para a covariância pode ser simplificada por:

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

e que não importa a ordem das variáveis:

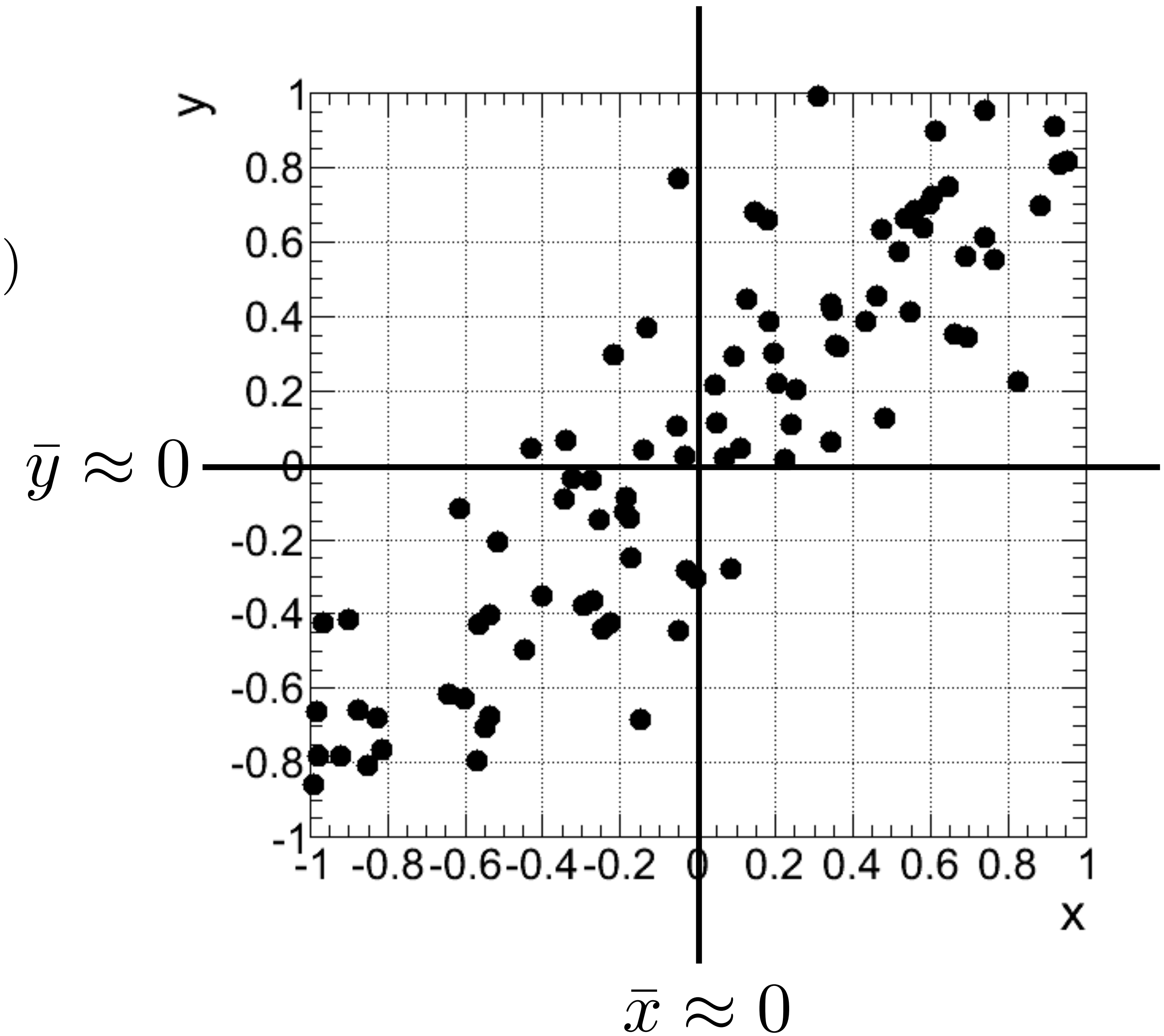
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\sigma_{xy} > 0$$



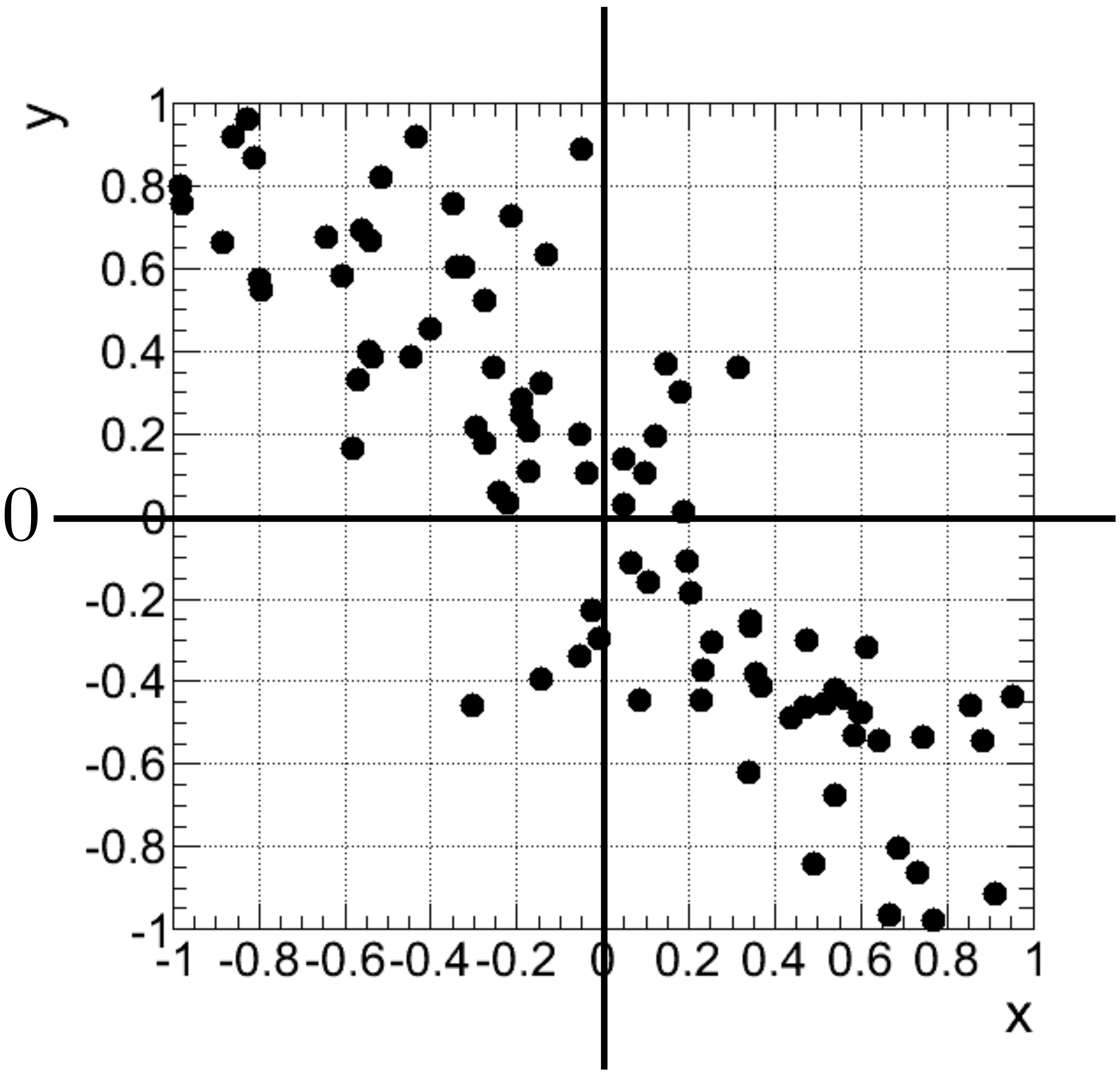
Parâmetros de correlação: covariância

Covariância:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$\Rightarrow$ $\sigma_{xy} < 0$

$\bar{y} \approx 0$



$\bar{x} \approx 0$

Parâmetros de correlação

ii) *Coeficiente de correlação linear de Pearson*: covariância entre duas variáveis, dividida por seus desvios padrão

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad\qquad -1 \geq r \leq 1$$

Correlação linear, perfeita e positiva: $r = 1$

Correlação linear, perfeita e negativa: $r = -1$

Propagação de erros

- Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Adição ou subtração de variáveis

$$u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N}\sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N}\sigma_{xy}}$$ ou $$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}}$$

Se x e y são *independentes* (correlação nula) $\longrightarrow$ $\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$

Propagação de erros

- Estimativa padrão da incerteza

Exemplo: Multiplicação ou divisão de variáveis

Se x e y são *independentes* (correlação nula):

$$u = xy \longrightarrow \frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

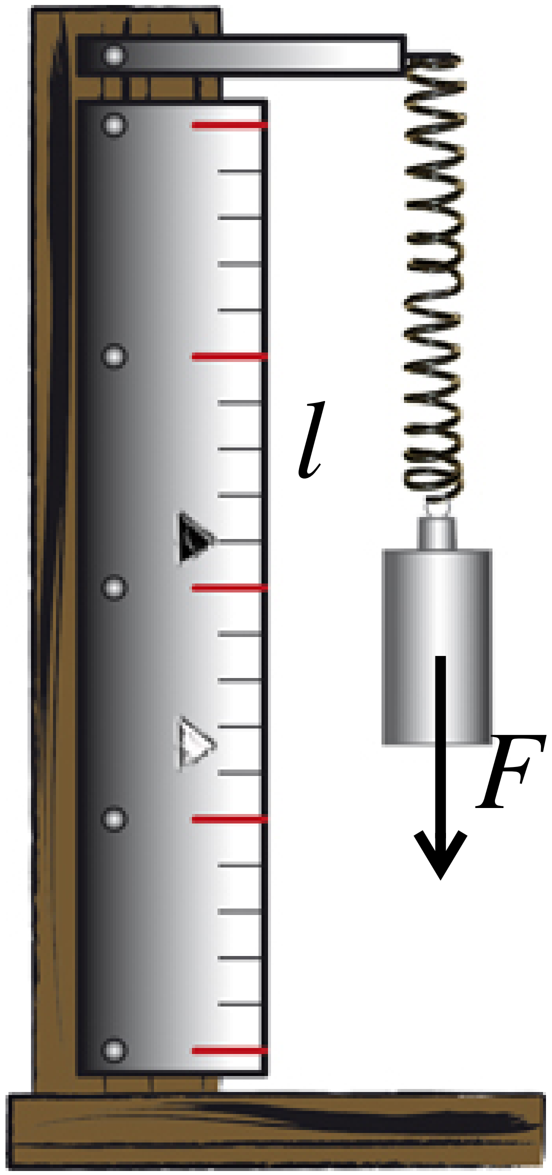
ou

$$u = x/y$$

Se a correlação não é nula:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)}$$

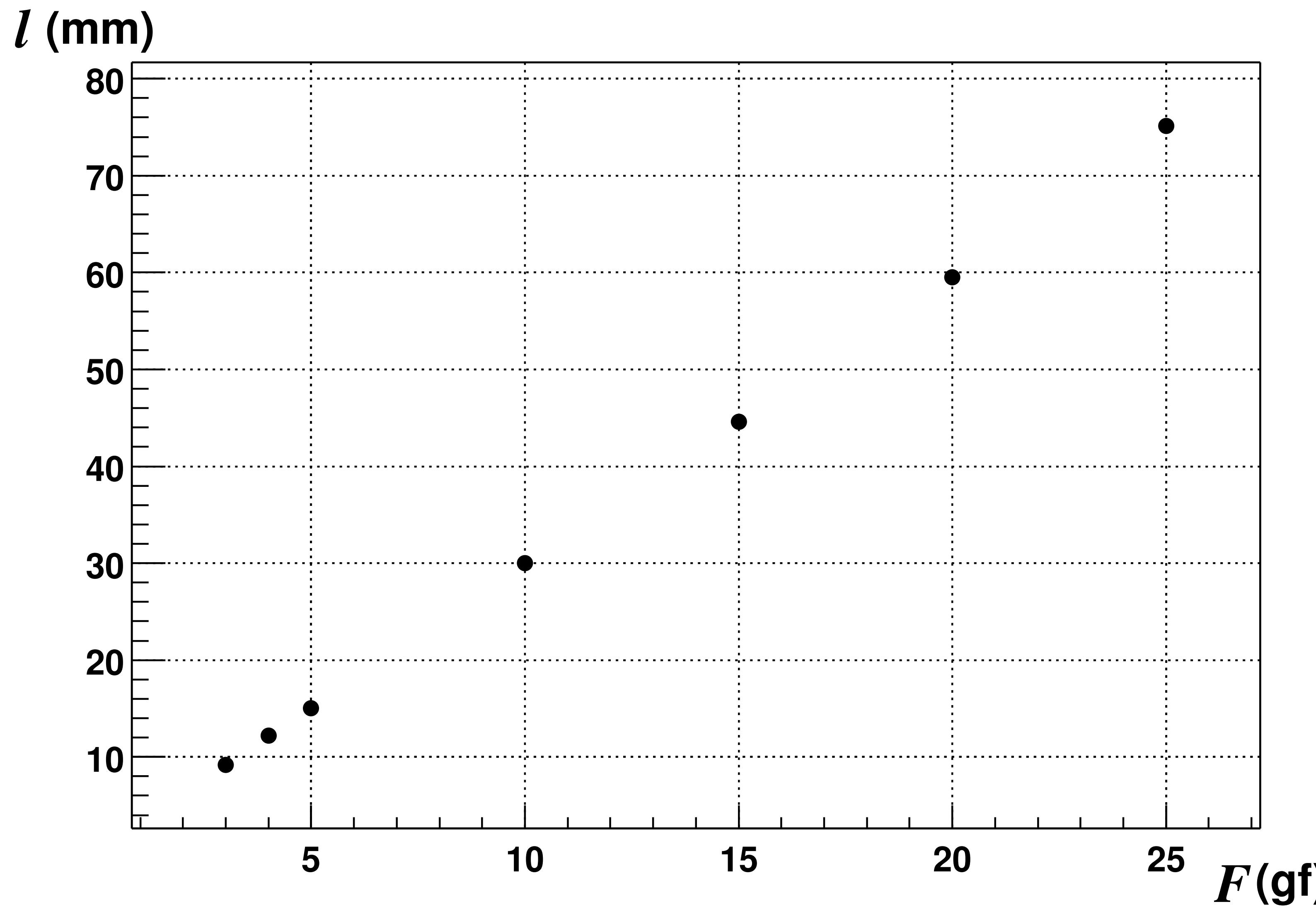
Exemplo: dinamômetro de mola



F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

Exemplo: dinamômetro de mola

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1



Exemplo: dinamômetro de mola

- O comportamento ideal de uma mola nos diz que a sua elongação é relacionada com a magnitude da força aplicada na mesma:

$$l = a \cdot F + b$$

Equação de uma reta

$$y = f\left(x; a, b\right) = a \cdot x + b$$

- Queremos obter estimativas para os parâmetros da reta (a,b). Para isso utilizamos um método chamado de "Método dos Mínimos Quadrados"

Exemplo: dinamômetro de mola

F (gf)	l (mm)
3	9,2
4	12,2
5	15,0
10	30,0
15	44,6
20	59,5
25	75,1

$$a = (2.983 \pm 0.013) \text{ mm/gf}$$

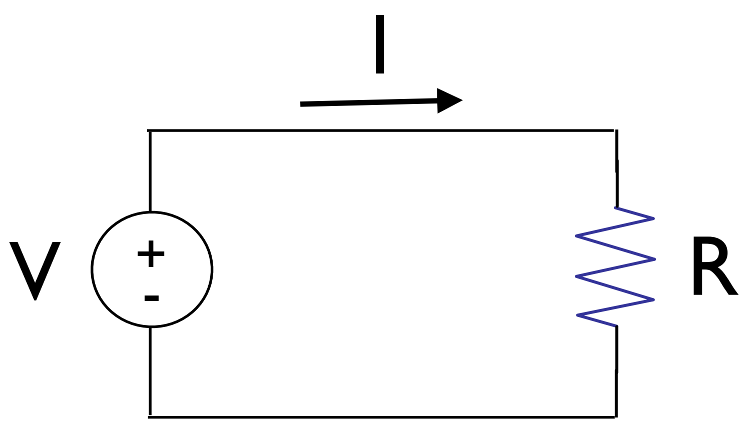
$$b = (0.14 \pm 0.18) \text{ mm}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_l = 0.27 \text{ mm}$$

Equação da reta:

$$l \text{ (mm)} = 2.983 \cdot F \text{ (gf)} + 0.14$$

Exemplo: Lei de Ohm

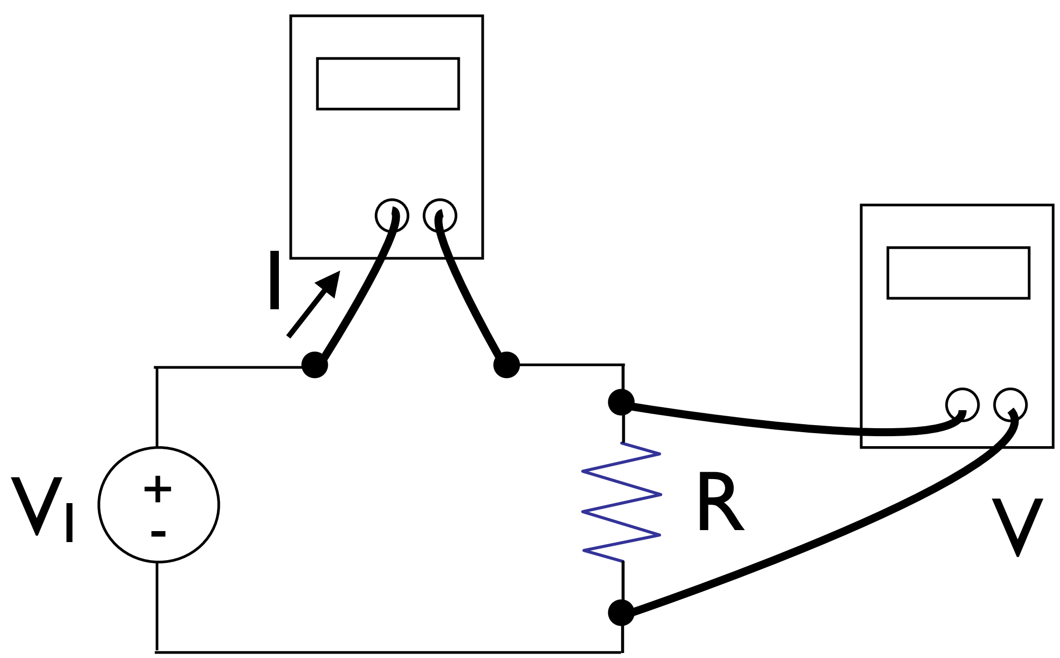


$$V = RI$$

$$I = \frac{V}{R} = \left(\frac{1}{R}\right) V + 0$$

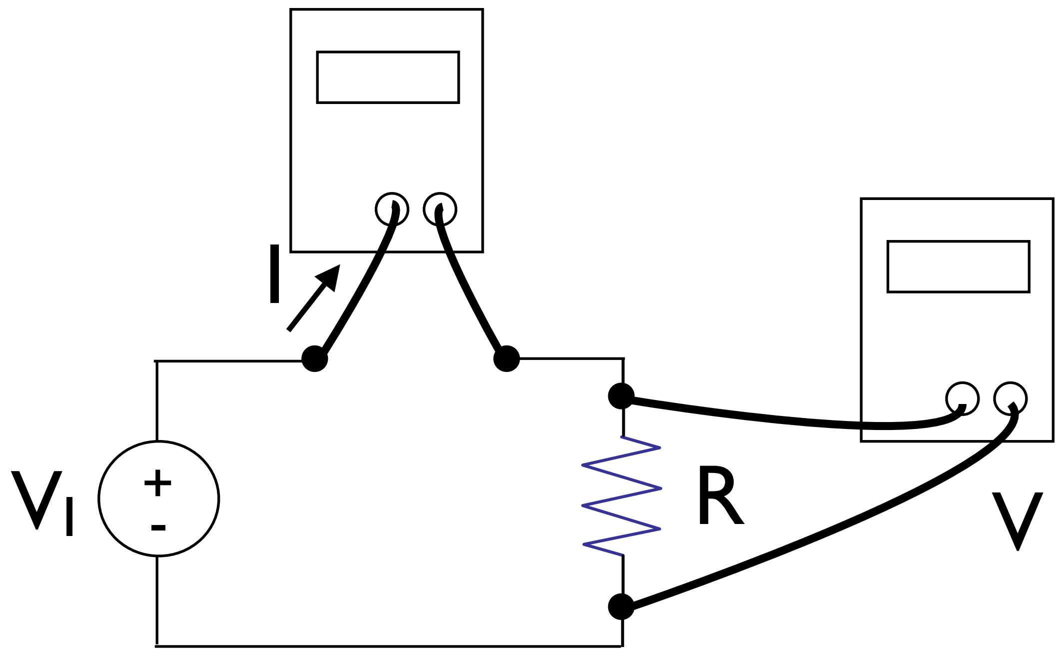
$$y = f\left(x; a, b\right) = a \cdot x + b$$

Exemplo: Lei de Ohm



	x	y
	V	I
Medida 1		
Medida 2		
Medida 3		
Medida 4		
Medida 5		

Exemplo: Lei de Ohm



	x	y
	V	I
Medida 1	1,98	2,02
Medida 2	3,87	3,99
Medida 3	5,82	6,00
Medida 4	7,76	8,02
Medida 5	9,70	10,05